Теорија електричних кола

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

$$u(t) = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{\underline{s}t}\,\mathrm{d}s$$

$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-a\,t}$	$\frac{1}{a+s}$
$\sin(b\,t)$	$\frac{b}{b^2+s^2}$
$\cos(b\,t)$	$\frac{s}{b^2+s^2}$

Милка Потребић

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

Лапласова трансформација

као алат за одређивање одзива временски непромењљивих линеарних електричних кола

Лапласова трансформација

$$u(t) = w(t)\,\vartheta(t)$$

$w(t)$ је **елементарна** функција као што су полиноми, експоненцијална функција, синусна функција, или косинусна функције

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

$$\underline{s} = \sigma + \mathrm{j}\omega, \quad (\sigma, \omega \in \mathrm{R})$$

$$u(t) = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{\underline{s}t}\,\mathrm{d}\underline{s}$$

c је најмања вредност за коју трансформација постоји

$$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$$

$$u(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}))$$

Основни парови LT

$\delta(t)$	1
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$e^{-a\,t}$	$\dfrac{1}{a+s}$
$\sin(b\,t)$	$\dfrac{b}{b^2+s^2}$
$\cos(b\,t)$	$\dfrac{s}{b^2+s^2}$

$e^{-a\,t}\sin(b\,t)$	$\dfrac{b}{b^2+(a+s)^2}$
$e^{-a\,t}\cos(b\,t)$	$\dfrac{a+s}{b^2+(a+s)^2}$
$e^{-a\,t}\,t$	$\dfrac{1}{(a+s)^2}$
$t\sin(b\,t)$	$\dfrac{2\,b\,s}{(b^2+s^2)^2}$
$t\cos(b\,t)$	$\dfrac{s^2-b^2}{(b^2+s^2)^2}$

Елементарне функције времена у табели треба помножити са Хевисајдовом функцијом $\upsilon(t)$.

Изабрани парови LT (1)

$\dfrac{p+q\,s}{a+s}$	$e^{-a\,t}\,(p-a\,q)+q\,\delta(t)$
$\dfrac{p+q\,s}{(a+s)^2}$	$e^{-a\,t}\,q+e^{-a\,t}\,(p-a\,q)\,t$
$\dfrac{p+q\,s}{(a+s)\,(b+s)}$	$\dfrac{e^{-a\,t}\,(a\,q-p)}{a-b}+\dfrac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{a-b}$
$\dfrac{p+q\,s}{(a+s)^2\,(b+s)}$	$\dfrac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{(a-b)^2}+\dfrac{e^{-a\,t}\,(b\,q-p)}{(a-b)^2}+\dfrac{e^{-a\,t}\,(a\,q-p)\,t}{a-b}$
$\dfrac{p+q\,s}{(a+s)\,(b+s)\,(c+s)}$	$\dfrac{e^{-a\,t}\,(p-a\,q)}{(a-b)\,(a-c)}+\dfrac{e^{-b\,t}\,(b\,q-p)}{(a-b)\,(b-c)}-\dfrac{e^{-c\,t}\,(c\,q-p)}{(a-c)\,(b-c)}$

Елементарне функције времена у табели треба помножити са Хевисајдовом функцијом $\upsilon(t)$.

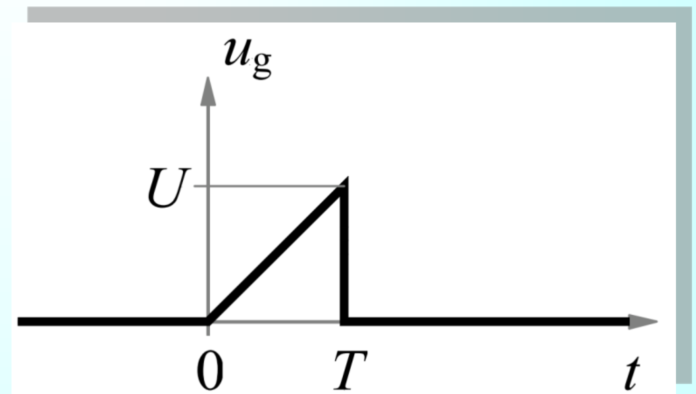
Изабрани парови LT (2)

$\dfrac{p+q\,s}{a^2+s^2}$	$q\cos(a\,t)+\dfrac{p\sin(a\,t)}{a}$
$\dfrac{p+q\,s}{(a^2+s^2)^2}$	$\dfrac{\left(q\,t\,a^2+p\right)\sin(a\,t)-a\,p\,t\cos(a\,t)}{2\,a^3}$
$\dfrac{p+q\,s}{(b+s)\,(a^2+s^2)}$	$\dfrac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{a^2+b^2}+\dfrac{(b\,q-p)\cos(a\,t)+\dfrac{\left(q\,a^2+b\,p\right)\sin(a\,t)}{a}}{a^2+b^2}$
$\dfrac{p+q\,s}{(a^2+s^2)\,(b^2+s^2)}$	$\dfrac{q\cos(b\,t)+\dfrac{p\sin(b\,t)}{b}}{a^2-b^2}-\dfrac{a\,q\cos(a\,t)+p\sin(a\,t)}{a\,(a^2-b^2)}$

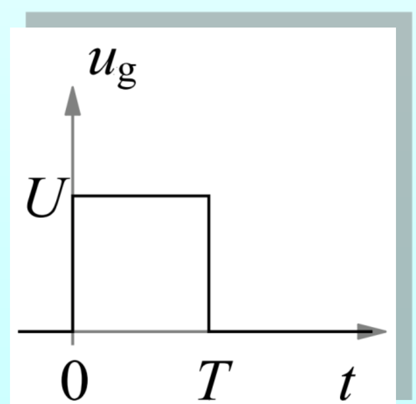
Елементарне функције времена у табели треба помножити са Хевисајдовом функцијом $\upsilon(t)$.

Лапласова трансформација функција задатих по интервалима

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}) = U\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\underline{s}T}(\underline{s}T+1)}{\underline{s}^2 T}$$



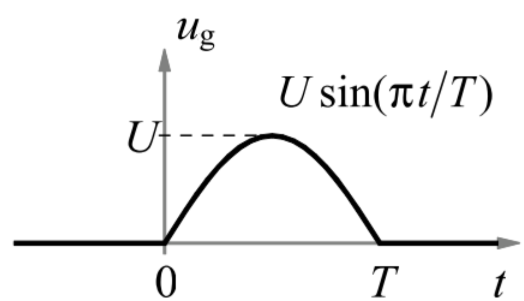
$$\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}) = U\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}{\underline{s}}$$

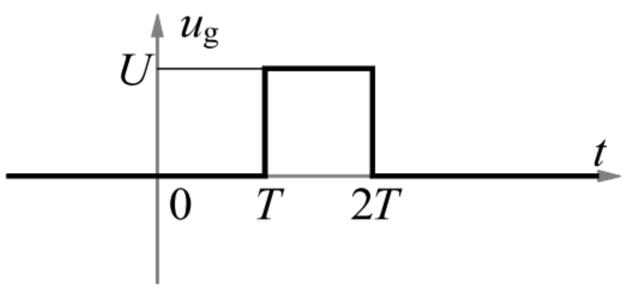


$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

Лапласова трансформација функција задатих по интервалима

$$\underline{U}(\underline{s})=\int_{0^-}^{\infty}u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

(5) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике? 	$\pi TU\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}{\underline{s}^2T^2+\pi^2}$

(5) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике? 	$U\dfrac{1}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}T}-U\dfrac{1}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}2T}=U\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$

Трансформате одређујемо израчунавањем дефиниционог интеграла и/или применом својстава унилатералне Лапласове трансформације.

Почетни тренутак у LT

- Почетни тренутак електричног кола, које решавамо Лапласовом трансформацијом, је **нула**

$$t_0 = 0$$

- Природне почетне услове (почетне напоне кондензатора и почетне струје калемова) електричног кола, које решавамо Лапласовом трансформацијом, задајемо у тренутку **нула-минус**

$$t_0^-$$

$$\mathrm{LT}(u(t-T)) = \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

Важна својства

Лапласове трансформације

$$\mathrm{LT}\left(\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \underline{U}(\underline{s})\,\underline{G}(\underline{s})$$

Крајње вредности

$$u(0^+) = \lim_{\underline{s}\to\infty}(\underline{s}\,\underline{U}(\underline{s}))$$

$$u(\infty) = \lim_{\underline{s}\to 0}(\underline{s}\,\underline{U}(\underline{s}))$$

Користити ово својство када је познат трансформат, траже се крајње вредности, а не тражи се одзив или његов график у времену.

Померај аргумента (транслација)

$$\mathrm{LT}(u(t-T)) = \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

$$\mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}+a)) = u(t)\,\mathrm{e}^{-at}$$

Користити ово својство за делотворније и учинковитије налажење директне или инверзне Лапласове трансформације, на пример, када су побуде оиисане са више аналитичких израза по интервалима времена.

Конволуција

$$\mathrm{LT}\left(\int_{0}^{t} u(\tau)\,g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)=\underline{U}(\underline{s})\,\underline{G}(\underline{s})$$

Лапласова трансформација пресликава конволуцију функција времена у **производ** Лапласових трансформата

Сличност (скалирање)

$$\mathrm{LT}(u(at)) = \frac{1}{a}\underline{U}(\frac{\underline{s}}{a})$$

$$a \in \mathrm{R}$$

$$a > 0$$

$$\mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(a\,\underline{s})) = \frac{1}{a}u(\frac{t}{a})$$

Диференцирање у *t*-домену

$$\mathrm{LT}(u'(t)) = \underline{s}\,\underline{U}(\underline{s}) - u(0^-)$$

$$\mathrm{LT}(u''(t)) = \underline{s}^2\,\underline{U}(\underline{s}) - u(0^-)\,\underline{s} - u'(0^-)$$

$$\mathrm{LT}(u^{(n)}(t)) = \underline{s}^n\,\underline{U}(\underline{s}) - u(0^-)\,\underline{s}^{n-1} - u'(0^-)\,\underline{s}^{n-2} - \cdots$$
$$- u^{(n-2)}(0^-)\,\underline{s} - u^{(n-1)}(0^-)$$

Диференцирање у $\underline{s}$-домену

$$\mathrm{LT}(t\,u(t)) = (-1)\frac{\mathrm{d}\underline{U}(\underline{s})}{\mathrm{d}\underline{s}}$$

$$\mathrm{LT}(t^n u(t)) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n\underline{U}(\underline{s})}{\mathrm{d}\underline{s}^n}$$

Уопштена комплексна функција

временски непромењивог линеарног електричног кола без почетне енергије са једним извором

Уопштена компл. функц. ел. кола

- Посматрајмо линеарно временски непромењиво електрично коло без почетне енергије у коме делује само **један** извор (један независан генератор)
- Сви природни почетни услови у тренутку нула-минус су једнаки нули
- ***Уопштена комплексна функција електричног кола*** (*функција ел. мреже у Лапласовој трансформацији, функција система*) је однос трансформата одзива и трансформата побуде
- Ако су побуда и одзив на истом приступу, комплексна функција се назива **улазна комплексна функција** (улазна имитанса)
- Ако су побуда и одзив на различитим приступима, комплексна функција се назива **преносна комплексна функција** (трансфер функција, функција преноса у Лапласовој трансформцији)
- У анализи комплексних функција ел. кола Лапласова променљива (комплексна учестаност, $\underline{s}$) се посматра у целој комплексној равни

Импеданса, адмитанса, трансмитанса, појачање, слабљење

- Улазна импеданса
- Улазна адмитанса
- Преносна импеданса (трансимпеданса)
- Преносна адмитанса (трансадмитанса)
- Трансмитанса напона (напонско појачање, voltage gain, voltage amplification)
- Трансмитанса струје (струјно појачање, current gain, current amplification)
- Функција слабљења (attenuation)
- У литератури се дефинише и уопштена комплексна функција електричног кола као количник два трансформата одзива

Потпуни назив би био са фразом *у области Лапласове трансформације*, на пример, Улазна импеданса у области Лапласове трансформације.

Ред електричног кола и LT

- Ред електричног кола је број диференцијалних једначина у систему једначина стања
- То је истовремено и ред диференцијалне једначине одзива
- Ред електричног кола је ред уопштене комплексне функције електричног кола у области Лапласове трансформације

Ред рационалне функције по Лапласовој промењљивој $\underline{s}$ је степен именитеља.

Који је ред ел. кола са слике?

Задатак 1

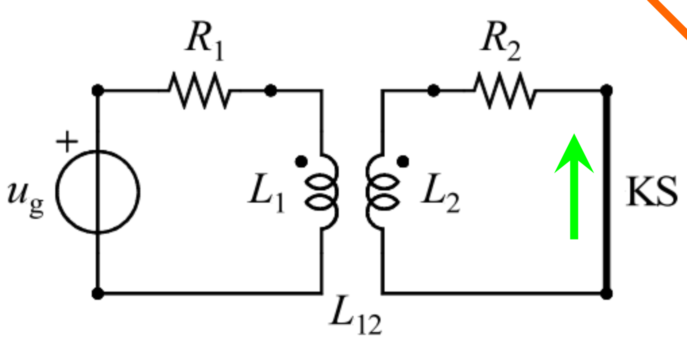
Електрично коло са слике има познате вредности елемената: $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L$. Трансформатор је симетричан са савршеном спрегом. Побуда је $u_g(t) = U\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{h}(t)$,

$$a = \frac{R}{2L}.$$

(5) Одредити струју краткоспојника KS.

(5) Одредити ред кола.

(5) Нацртати граф кола.



Проверити да ли се добија исправан резултат ако се посматра неки други одзив, осим напона напонског извора када је $\underline{H} = 1$.

redKola.nb

```
In[1]:= H = I2/Ug /.
          Solve[
           {Ug == R1 I1 + U1, U1 == s L1 I1 + s L12 I2,
             U2 == s L12 I1 + s L2 I2, 0 == R2 I2 + U2} /.
            {L1 → L, L2 → L, L12 → L, R1 → R, R2 → R},
           {I2}, {U1, U2, I1}] // First

Out[1]= -(L s)/(R (R + 2 L s))

In[2]:= r = Exponent[Denominator[H], s]

Out[2]= 1
```

Који је ред овог ел. кола?

redKola2.nb

```
In[1]:= odziv =
  Solve[{IL == IC, Ug == UL + UC, UL == L (s IL - I0), IC == C (s UC - U0)},
   {IC, IL, UC, UL}] // First
```

Out[1]= $\left\{IC \to -\frac{-C\,I0\,L\,s + C\,U0 - C\,s\,Ug}{1 + C\,L\,s^2},\ IL \to -\frac{-C\,I0\,L\,s + C\,U0 - C\,s\,Ug}{1 + C\,L\,s^2},\ UC \to -\frac{-I0\,L - C\,L\,s\,U0 - Ug}{1 + C\,L\,s^2},\ UL \to -\frac{I0\,L + C\,L\,s\,U0 - C\,L\,s^2\,Ug}{1 + C\,L\,s^2}\right\}$

In[2]:= $HC = \frac{UC}{Ug}$ /. odziv /. {I0 → 0, U0 → 0}

Out[2]= $\frac{1}{1 + C\,L\,s^2}$

In[3]:= $HL = \frac{IL}{Ug}$ /. odziv /. {I0 → 0, U0 → 0}

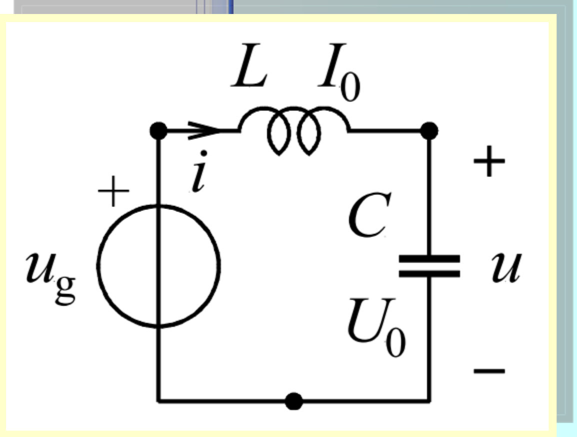
Out[3]= $\frac{C\,s}{1 + C\,L\,s^2}$

```
In[4]:= redC = Exponent[Denominator[HC], s]
```

Out[4]= 2

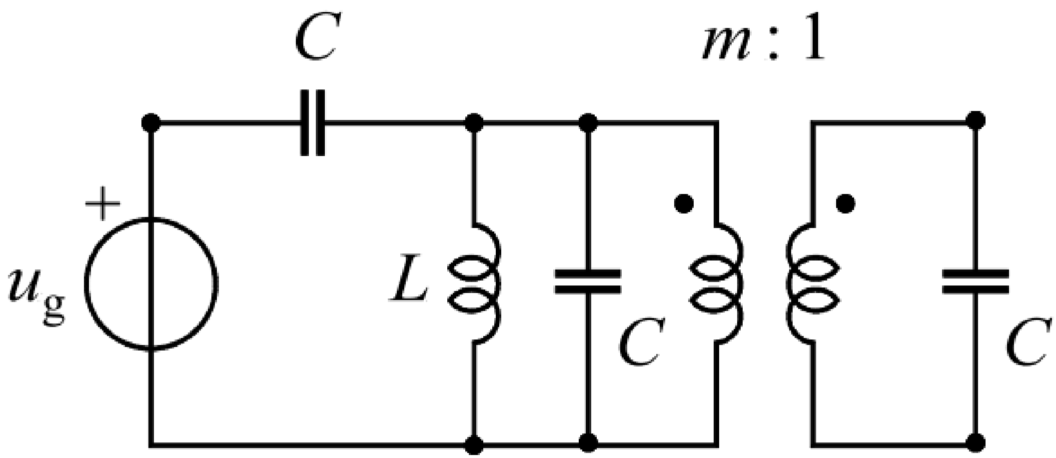
```
In[5]:= redL = Exponent[Denominator[HL], s]
```

Out[5]= 2



Испитајте ред овог ел. кола LT

(5) Ред електричног кола са слике је



(а) 1,
(б) 2,
(в) 3,
(г) 4,
(д) 5,
(ђ) 6 ?

На пример, одредите Лапласов трансформат струје напонског извора (комплексну струју извора) и испитајте његов ред.

На колико начина можете да решите овај задатак?

Питања

(5) За одређивање уопштене комплексне функције линеарног временски непромењивог електричног кола почетни услови треба да буду	(а) једнаки јединици, (б) једнаки нули, (в) произвољни, (г) у збиру једнаки нули?

(5) Уопштена комплексна функција линеарног временски непромењивог електричног кола је $\underline{F}(\underline{s}) = \dfrac{b}{\underline{s}+a}$. Одредити одговарајући одскочни одзив (индициону функцију). Коефицијенти a и b су реални и позитивни.

$$f(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left(F(s)\cdot\frac{1}{s}\right) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{-b/a}{s+a}+\frac{b/a}{s}\right) = \frac{b}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-at}\right)h(t)$$

$$\boxed{-\infty < t < \infty}$$

(5) Уопштена комплексна функција линеарног временски непромењивог електричног кола је $\underline{F}(\underline{s}) = \dfrac{b}{\underline{s}^2+a^2}$. Одредити одговарајући импулсни одзив (Гринову функцију). Коефицијенти a и b су реални и позитивни.

$$g(t) = \mathrm{LT}^{-1}(F(s)) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{b}{s^2+a^2}\right) = \frac{b}{a}\sin(a\cdot t)h(t)$$

$$\boxed{-\infty < t < \infty}$$

(5) Који почетни тренутак кола подразумева Лапласова трансформација?

Погледати предавање.

(5) У шта се пресликава конволуција Лапласовом трансформацијом?

Погледати предавање.

(4) Шта је одскочни одзив (индициона функција, step response)? Описати поступак за одређивање одскочног одзива. Који је домен (област дефинисаности) одскочног одзива?

Погледати предавање.

(5) Одскочни одзив (индициона функција) је инверзна Лапласова трансформација одговарајуће	а) уопштене комплексне функције мреже, б) уопштене комплексне функције мреже помножене Лапласовом променљивом, в) уопштене комплексне функције мреже подељене Лапласовом променљивом?

(5) Комплексни напон линеарног временски непромењивог електричног кола је $\underline{U}(\underline{s}) = \dfrac{C^2R^2\underline{s}^2+1}{3(CR\underline{s}+1)^2}\Phi$. Одредити тренутну вредност напона после бесконачно дугог времена $u(+\infty)$. Коефицијенти C, R и Φ су реални и позитивни.

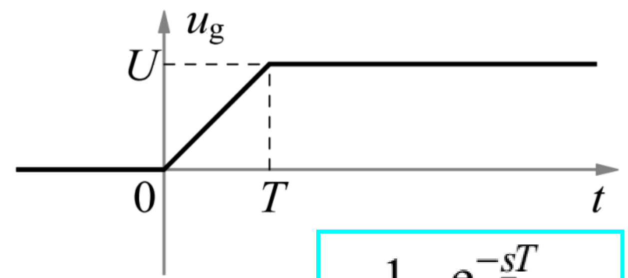
$$u(\infty) = \lim_{\underline{s}\to 0}(\underline{s}\,\underline{U}(\underline{s})) = 0$$

(5) Импулсни одзив (Гринова функција) је инверзна Лапласова трансформација одговарајуће	а) уопштене комплексне функције мреже, б) уопштене комплексне функције мреже помножене Лапласовом промењљивом, в) уопштене комплексне функције мреже подељене Лапласовом променљивом?

(6) Шта је импулсни одзив (Гринова функција, јединични импулсни одзив)? Описати поступак за одређивање импулсног одзива. Који је домен импулсног одзива, односно на ком интервалу времена је дефинисан?

Погледати предавање.

(5) Одредити Лапласову трансформацију побуде са слике.

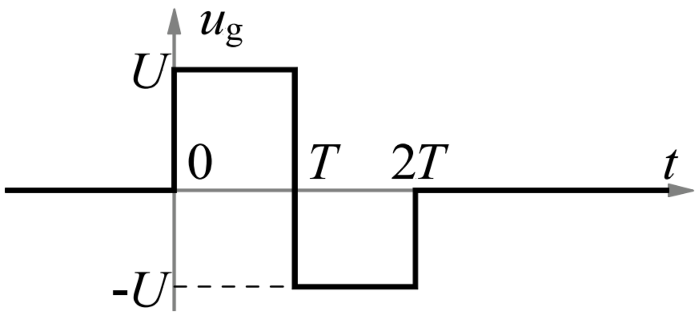


$$U\frac{1-e^{-\underline{s}T}}{\underline{s}^2 T}$$

(6) Како гласи одскочни одзив (индициона функција, step response, јединични одскочни одзив) идеалног интегратора трансфер функције $\underline{H}(\underline{s})=\dfrac{A}{\underline{s}}$, $A=\text{const}$, $A>0$? Који је његов домен (област дефинисаности)?

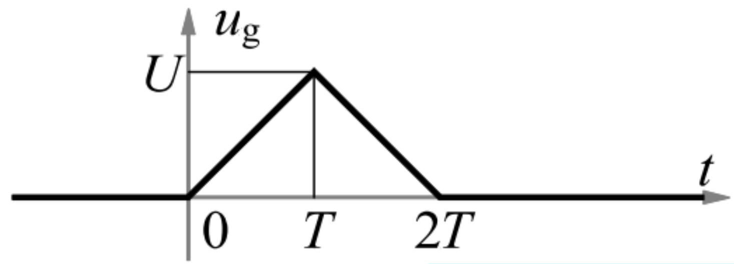
$$f(t)=At\vartheta(t)\,,\ -\infty<t<\infty$$

(5) Одредити Лапласову трансформацију побуде са слике.



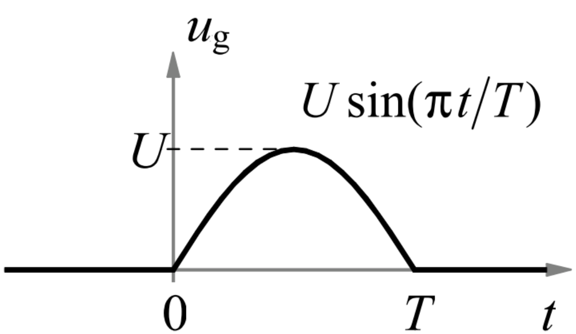
$$\frac{U}{s}\left(1-\mathrm{e}^{-sT}\right)-\frac{U}{s}\left(1-\mathrm{e}^{-sT}\right)\mathrm{e}^{-sT}$$

(6) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике?



$$\underline{U}_g(\underline{s})=\frac{U}{\underline{s}^2T}\left(1-2\mathrm{e}^{-\underline{s}T}+\mathrm{e}^{-2\underline{s}T}\right)$$
$$=\frac{U}{\underline{s}^2T}\left(1-\mathrm{e}^{-\underline{s}T}\right)^2$$

(5) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике?



$$\pi TU\,\frac{1+\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}{\underline{s}^2T^2+\pi^2}$$

(5) У ком тренутку времена задајемо природне почетне услове када коло решавамо Лапласовом трансформацијом?

Погледати предавање.

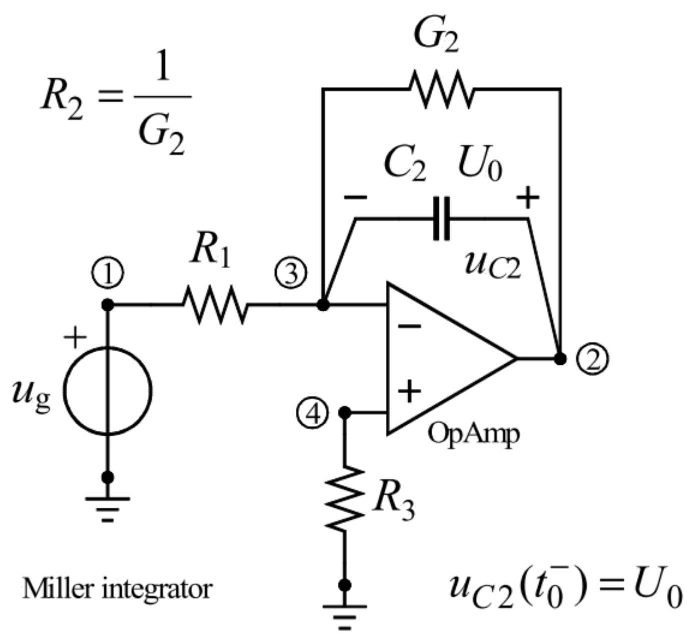
(4) Шта су природни почетни услови електричног кола? Они се задају у тренутку времена	(а) $t = +\infty$
	(б) $t = t_0^-$, t -нула-минус, t_0 коначно
	(в) $t = t_0^+$, t -нула-плус, t_0 коначно

(6) Колики је импулсни одзив идеалног интегратора, за напон v_2, када је $G_2 = 0$, и који је његов домен?

Одговор:

Импулсни одзив је $\boxed{g(t) = \dfrac{-1}{R_1 C_2}\vartheta(t)}$

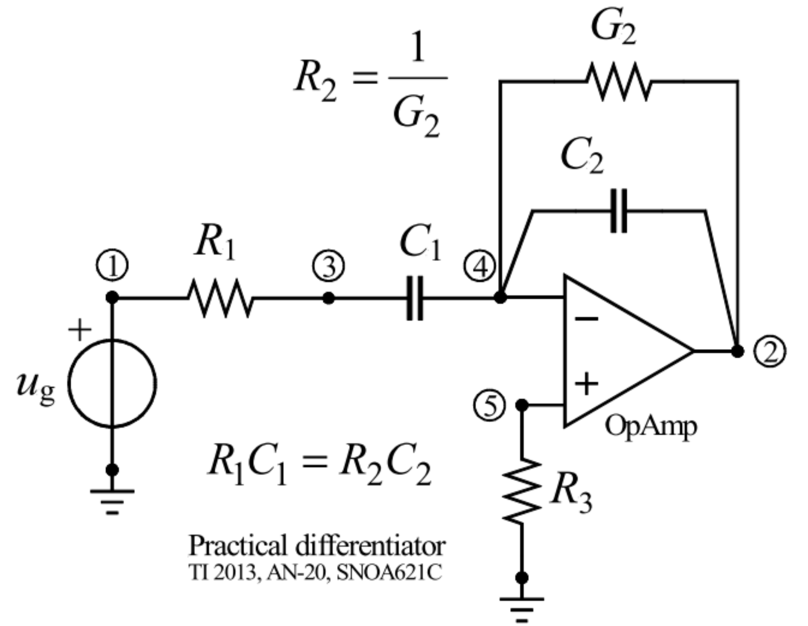
Домен је $\boxed{-\infty < t < \infty}$



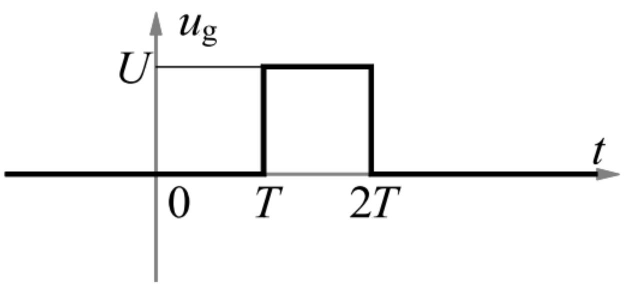
(7) Колики је одскочни одзив идеалног диференцијатора, за напон v_2, када је $R_1 = 0$, $C_2 = 0$ и који је његов домен?

Одговор: $f(t) = -C_1 R_2\, \delta(t)$

$-\infty < t < \infty$



(5) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике?



$$U\frac{1}{\underline{s}}e^{-\underline{s}T} - U\frac{1}{\underline{s}}e^{-\underline{s}2T} = U\frac{1-e^{-\underline{s}T}}{\underline{s}}e^{-\underline{s}T}$$

(5) Комплексан напон у области Лапласове трансформације је

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{a}{\underline{s}^2 + b\underline{s} + c}, \ (a>0,\ b>0,\ c>0)$$

Колико је $u(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} u(t)$?

$$u(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$$

(7) Колики је одскочни одзив идеалног интегратора, за излазни напон v_2, када је $G_2 = 0$, и који је његов домен?

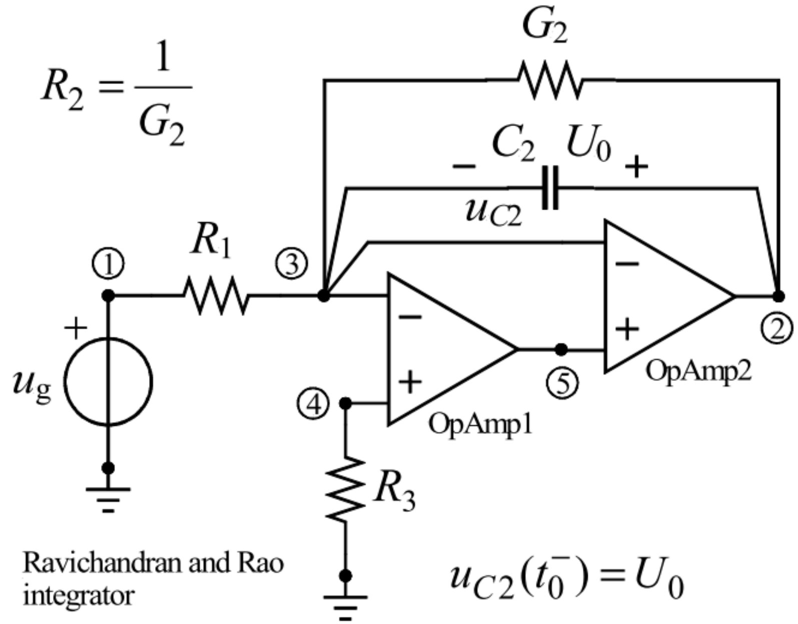
Одговор:

Одскочни одзив је

$$f(t) = \frac{-1}{R_1 C_2} t\,\vartheta(t)$$

Домен је

$$-\infty < t < \infty$$



(6) Трансфер функција електричног филтра је $\underline{H}(\underline{s}) = k\dfrac{a\underline{s}}{\underline{s}^2 + ab\underline{s} + a^2}$, $a > 0$, $0 < b < 1$, $k \neq 0$.

Како гласи одговарајући одскочни одзив (индициона функција) и његов домен (област дефинисаности) по времену?

$$f(t) = \frac{2k}{\sqrt{4-b^2}} \exp\left(\frac{-ab}{2}t\right) \sin\left(\frac{a\sqrt{4-b^2}}{2}t\right) \vartheta(t)$$

$$-\infty < t < \infty$$

(5) Комплексан напон приступа линеарног електричног кола, у области Лапласове трансформације, је

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{A}{\underline{s}} \mathrm{e}^{-\underline{s}T}\,;\; A,T = \mathrm{const}\,;\;\; A,T > 0\,.$$

Која је тренутна вредност овог напона?

$$u(t) = A\,\vartheta(t-T)$$

(5) Комплексан напон приступа линеарног електричног кола, у области Лапласове трансформације, је

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{b}{\underline{s}^2 + a^2} \mathrm{e}^{-\underline{s}T}\,;\;\; a,b,T = \mathrm{const}\,;$$

$$a,b,T > 0\,.$$

Која је тренутна вредност овог напона?

$$u(t) = \frac{b}{a}\sin(a(t-T))\,\vartheta(t-T)$$

(5) Комплексан напон приступа линеарног електричног кола, у области Лапласове трансформације, је

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{b\underline{s}}{\underline{s}^2 + a^2} \mathrm{e}^{-\underline{s}T}\,;\;\; a,b,T = \mathrm{const}\,;$$

$$a,b,T > 0\,.$$

Која је тренутна вредност овог напона?

$$u(t) = b\cos(a(t-T))\,\vartheta(t-T)$$

(5) Како гласи одскочни одзив (индициона функција, step response, јединични одскочни одзив) идеалног диференцијатора трансфер функције $\underline{H}(\underline{s}) = K\underline{s}$, $K = \mathrm{const}$, $K > 0$? Који је његов домен (област дефинисаности)?

$$f(t) = K\,\delta(t)\,,\; -\infty < t < \infty$$

Задаци (1)

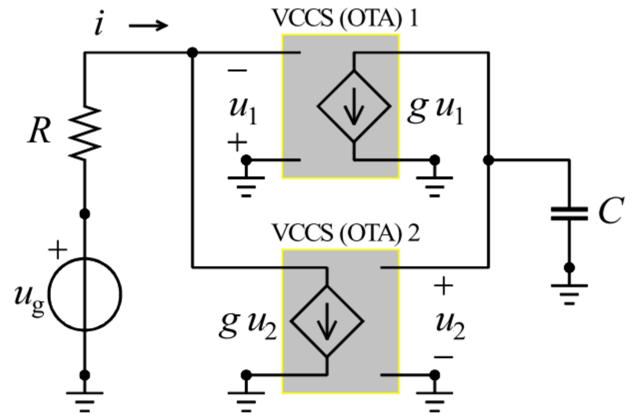
Задатак 1

Електрично коло са OTA (Operational Transconductance Amplifier) жиратором има познате вредности елемената и $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$.

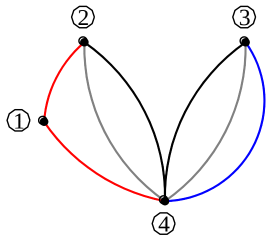
(3) Нацртати граф кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека и број главних петљи (фундаменталних контура).

(7) Одредити напон кондензатора и његов домен (област дефинисаности).

(5) Одредити граничну вредност струје отпорника после бесконачно дугог времена ($t \to +\infty$).



Граф кола је



Број главних пресека је 3 а петљи 4

Напон кондензатора је

$$\boxed{u_2(t) = \frac{1}{gR} U \left(1 - e^{-g^2 Rt/C} \right) \vartheta(t)} \quad \boxed{-\infty < t < \infty}$$

Гранична вредност струје отпорника је

$$\boxed{i(+\infty) = \frac{U}{R}}$$

Задаци (2)

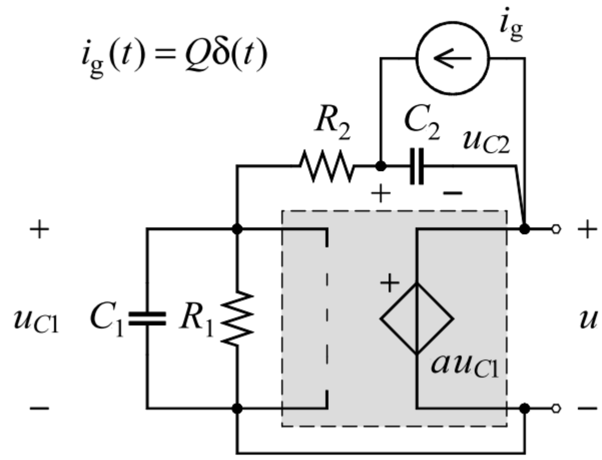
Задатак 2

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) нема почетну енергију и $a = 3$, $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$, $i_g = Q\delta(t)$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(7) Одредити напон u и његов домен.

(3) Нацртати график u у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Једначине стања у матричном облику су

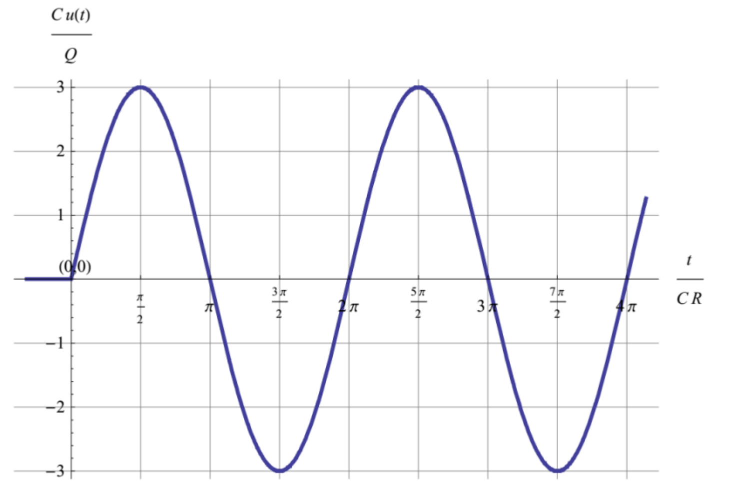
$$\begin{pmatrix} u_{C1}'(t) \\ u_{C2}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{CR} & \frac{1}{CR} \\ -\frac{2}{CR} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i_g}{C} \end{pmatrix}$$

Ред кола је 2

Напон u и његов домен су

$$u(t) = \frac{3\,Q\sin\left(\frac{t}{CR}\right)}{C}\vartheta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

График напона u је



Задаци (3)

Задатак 1

Електроенергетски трансформатор је у колу познатих параметара, $R_1 = R$, $R_2 = 2R$,

$L_1 = L$, $L_2 = 4L$, $k = \frac{1}{2}$, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$,

$i_1(t_0^-) = I_{01}$, $t_0 = 0$.

(6) Одредити струју секундара i_2 и њен домен.

(6) Одредити напон отворене везе u и његов домен.

(3) Нацртати график напона u.

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Струја секундара i_2 и њен домен су

$\boxed{i_2(t) = 0}$ $\boxed{t \geq 0}$

Напон отворене везе u и његов домен су

$$\boxed{u(t) = -R\, I_{01}\, e^{-R\,t/L} + U\, e^{-R\,t/L}\,\vartheta(t)} \quad \boxed{t \geq 0}$$

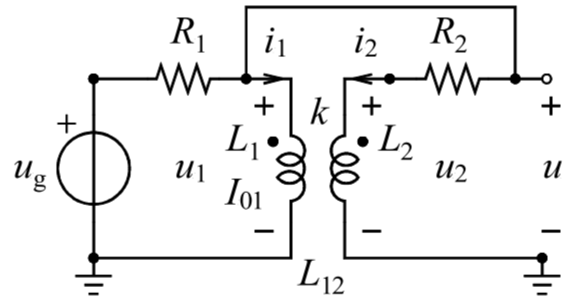
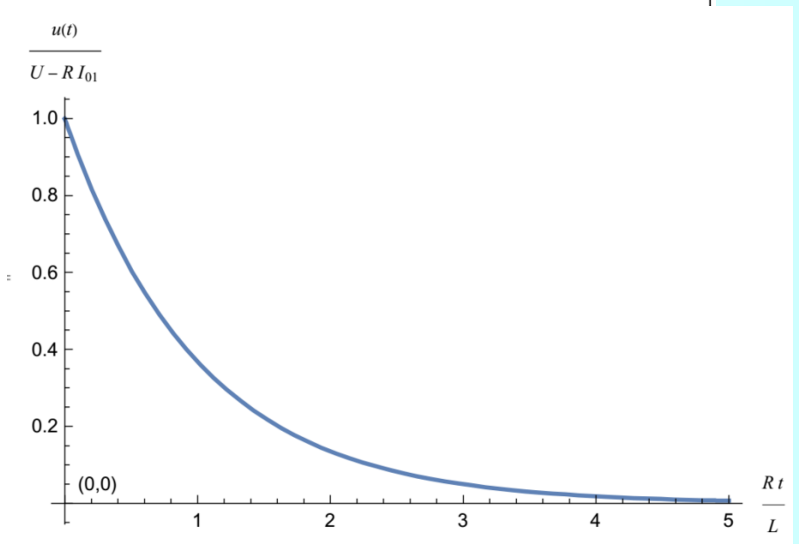


График напона u је



Задаци (4а)

Задатак 1

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) је приказан на слици и

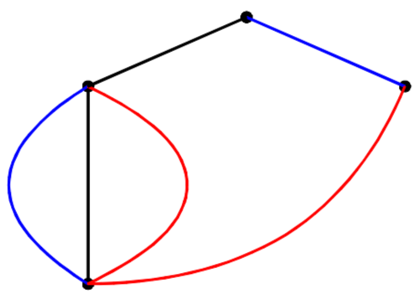
$R_1 = R_2 = R$, $a = 3$, $C_1 = C_2 = C$, $t_0 = 0$.

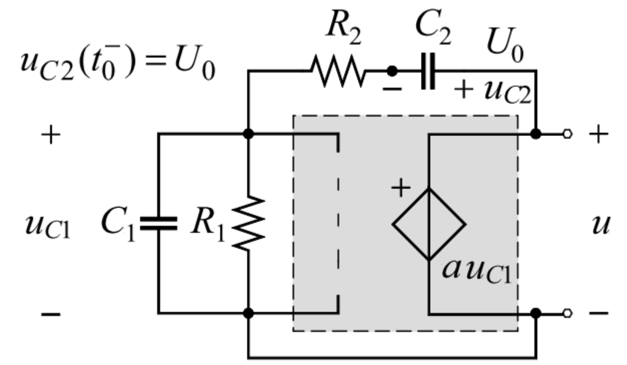
(4) Нацртати граф овог електричног кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека и главних петљи (фундаменталних контура).

(7) Одредити напон u за $t > t_0$.

(4) Нацртати график u у функцији времена за $t > t_0$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Граф електричног кола је





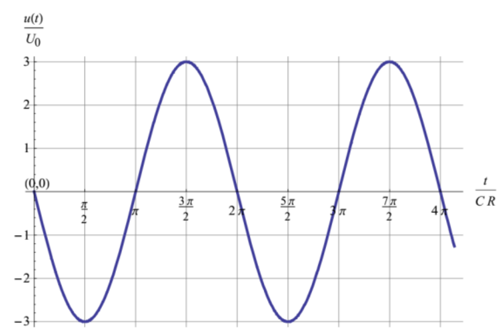
Главних пресека има , а петљи .

3 главна пресека, 3 главне петље.

Напон u за $t > t_0$ је

$$u(t) = -3U_0 \sin\left(\frac{t}{CR}\right)$$

График u у функцији времена за $t > t_0$ је



Задаци (4б)

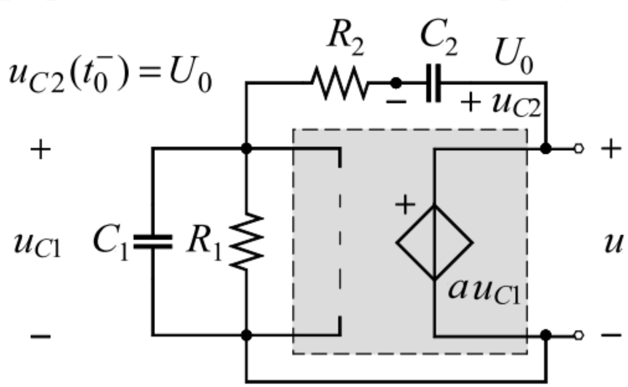
Задатак 1

Поједностављена шема осцилатора са Виновим мостом је приказана на слици и $R_1 = R_2 = R$, $a = 3$, $C_1 = C_2 = C$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(5) Одредити напон u за $t > t_0$.

(5) Нацртати график u у функцији времена за $t > t_0$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Једначине стања у матричном облику и ред су

Напон u за $t > t_0$ је

График u у функцији времена за $t > t_0$ је

Задаци (5)

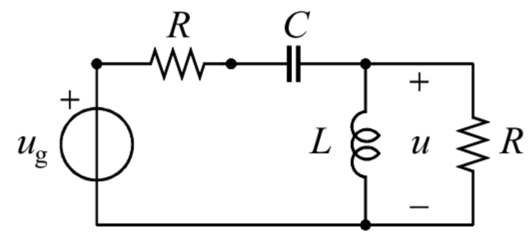
Задатак 1

LC-реализација филтра (Butterworth maximally flat highpass approximation) има познате параметре и $L=\dfrac{R}{\sqrt{2}\,\Omega}$, $C=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,R\Omega}$, $\Omega>0$. Одредити

(6) импулсни одзив (Гринову функцију) за излазни напон $u(t)$ и његов домен,

(6) одскочни одзив (индициону функцију) за излазни напон $u(t)$ и његов домен.

(3) Нацртати график одскочног одзива. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Импулсни одзив и његов домен су

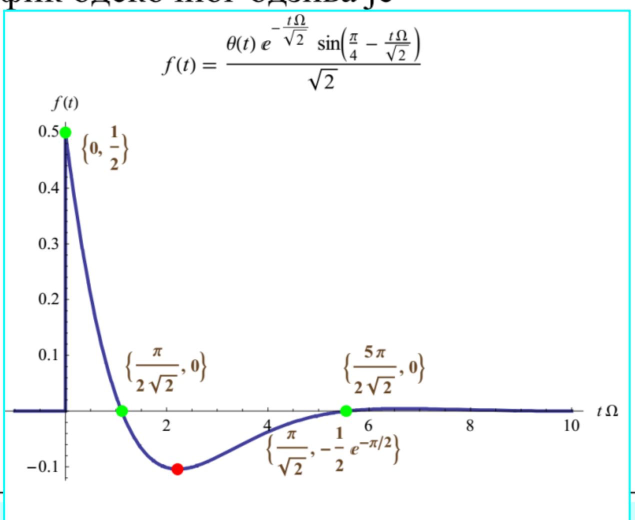
$$g(t)=\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{\Omega}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{-t\Omega}{\sqrt{2}}}\cos\!\left(\frac{t\Omega}{\sqrt{2}}\right)\vartheta(t)$$

$$-\infty<t<+\infty$$

Одскочни одзив и његов домен су

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{-t\Omega}{\sqrt{2}}}\sin\!\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t\Omega}{\sqrt{2}}\right)\vartheta(t)\,,\ -\infty<t<+\infty$$

График одскочног одзива је



Задаци (6)

Задатак 2

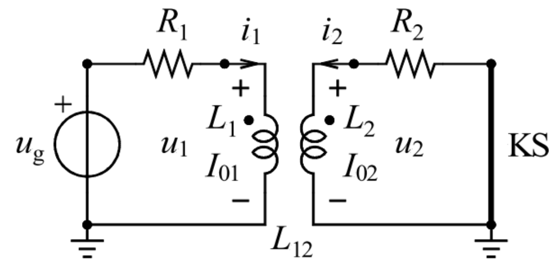
Електроенергетски трансформатор је идеализовано представљен линеарним индуктивним трансформатором $L_1 = L$, $L_2 = L$, $k = \frac{1}{2}$ и отпорностима губитака у намотајима $R_1 = R$, $R_2 = R$. Секундар је краткоспојен а примар је побуђен напонским извором импулсног напона $u_g(t) = \Phi\,\delta(t)$. Почетне струје примара и секундара су $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $i_2(t_0^-) = 0$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити ред овог електричног кола и једначине стања у матричном облику.

(5) Одредити струју примара i_1 и њен домен.

(5) Одредити струју секундара i_2 и њен домен.

Ред кола је **2** (два)



Једначине стања у матричном облику су

$$\mathrm{D}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4R}{3L} & \frac{2R}{3L} \\ \frac{2R}{3L} & \frac{-4R}{3L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3L}u_g \\ \frac{-2}{3L}u_g \end{bmatrix}$$

Струја примара i_1 и њен домен су

$$i_1(t) = \frac{I_{01}}{2}\left(e^{\frac{-2Rt}{3L}} + e^{\frac{-2Rt}{L}}\right) + \frac{\Phi}{L}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{-2Rt}{3L}} + e^{\frac{-2Rt}{L}}\right)\vartheta(t), \quad t \geq t_0$$

Струја секундара i_2 и њен домен су

$$i_2(t) = +\frac{I_{01}}{2}\left(e^{\frac{-2Rt}{3L}} - e^{\frac{-2Rt}{L}}\right) + \frac{\Phi}{L}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{-2Rt}{3L}} - e^{\frac{-2Rt}{L}}\right)\vartheta(t), \quad t \geq t_0$$

Задаци (7)

Задатак 2

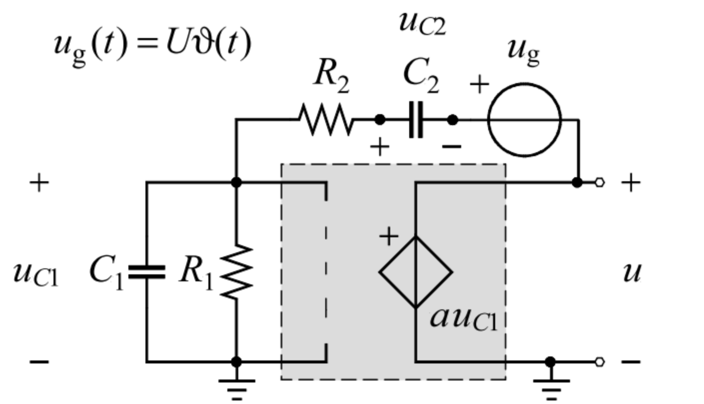
Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) нема почетну енергију и $a=3$, $R_1=R_2=R$, $C_1=C_2=C$, $u_g=U\vartheta(t)$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(7) Одредити напон u и његов домен.

(3) Нацртати график u у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

$u_g(t)=U\vartheta(t)$



Једначине стања у матричном облику су

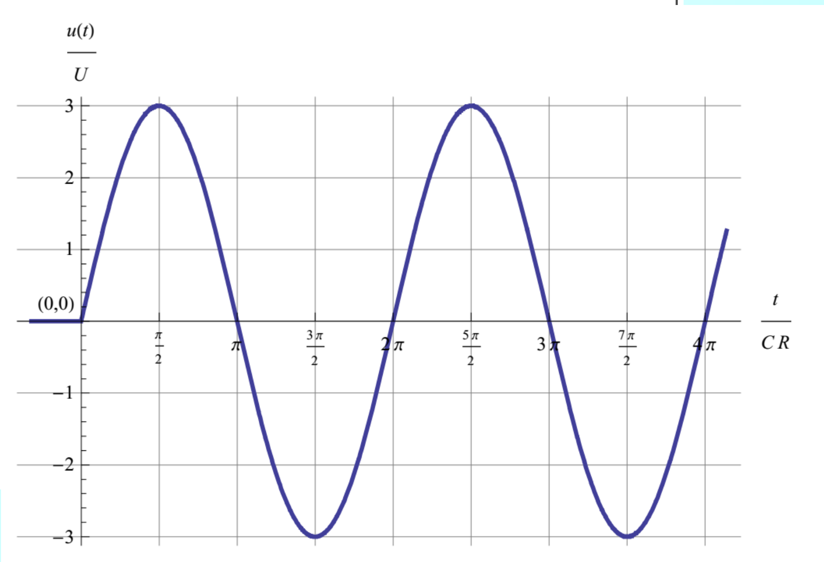
$$\begin{pmatrix} u_{C1}'(t) \\ u_{C2}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{CR} & \frac{1}{CR} \\ -\frac{2}{CR} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u_g}{CR} \\ -\frac{u_g}{CR} \end{pmatrix}$$

Ред кола је 2

Напон u и његов домен су

$$u(t) = 3\,U_m \sin\!\left(\frac{t}{CR}\right)\vartheta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

График напона u је



Задаци (8)

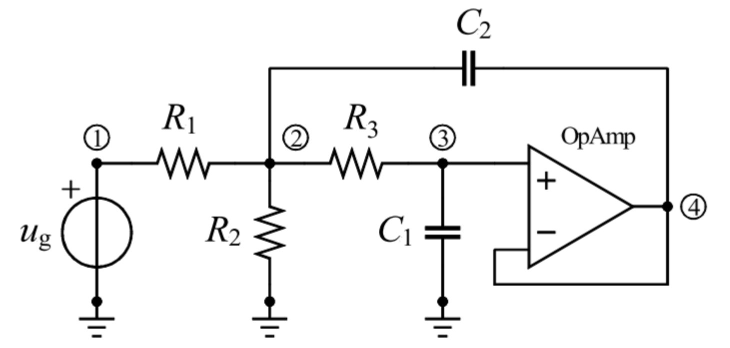
Задатак 1

Sallen & Key LP-LQ реализација активног филтра има познате параметре и $R_1 = 2R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = R$, $C_2 = \frac{\sqrt{2}}{R\Omega}$, $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,R\Omega}$, $\Omega > 0$. Одредити

(5) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{V}_4(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) амплитудски одзив $A(\omega)$, пропусни опсег 3 dB, његову ширину и горњу и доњу граничну учестаност.

(5) Нацртати амплитудску карактеристику у опсегу $0 \le \omega \le 7\Omega$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Трансфер функција је $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\Omega^2}{2(\underline{s}^2 + \sqrt{2}\Omega\underline{s} + \Omega^2)}$

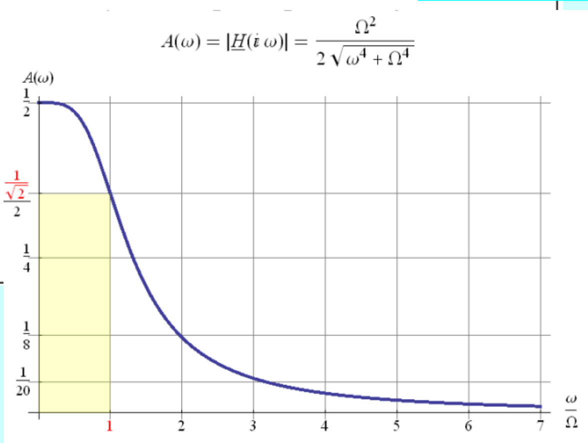
Нуле и полови су $\underline{s}_{\mathrm{z}} \in \{\}$, $\underline{s}_{\mathrm{p}} \in \left\{ \frac{-1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\Omega, \frac{-1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\Omega \right\}$

Амплитудски одзив је $A(\omega) = \frac{\Omega^2}{2\sqrt{\omega^4 + \Omega^4}}$

Пропусни опсег 3 dB је $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \Omega$

$B_{\omega 3\mathrm{dB}} = \omega_2 - \omega_1 = \Omega$

Амплитудска карактеристика је



Задаци (9)

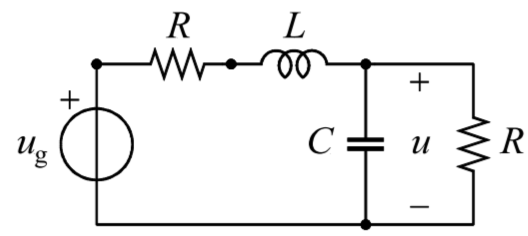
Задатак 1

LC-реализација филтра (Butterworth maximally flat lowpass approximation) има познате параметре и $L=\sqrt{2}\,\dfrac{R}{\Omega}$, $C=\sqrt{2}\,\dfrac{1}{R\Omega}$, $\Omega>0$. Одредити

(5) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s})=\dfrac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) амплитудски одзив $A(\omega)$, пропусни опсег 3 dB, његову ширину и горњу и доњу граничну учестаност.

(5) Нацртати амплитудску карактеристику за $0\le\omega\le 7\Omega$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Трансфер функција је $\boxed{\underline{H}(\underline{s})=\dfrac{\Omega^2}{2(\underline{s}^2+\sqrt{2}\Omega\underline{s}+\Omega^2)}}$

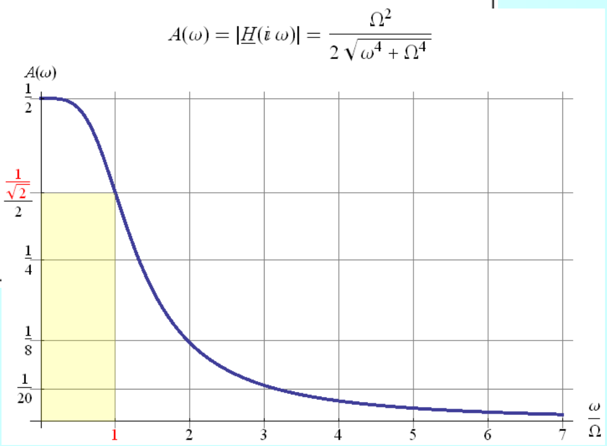
Нуле и полови су $\boxed{\underline{s}_{\mathrm{z}}\in\{\}}$ $\boxed{\underline{s}_{\mathrm{p}}\in\left\{\dfrac{-1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\Omega,\ \dfrac{-1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\Omega\right\}}$

Амплитудски одзив је $\boxed{A(\omega)=\dfrac{\Omega^2}{2\sqrt{\omega^4+\Omega^4}}}$

Пропусни опсег 3 dB је $\boxed{\omega_1=0}$ $\boxed{\omega_2=\Omega}$

$\boxed{B_{\omega 3\mathrm{dB}}=\omega_2-\omega_1=\Omega}$

Амплитудска карактеристика је



Задаци (10)

Задатак 1

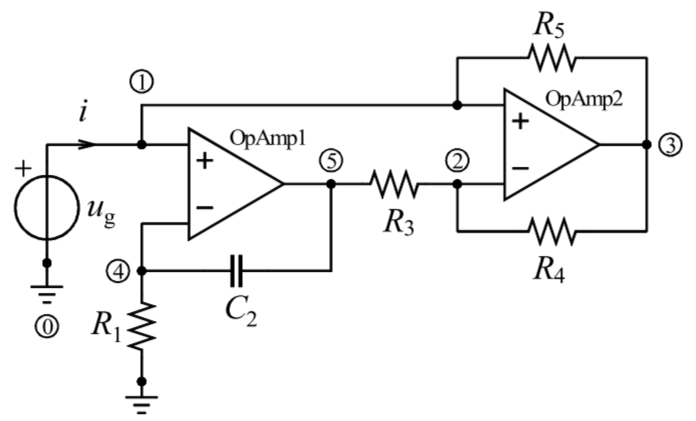
Синтетички калем (synthetic inductor, simulated inductor) са Риордановим жиратором, за практичну реализацију чисто индуктивног елемента без намотаја проводне жице (на пример, у мерној опреми за експерименталан лабораторијски рад), има познате параметре. Одредити

(7) једначину одзива за улазну струју i

(3) уопштену комплексну функцију кола

$$\underline{Z}(\underline{s})=\frac{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}{\underline{I}(\underline{s})}$$

(5) напон кондензатора $u_{54}(t)$ и његов домен ако је побуда $u_{\mathrm{g}}(t)=U\,\vartheta(t)$.



Једначина одзива за струју i је

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{R_4}{C_2R_1R_3R_5}u_{\mathrm{g}}(t)$$

Уопштена комплексна функција кола је

$$\underline{Z}(\underline{s})=\frac{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}{\underline{I}(\underline{s})}=C_2\frac{R_1R_3R_5}{R_4}\underline{s}=L\,\underline{s}$$

Напон кондензатора u_{54} и његов домен су

$$u_{54}(t)=\frac{U}{C_2R_1}t\,\vartheta(t)\,,\ -\infty<t<\infty$$

Задаци (11)

Задатак 1

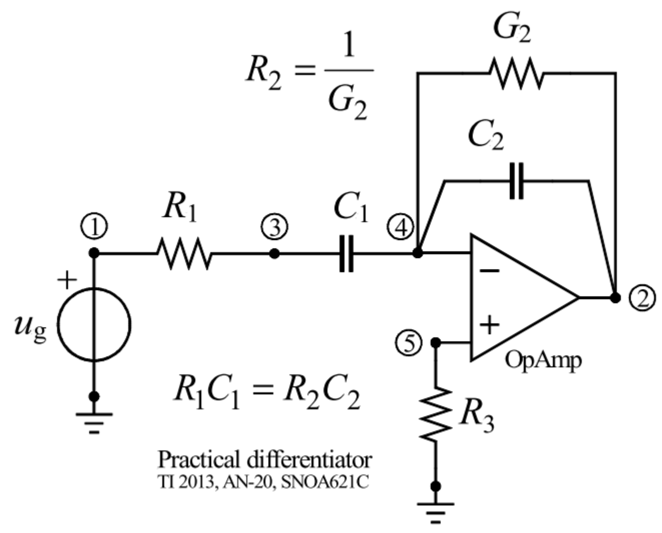
Аналогни електронски диференцијатор за практичну имплементацију има познате параметре R_1, C_1, C_2, G_2, $R_2 = 1/G_2$, $R_1C_1 = R_2C_2 = T$, R_3, и $u_g(t) = U\vartheta(t)$.

Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_2(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) излазни напон $v_2(t)$ и његов домен,

(4) одскочни одзив идеалног диференцијатора, када је $R_1 = 0$, $C_2 = 0$, и његов домен.



Трансфер функција је $$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{-C_1 T \underline{s}}{C_2(1+T\underline{s})^2}$$

Нуле и полови су $\underline{s}_z \in \{0\}$; $\underline{s}_p \in \left\{\dfrac{-1}{T}, \dfrac{-1}{T}\right\}$ двоструки пол

Напон $v_2(t)$ и његов домен су

$$v_2(t) = \frac{-C_1}{C_2}\frac{t}{T}U\,e^{\frac{-t}{T}}\vartheta(t), \quad -\infty < t < \infty$$

Одскочни одзив идеалног диференцијатора и његов домен су $$f(t) = -C_1R_2\,\delta(t), \quad -\infty < t < \infty$$

Задаци (12)

Задатак 1

KHN-реализација филтра (Kerwin-Huelsman-Newcomb, state-variable biquad, UAF42) има познате параметре и $R_1 = R$, $R_2 = 2R$,

$R_4 = R$, $R_3 = R_5 = R_7 = R$, $C_6 = C_8 = \dfrac{1}{R\Omega}$.

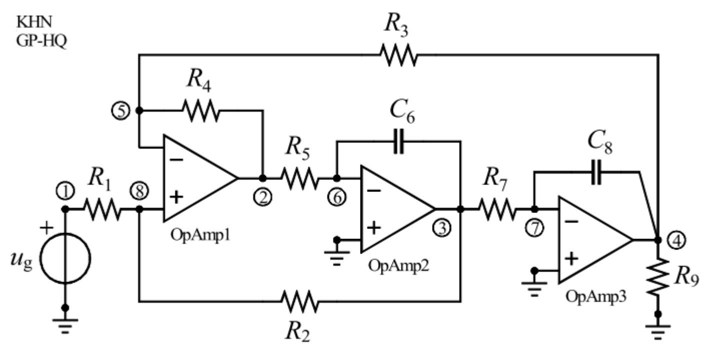
Познати су реални параметри $R, \Omega > 0$.

Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_3(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове, амплитудски одзив $A(\omega)$,

(5) пропусни опсег 3 dB, његову ширину, и горњу и доњу граничну учестаност.

(4) Нацртати амплитудску карактеристику. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



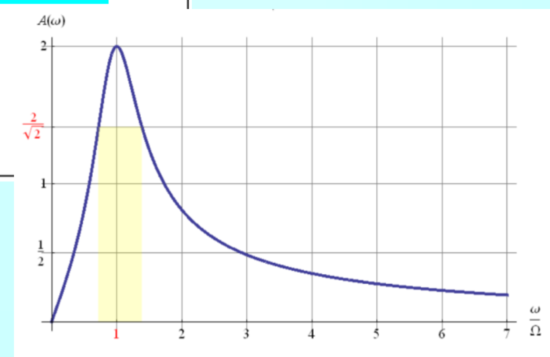
Трансфер функција је
$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{-4\Omega\underline{s}}{3\underline{s}^2 + 2\Omega\underline{s} + 3\Omega^2}$$

Нуле и полови су
$$\underline{s}_z \in \{0\},$$
$$\underline{s}_p \in \left\{\frac{-1 - j2\sqrt{2}}{3}\Omega, \frac{-1 + j2\sqrt{2}}{3}\Omega\right\}$$

Амплитудски одзив је
$$A(\omega) = \frac{4\Omega|\omega|}{\sqrt{9\omega^4 - 14\Omega^2\omega^2 + 9\Omega^4}}$$

Пропусни опсег 3 dB је
$$\omega_1 = \frac{\sqrt{10} - 1}{3}\Omega \qquad \omega_2 = \frac{\sqrt{10} + 1}{3}\Omega \qquad B_{\omega 3\mathrm{dB}} = \frac{2}{3}\Omega$$

Амплитудска карактеристика је



Задаци (13)

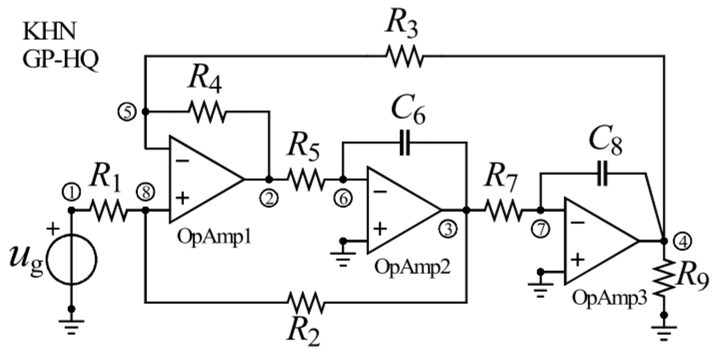
Задатак 1

KHN-реализација филтра (Kerwin-Huelsman-Newcomb, state-variable biquad, UAF42) има познате параметре и $R_1 = R$, $R_2 = R_4 = \frac{1}{2}R$, $R_3 = R_5 = R_7 = R$, $C_6 = C_8 = \frac{1}{\sqrt{2}R\Omega}$. Познати су реални параметри $R, \Omega > 0$. Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{V}_4(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) амплитудски одзив $A(\omega)$, пропусни опсег 3 dB, његову ширину, и горњу и доњу граничну учестаност.

(4) Нацртати амплитудску карактеристику. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Трансфер функција је

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\Omega^2}{\underline{s}^2 + \sqrt{2}\Omega\underline{s} + \Omega^2}$$

Нуле и полови су

$\underline{s}_z \in \{\}$, нема нула,

$$\underline{s}_p \in \left\{ \frac{-1-j}{\sqrt{2}}\Omega, \frac{-1+j}{\sqrt{2}}\Omega \right\}$$

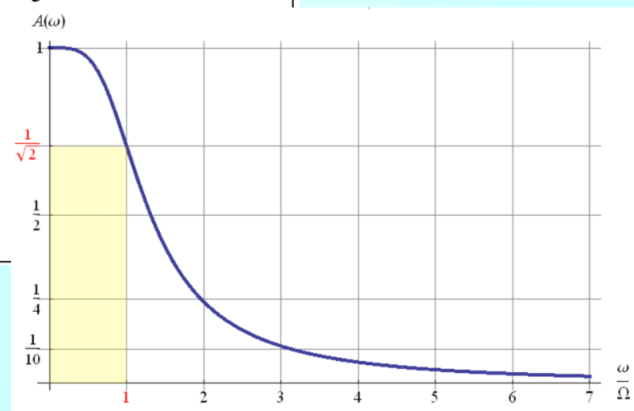
Амплитудски одзив је

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^4 + 1}} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \Omega^4}}$$

Пропусни опсег 3 dB је

$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = \Omega$ $B_{\omega 3\mathrm{dB}} = \omega_2 - \omega_1 = \Omega$

Амплитудска карактеристика је



Задаци (14)

Задатак 1

ТТ реализација филтра (Tow-Thomas, state-variable biquad, MAX274) има познате параметре и $R_1 = \frac{3}{2}R$, $R_2 = R_3 = R$,

$R_4 = \frac{3}{4}R$, $R_7 = R_8 = R$, $C_1 = C_2 = \frac{1}{R\Omega}$.

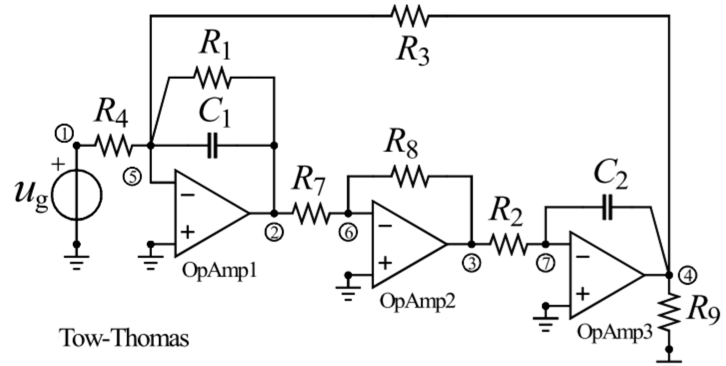
Познати су реални параметри $R, \Omega > 0$.

Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{V}_3(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове, амплитудски одзив $A(\omega)$,

(5) пропусни опсег 3 dB, његову ширину, и горњу и доњу граничну учестаност.

(4) Нацртати амплитудску карактеристику. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



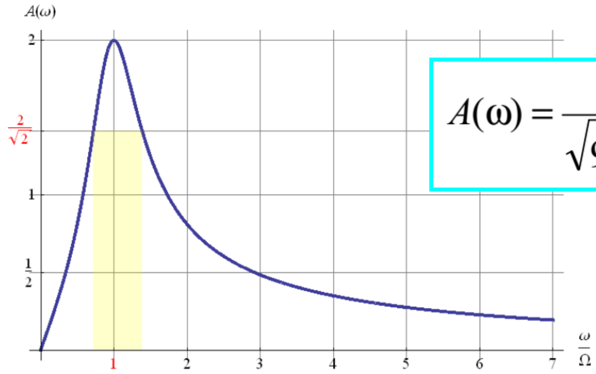
Трансфер функција је $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{4\Omega\underline{s}}{3\underline{s}^2 + 2\Omega\underline{s} + 3\Omega^2}$

Нуле и полови су $\underline{s}_z \in \{0\}$ $\underline{s}_p \in \left\{ \frac{-1-j2\sqrt{2}}{3}\Omega, \frac{-1+j2\sqrt{2}}{3}\Omega \right\}$

Амплитудски одзив је

$\omega_1 = \frac{\sqrt{10}-1}{3}\Omega$ $\omega_2 = \frac{\sqrt{10}+1}{3}\Omega$ $B_{\omega 3\mathrm{dB}} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2}{3}\Omega$

Пропусни опсег 3 dB је



$A(\omega) = \dfrac{4\Omega|\omega|}{\sqrt{9\omega^4 - 14\Omega^2\omega^2 + 9\Omega^4}}$

Задаци (15)

Задатак 1

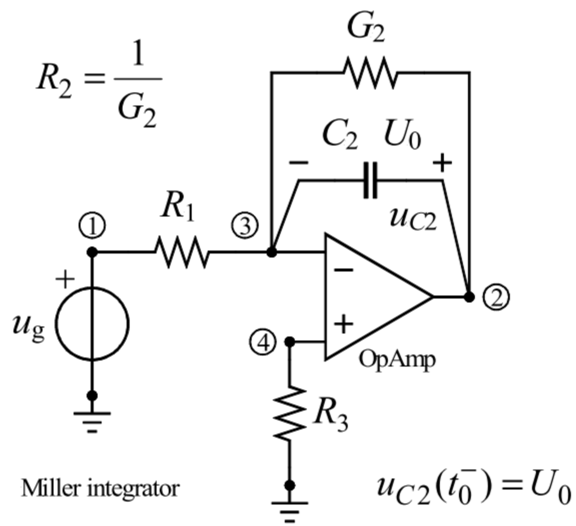
Аналогни електронски интегратор (Miller integrator) има познате параметре R_1, C_2, G_2, $R_2 = 1/G_2$, R_3, и $u_{C2}(t_0^-) = U_0$, $t_0 = 0$, $u_\mathrm{g}(t) = U\vartheta(t)$. Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_2(\underline{s})}{\underline{U}_\mathrm{g}(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) напон $v_2(t)$ и његов домен,

(4) импулсни одзив идеалног интегратора, када је $G_2 = 0$, и његов домен.

$$R_2 = \frac{1}{G_2}$$



Трансфер функција је

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{-1}{R_1(G_2 + C_2\underline{s})}$$

Нуле и полови су

$$\underline{s}_\mathrm{z} \in \{\}, \quad \underline{s}_\mathrm{p} \in \left\{\frac{-G_2}{C_2}\right\}$$

Напон $v_2(t)$ и његов домен су

$$v_2(t) = \frac{-1}{G_2 R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-G_2}{C_2}t}\right)U\vartheta(t) + U_0 \mathrm{e}^{\frac{-G_2}{C_2}t}, \quad t \geq t_0$$

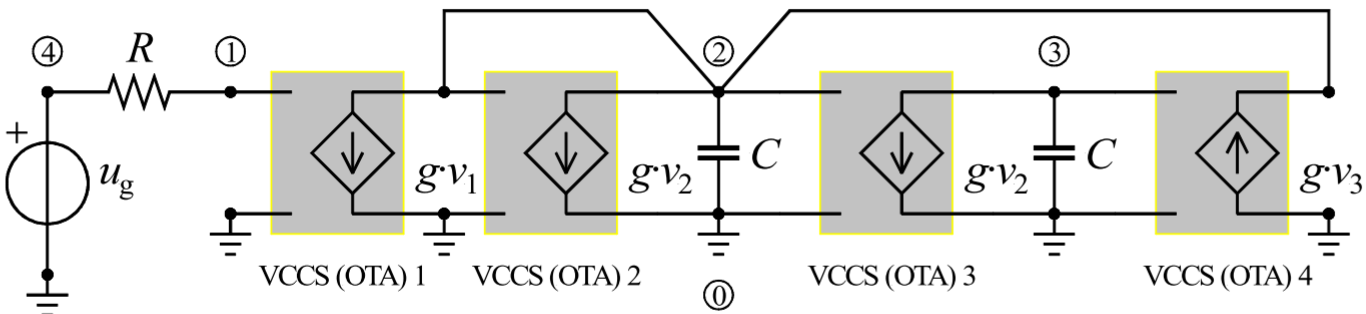
Импулсни одзив идеалног интегратора је

$$g(t) = \frac{-1}{R_1 C_2}\vartheta(t), \quad -\infty < t < \infty$$

Задаци (16)

Задатак 1

OTA-C реализација филтра (Operational Transconductance Amplifier resistorless biquad) има познате параметре. Одредити **(6)** трансфер функцију $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_3(\underline{s})}{\underline{U}_\mathrm{g}(\underline{s})}$, **(4)** њене нуле и полове, **(5)** импулсни одзив и његов домен (област дефинисаности).



Трансфер функција је
$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\Omega^2}{\underline{s}^2 + \Omega \underline{s} + \Omega^2}, \quad \Omega = \frac{g}{C}$$

Нуле и полови су
$$\underline{s}_\mathrm{z} \in \{\}, \quad \underline{s}_\mathrm{p} \in \left\{ \frac{-1 - \mathrm{j}\sqrt{3}}{2}\Omega, \frac{-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}}{2}\Omega \right\}$$

Импулсни одзив и његов домен су
$$g(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \Omega \mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\Omega t} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\Omega t)\, \vartheta(t), \; -\infty < t < \infty$$

Задаци (17)

Задатак 1

Аналогни електронски интегратор (Gordon Deboo non-inverting integrator, Maxim Integrated AN 1155, Howland current source with a capacitive load) има познате параметре и $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, $v_2(t_0^-) = U_0$, $t_0 = 0$, $u_g(t) = U\sin(\omega t)\vartheta(t)$. Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_4(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

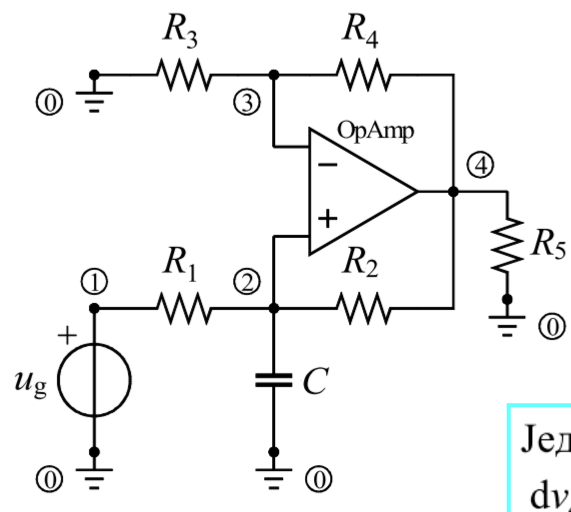
(5) напон $v_4(t)$ и његов домен,

(4) импулсни одзив интегратора и његов домен.

Трансфер функција је

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{2}{CR\,\underline{s}}$$

Нуле и полови су $\underline{s}_z \in \{\}$, $\underline{s}_p \in \{0\}$



Једначина одзива је

$$\frac{\mathrm{d}v_4(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{CR}u_g(t)$$

Напон $v_4(t)$ и његов домен су

$$v_4(t) = 2U_0 + \frac{2U}{CR\omega}(1-\cos(\omega t))\vartheta(t)\,,\ t \ge 0$$

Импулсни одзив интегратора је

$$g(t) = \frac{2}{CR}\vartheta(t)\,,\ t \in \mathrm{R}\,,\ -\infty < t < \infty$$

Задаци (18)

Задатак 1

KHN-реализација филтра (Kerwin-Huelsman-Newcomb, state-variable biquad, UAF42) има познате параметре и $R_1 = R$, $R_2 = \frac{1}{2}R$, $R_4 = 2R$, $R_3 = R_5 = R_7 = R$, $C_6 = C_8 = \frac{\sqrt{2}}{R\Omega}$.

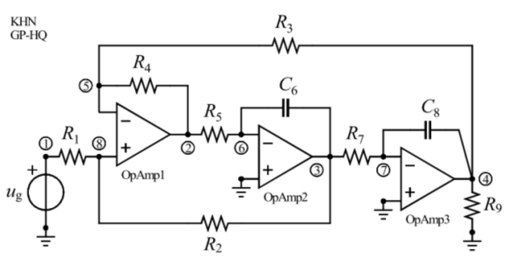
Познати су реални параметри $R, \Omega > 0$.

Одредити

(5) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{V}_2(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) амплитудски одзив $A(\omega)$, пропусни опсег 3 dB, његову ширину и горњу и доњу граничну учестаност.

(5) Нацртати амплитудску карактеристику. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Трансфер функција је

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^2}{\underline{s}^2 + \sqrt{2}\Omega\underline{s} + \Omega^2}$$

Нуле и полови су

$$\underline{s}_z \in \{0, 0\}, \ \underline{s}_p \in \left\{\frac{-1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\Omega, \frac{-1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\Omega\right\}$$

Амплитудски одзив је

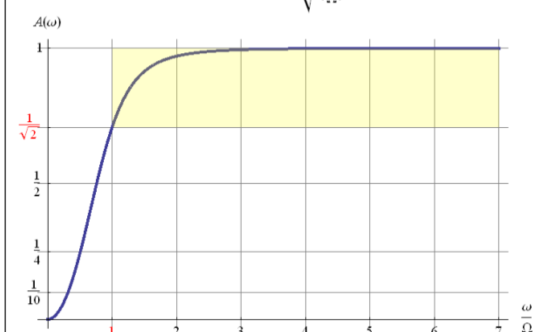
$$A(\omega) == \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \Omega^4}}$$

Пропусни опсег 3 dB је

$$\omega_1 = \Omega, \ \omega_2 = \infty, \ B_{\omega 3\mathrm{dB}} = \infty$$

Амплитудска карактеристика је

$$A(\omega) = |\underline{H}(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{(\frac{\omega}{\Omega})^2}{\sqrt{(\frac{\omega}{\Omega})^4 + 1}}$$



Задаци (19)

Задатак 1

Електрично коло са слике има познате вредности елемената: $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L$. Трансформатор је симетричан са савршеном спрегом. Побуда је $u_\mathrm{g}(t) = U\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{h}(t)$,

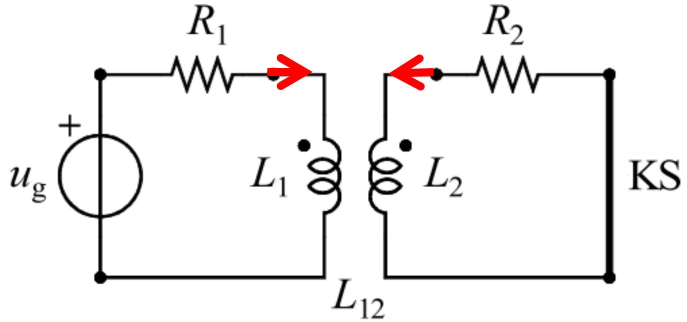
$$a = \frac{R}{2L}.$$

(5) Одредити струју краткоспојника KS.

(5) Одредити ред кола.

(5) Нацртати граф кола.

$$i_2(t) = U\left(\frac{1}{4L}t - \frac{1}{2R}\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}h(t)$$



Задатак 1

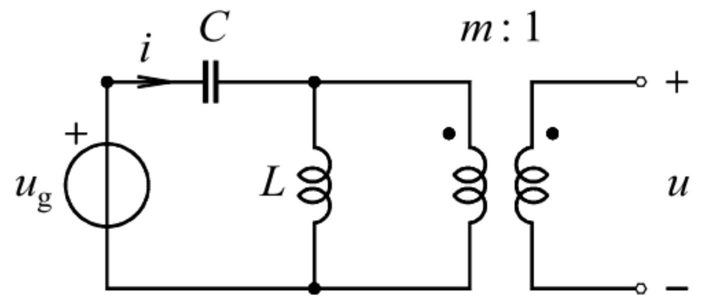
(5) Одредити једначину одзива за напон u електричног кола са слике. Вредности елемената и параметри побуде су познати,

$$u_\mathrm{g}(t) = U_\mathrm{m}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)\mathrm{h}(t).$$

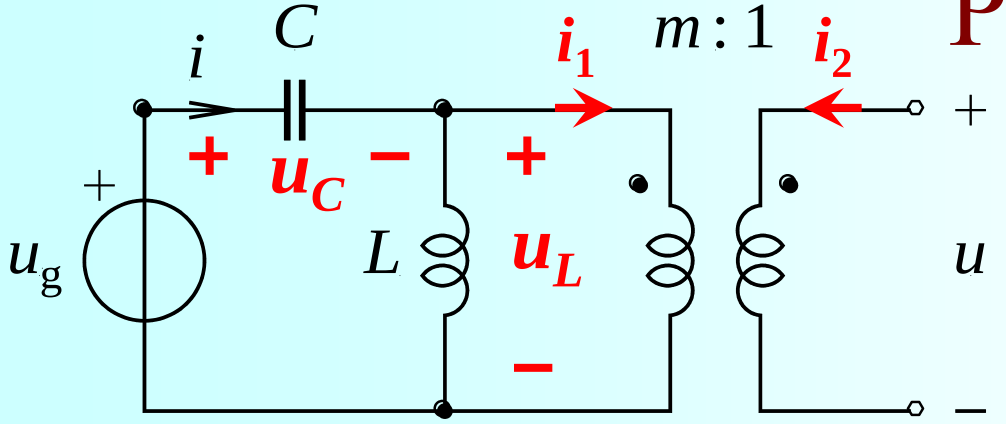
Нема сакупљене енергије.

(5) Одредити струју извора, i, и нацртати график струје извора.

(5) Како гласе једначине стања кола? Написати их у матричном облику.



Решавање кола LT



$$\underline{U}_L = m\underline{U}$$

$$\underline{I}_1 = -\frac{1}{m}\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = 0$$

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = \underline{U}_C(\underline{s}) + \underline{U}_L(\underline{s})$$

$$\underline{I}_C(\underline{s}) = \underline{I}(\underline{s}) = C\left(\underline{s}\,\underline{U}_C(\underline{s}) - \overbrace{\underline{U}_0}^{0}\right) = \underline{s}\,C\underline{U}_C(\underline{s})$$

$$\underline{U}_L(\underline{s}) = L\left(\underline{s}\,\underline{I}_L(\underline{s}) - \overbrace{\underline{I}_0}^{0}\right) = \underline{s}\,L\underline{I}(\underline{s})$$

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = \frac{\underline{I}(\underline{s})}{\underline{s}C} + L\underline{s}\,\underline{I}(\underline{s})$$

$$u_g(t) = U_m \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)\vartheta(t)$$

LT

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = U_m \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\underline{s}^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}) = \frac{\underline{I}(\underline{s})}{\underline{s}C} + L\underline{s}\underline{I}(\underline{s})$$

$$\underline{I}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}C}{LC\underline{s}^2+1}\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})$$

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}) = U_{\mathrm{m}}\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\underline{s}^2+\frac{1}{LC}}$$

$$\underline{I}(\underline{s}) = \frac{U_{\mathrm{m}}}{L}\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\underline{s}^2+\frac{1}{LC}}\frac{\underline{s}}{\underline{s}^2+\frac{1}{LC}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{L\sqrt{LC}}\frac{\underline{s}}{\left(\underline{s}^2+\frac{1}{LC}\right)^2}$$

Комплексан одзив LT

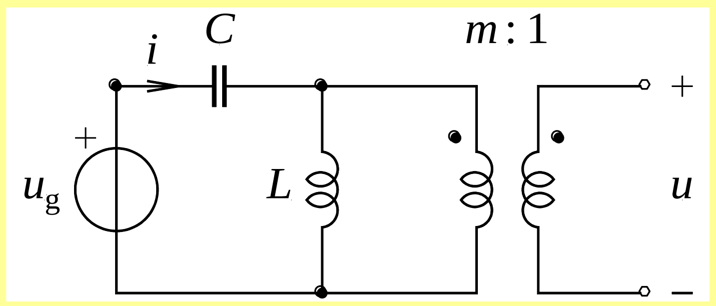
$$\frac{p+q\,s}{(a^2+s^2)^2} \qquad \frac{\left(q\,t\,a^2+p\right)\sin(a\,t)-a\,p\,t\cos(a\,t)}{2\,a^3}$$

Одзив: струја извора

$$i(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{I}(\underline{s})\right) = \frac{U_{\mathrm{m}}}{L\sqrt{LC}}\frac{t\frac{1}{LC}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}{2\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\right)^3}h(t) = \frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}t\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)h(t)$$

Одзив на побуду

$$u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{m}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)\vartheta(t)$$



ugCLT.nb

In[1]:=

```
i[t] ==
 (InverseLaplaceTransform[
     LaplaceTransform[U Sin[t/Sqrt[C L]], t, s] 1/(L s + 1/(C s)),
     s, t] HeavisideTheta[t] //
   FullSimplify[#, C > 0 && L > 0] &) //
 TraditionalForm
```

Out[1]//TraditionalForm=

$$i(t) = \frac{t\,U\,\theta(t)\sin\left(\frac{t}{\sqrt{C\,L}}\right)}{2\,L}$$

Задатак (20)

Задатак 1

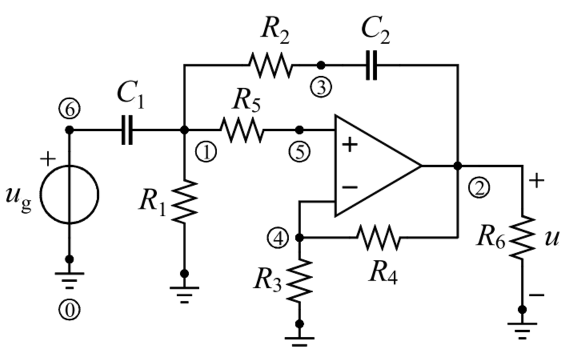
Вредности елемената електричног кола са слике су познате. $R_1 = R$, $R_2 = R$, $R_3 = R$, $R_4 = 2R$, $C_1 = C_2 = C$, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$.

$\vartheta(t)$ је јединична одскочна функција (Хевисајдова функција) која се обележава и са $\mathrm{h}(t)$.

(а) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(б) Одредити напон u за $t > t_0$.

(в) Нацртати график напона u у функцији времена за $t > t_0$.



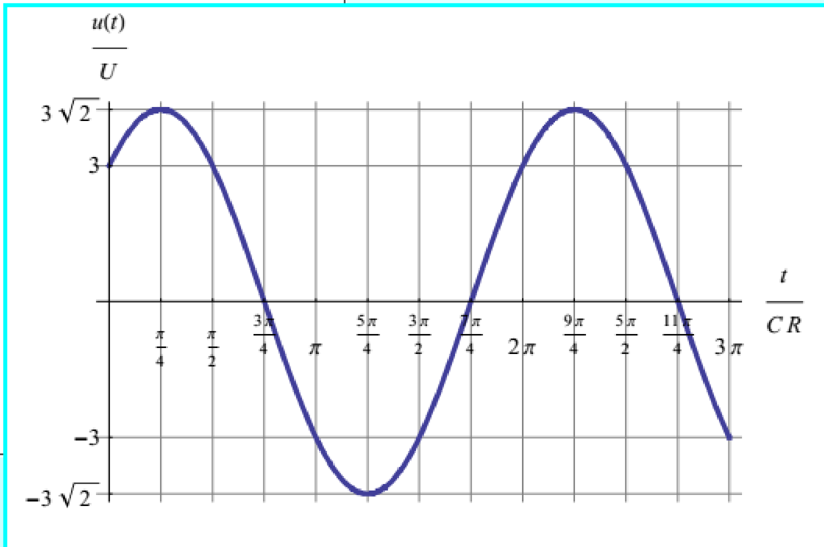
Једначине стања и ред кола су

$$\begin{pmatrix} (u_{\mathrm{C}1})'(t) \\ (u_{\mathrm{C}2})'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{CR} & \frac{1}{CR} \\ -\frac{2}{CR} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathrm{C}1} \\ u_{\mathrm{C}2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u_{\mathrm{g}}}{CR} \\ -\frac{2\,u_{\mathrm{g}}}{CR} \end{pmatrix}$$

Напон је

$$u(t) = 3\,U\left(\sin\left(\frac{t}{CR}\right) + \cos\left(\frac{t}{CR}\right)\right) = 3\sqrt{2}\;U\sin\left(\frac{t}{CR} + \frac{\pi}{4}\right),\quad t > 0$$

График напона је



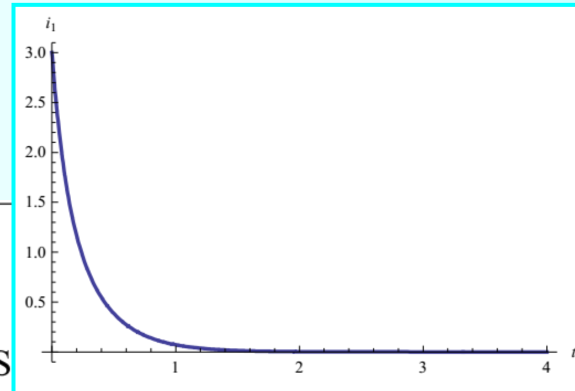
$$(V1 - Ug)\ C1\ s + \frac{V1}{R1} + 0 + \frac{V1 - V2}{R2 + \frac{1}{C2\ s}} == 0,\quad \frac{V1}{R3} + \frac{V1 - V2}{R4} == 0$$

$$V2 \to \frac{3\,C\,R\,(1 + C\,R\,s)\,U}{1 + C^2\,R^2\,s^2}$$

$$u(t) = 3\,U\left(\sin\left(\frac{t}{C\,R}\right) + \cos\left(\frac{t}{C\,R}\right)\right) =$$

$$3\sqrt{2}\,U\sin\left(\frac{t}{C\,R} + \frac{\pi}{4}\right),\quad t > 0$$

Задаци (21)



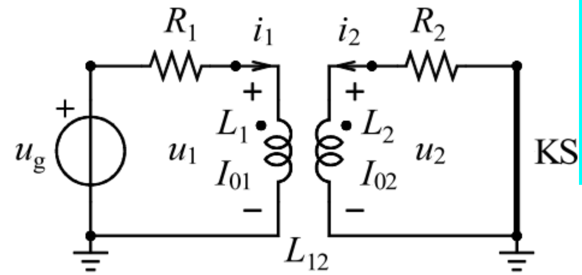
Задатак 2

Електроенергетски трансформатор је идеализовано представљен линеарним индуктивним трансформатором $L_1 = L$, $L_2 = L$, $k = \frac{1}{2}$ и отпорностима губитака у намотајима $R_1 = R$, $R_2 = R$. Секундар је краткоспојен а примар је побуђен напонским извором импулсног напона $u_g(t) = \Phi\,\delta(t)$. Почетне струје примара и секундара су $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $i_2(t_0^-) = I_{02}$, $t_0 = 0$.

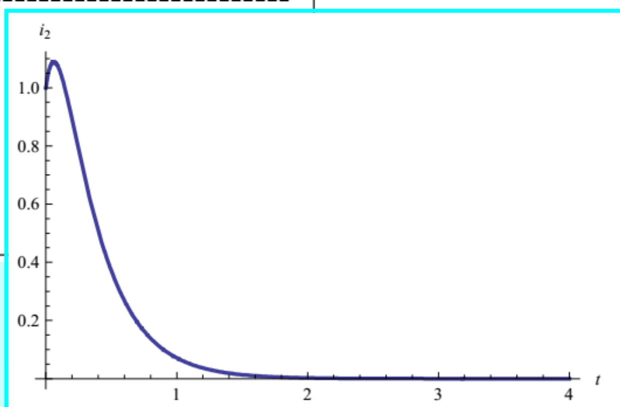
(5) Одредити ред овог електричног кола.

(5) Одредити струју примара i_1.

(5) Одредити струју секундара i_2.



Ред кола је **2**



Струја примара i_1 је

$$\boxed{i_1(t) = e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(\frac{I_{01}}{2} - \frac{I_{02}}{2} + \frac{\Phi}{L}\right) + e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(\frac{I_{01}}{2} + \frac{I_{02}}{2} + \frac{\Phi}{3L}\right),\quad t > 0}$$

Струја секундара i_2 је

$$\boxed{i_2(t) = \frac{e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(-3\,L\,I_{01} + 3\,L\,I_{02} - 6\,\Phi\right)}{6\,L} + \frac{e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(3\,L\,I_{01} + 3\,L\,I_{02} + 2\,\Phi\right)}{6\,L},\quad t > 0}$$

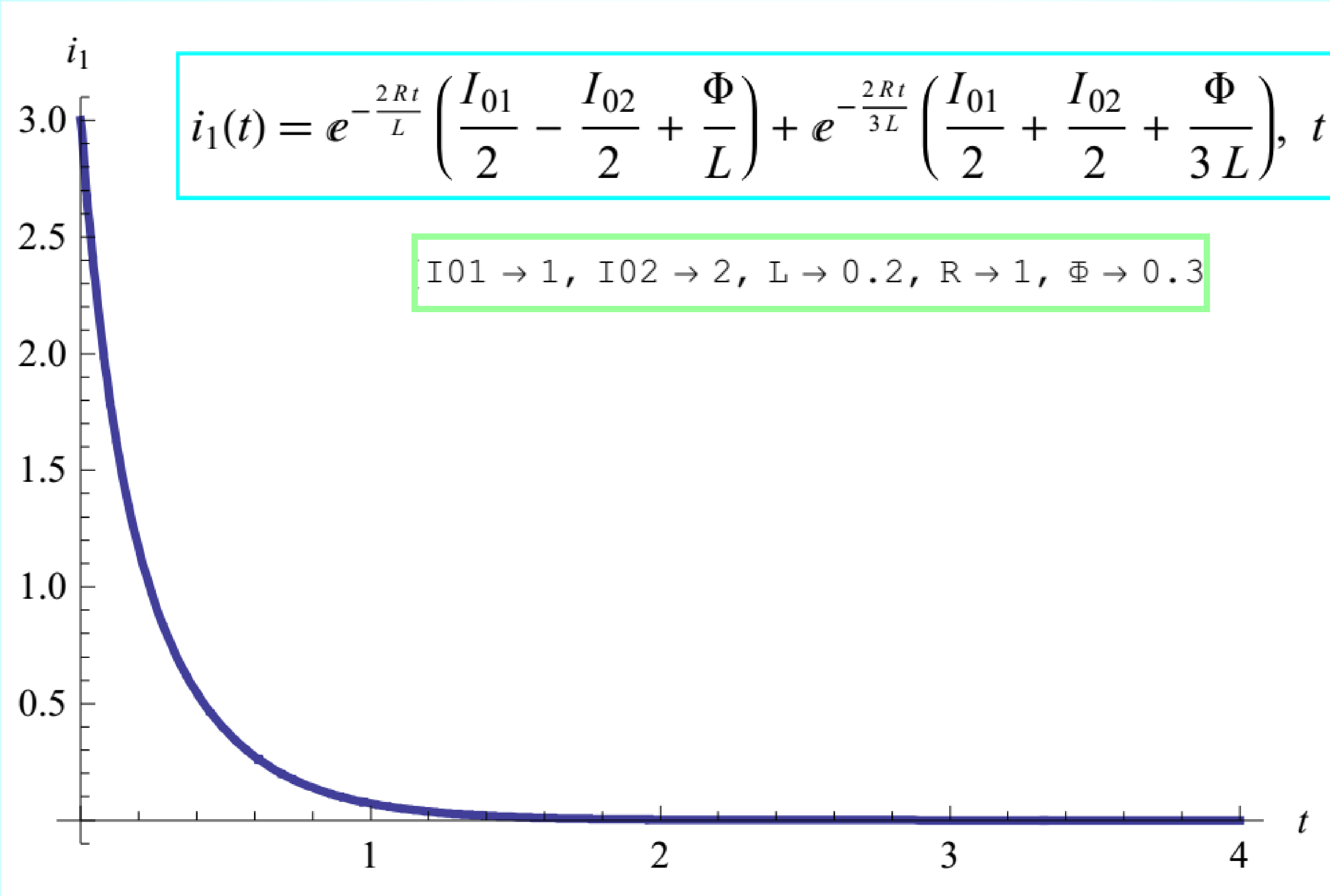
```
jednacine =
 {Ug == R1 I1 + U1, 0 == R2 I2 + U2, U1 == L1 (s I1 - I01) + L12 (s I2 - I02),
  U2 == L12 (s I1 - I01) + L2 (s I2 - I02)}
```

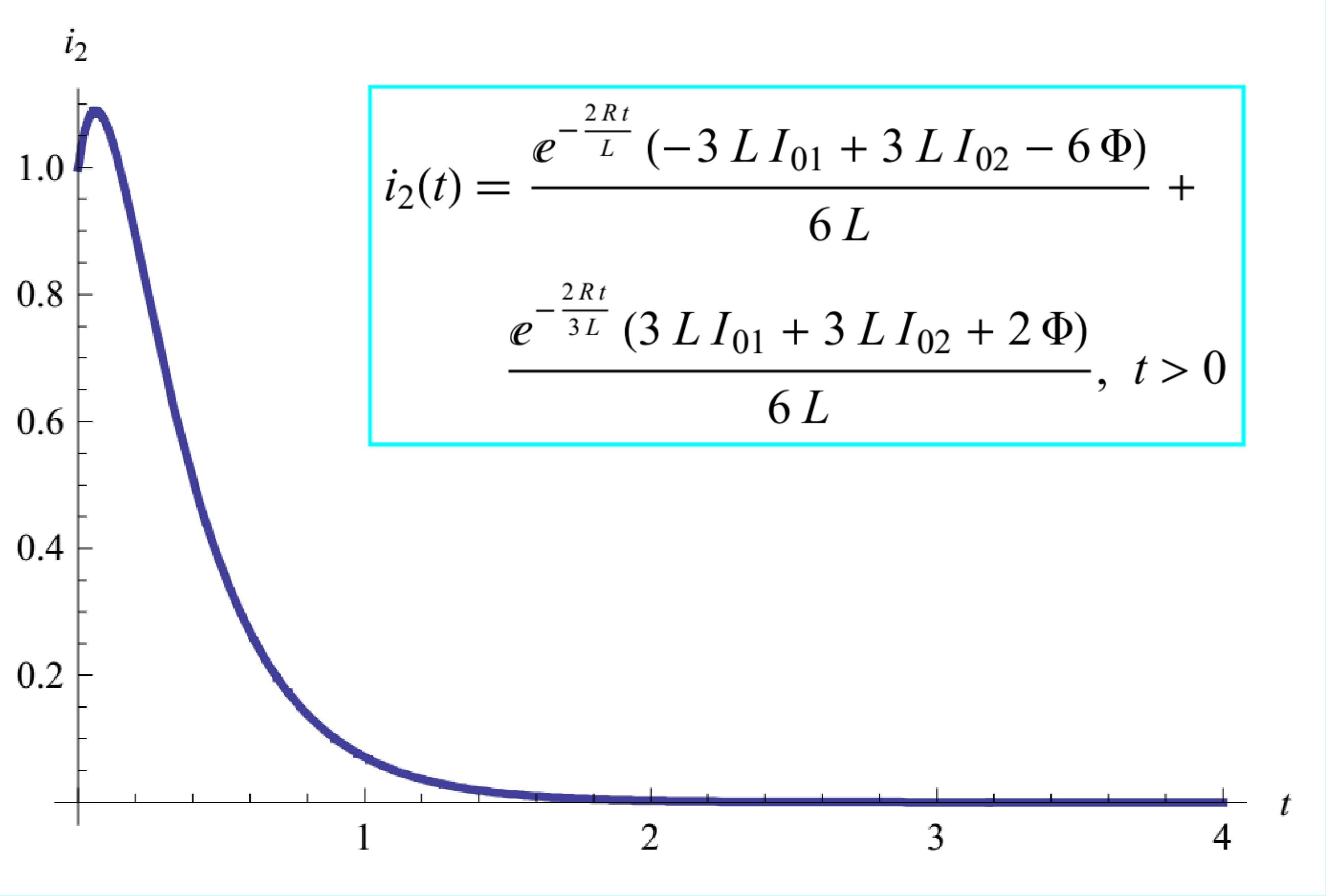
$$I1 \rightarrow \frac{2\, I02\, L\, R + I01\, L\, (4\, R + 3\, L\, s) + 4\, (R + L\, s)\, \Phi}{4\, R^2 + 8\, L\, R\, s + 3\, L^2\, s^2}$$

$$I2 \rightarrow \frac{L\, (2\, I01\, R + 4\, I02\, R + 3\, I02\, L\, s - 2\, s\, \Phi)}{4\, R^2 + 8\, L\, R\, s + 3\, L^2\, s^2}$$

$$i_1(t) = e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(\frac{I_{01}}{2} - \frac{I_{02}}{2} + \frac{\Phi}{L}\right) + e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(\frac{I_{01}}{2} + \frac{I_{02}}{2} + \frac{\Phi}{3L}\right), \; t > 0$$

`I01 → 1, I02 → 2, L → 0.2, R → 1, Φ → 0.3`





$$i_2(t) = \frac{e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(-3LI_{01} + 3LI_{02} - 6\Phi\right)}{6L} + \frac{e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(3LI_{01} + 3LI_{02} + 2\Phi\right)}{6L}, \; t > 0$$

Задаци (22)

√

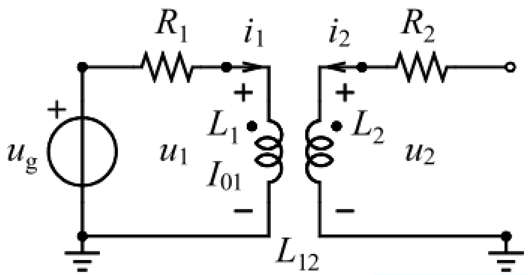
Задатак 1

Параметри електричног кола са слике су познати, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$, $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити једначине стања и ред кола.

(5) Одредити струју примара i_1 и нацртати њен график у функцији времена.

(5) Одредити напон секундара u_2 и нацртати његов график у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Једначине стања су

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{-R_1}{L_1} i_1 + \frac{1}{L_1} u_g$$

$$0 = i_2$$

Ред кола је 1

Струја примара је

$$i_1(t) = I_{01}\,\mathrm{e}^{\frac{-R_1}{L_1}t} + \frac{U}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-R_1}{L_1}t}\right)\vartheta(t)\,,\ t \geq t_0$$

График струје примара је

Напон секундара је

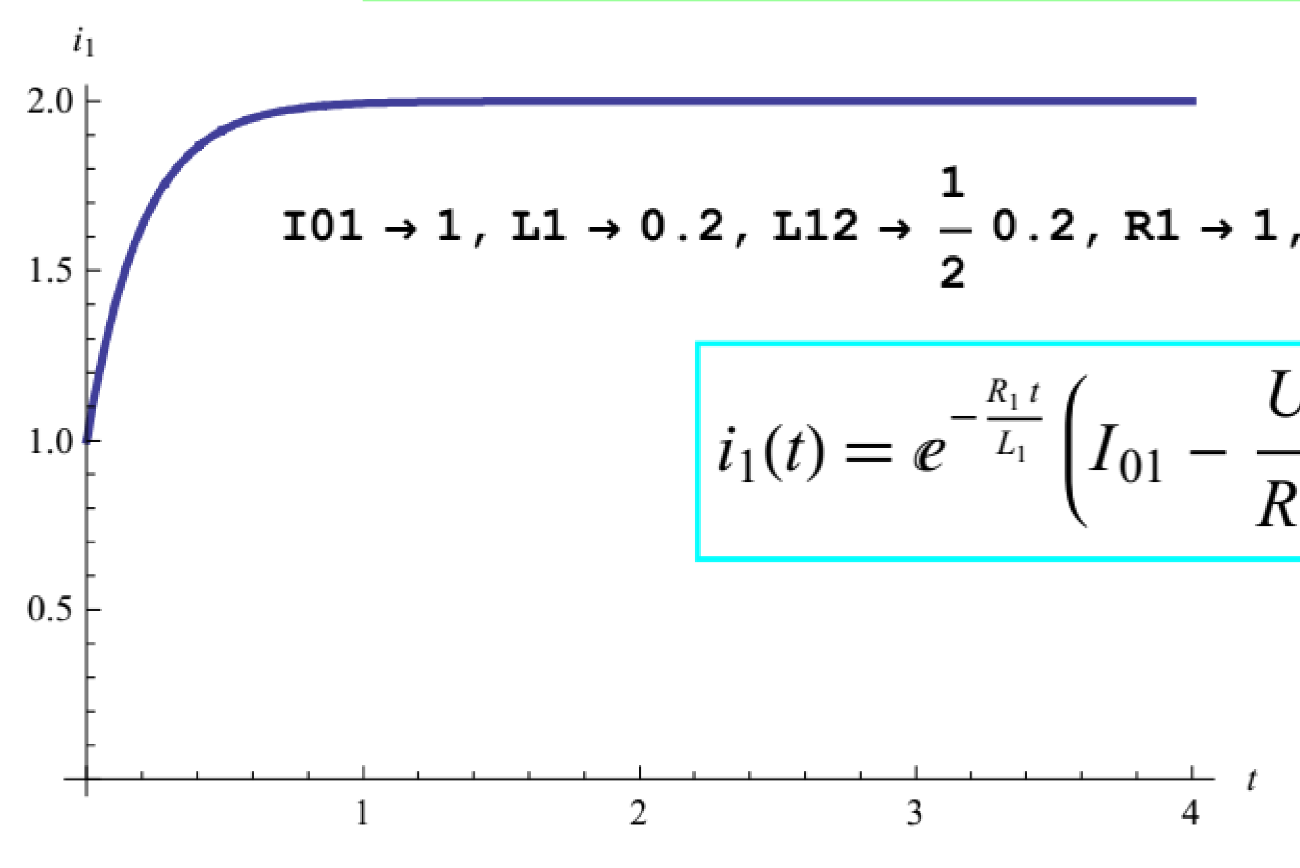
$$u_2(t) = \frac{-L_{12}}{L_1} R_1 I_{01}\,\mathrm{e}^{\frac{-R_1}{L_1}t} + \frac{L_{12}}{L_1} U\,\mathrm{e}^{\frac{-R_1}{L_1}t}\,\vartheta(t)\,,$$

$$t \geq t_0$$

График напона секундара је

```
jednacine = {Ug == R1 I1 + U1, I2 == 0,
  U1 == L1 (s I1 - I01) + L12 (s I2 - 0), U2 == L12 (s I1 - I01) + L2 (s I2 - 0)}
```

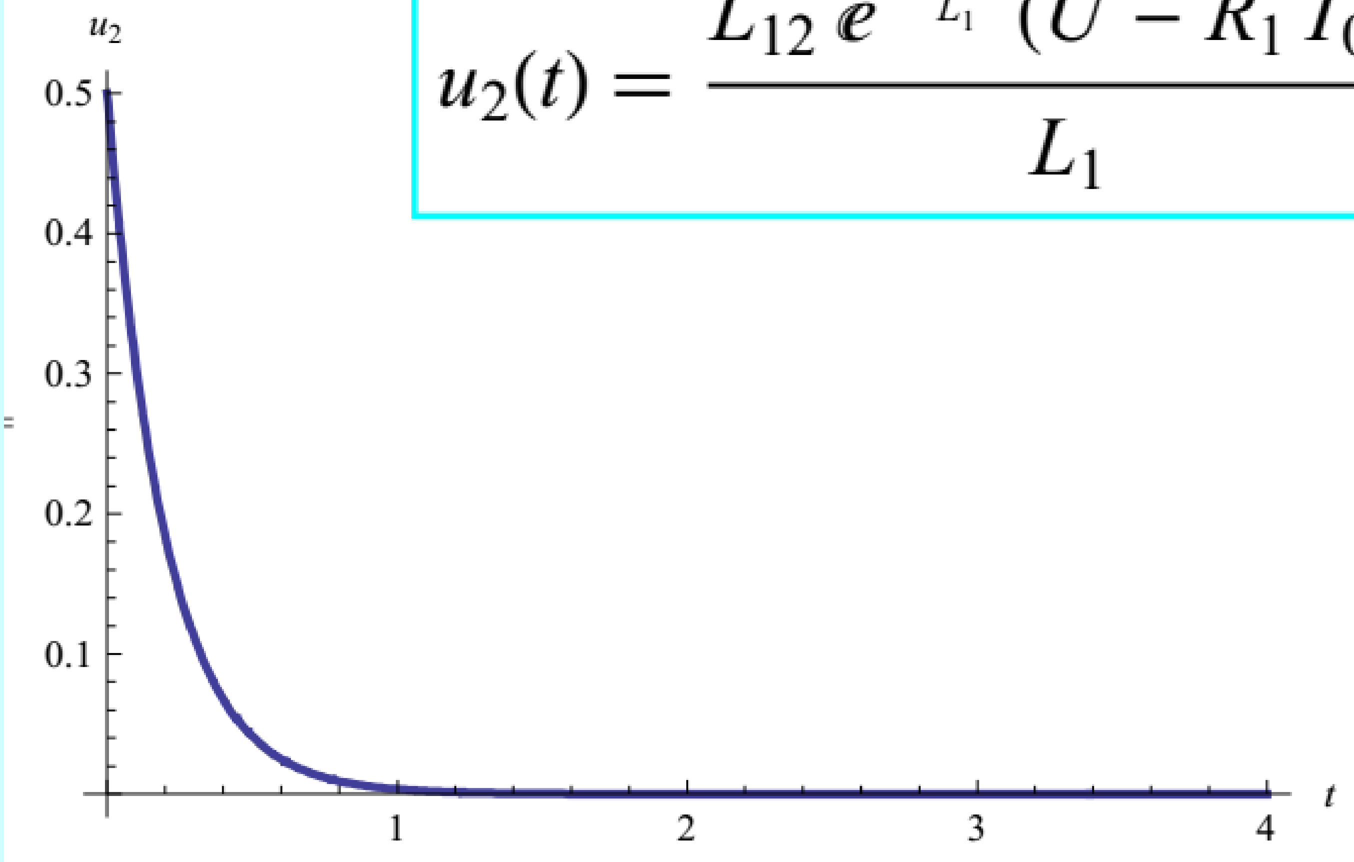
$$I1 \rightarrow \frac{I01\ L1\ s + U}{R1\ s + L1\ s^2},\ U2 \rightarrow \frac{L12\ (-I01\ R1 + U)}{R1 + L1\ s}$$



$$I01 \rightarrow 1,\ L1 \rightarrow 0.2,\ L12 \rightarrow \frac{1}{2}\,0.2,\ R1 \rightarrow 1,\ U \rightarrow 2$$

$$i_1(t) = e^{-\frac{R_1 t}{L_1}}\left(I_{01} - \frac{U}{R_1}\right) + \frac{U}{R_1},\ \ t > 0$$

$$u_2(t) = \frac{L_{12}\, e^{-\frac{R_1 t}{L_1}} (U - R_1 I_{01})}{L_1}, \; t > 0$$



Задаци (23)

√

Задатак 1

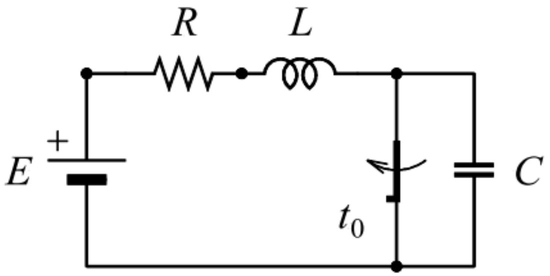
Вредности елемената електричног кола су познате. Прекидач је затворен и одзив је устаљен. У тренутку t_0 прекидач се отвара.

(5) Одредити природне почетне услове у тренутку t_0^-.

(5) Одредити тренутну вредност напона кондензатора, за $t \geq t_0$, ако је $L = CR^2$.

(5) Колика је сакупљена (акумулисана) енергија калема када $t \to +\infty$?

Разматрати општи случај $t_0 \neq 0$.



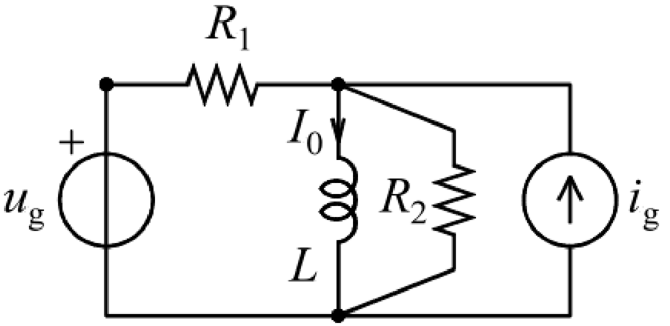
Задатак 2

Вредности елемената електричног кола су познате. $R_1 = R_2 = 2R$, $u_g(t) = U_m \,\mathrm{h}(t)$, $i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\,\mathrm{h}(t)$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити струју калема за $t > t_0$.

(5) Који је ред кола?

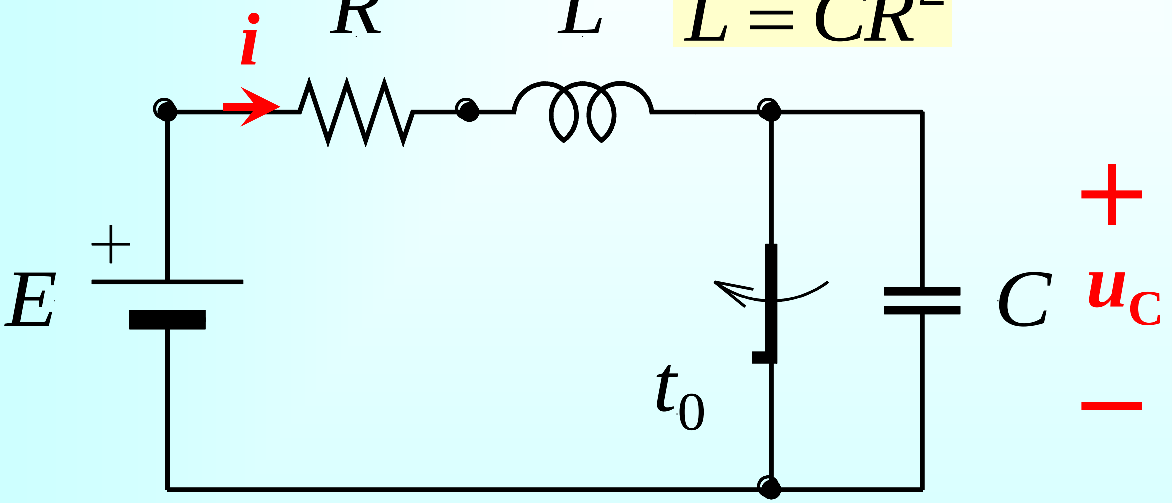
(5) Колики је напон отпорника R_1 када $t \to \infty$?



Природни почетни услови

$t < t_0$

$L = CR^2$



$u_C\left(t_0^-\right) = 0$

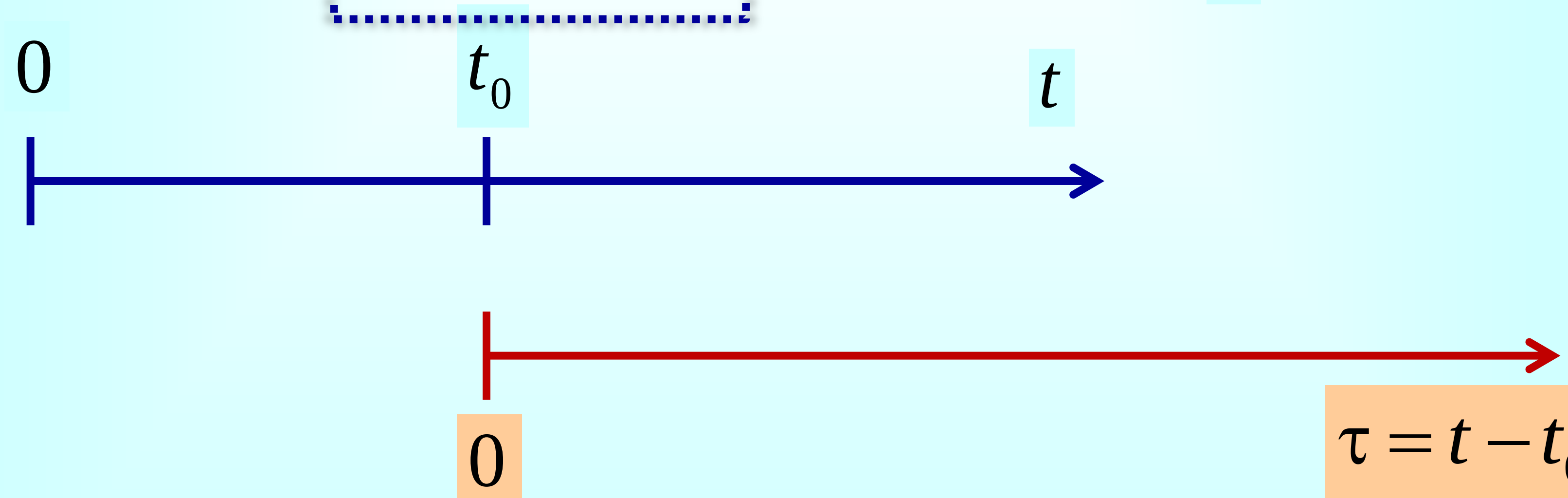
$i_L\left(t_0^-\right) = E/R$

τ - нова променљива за време

$$u_C\left(t_0^-\right)=0$$

$$i_L\left(t_0^-\right)=E/R$$

Природни почетни услови по променљивој t



$$\tau=t-t_0$$

$$u_C\left(0^-\right)=0$$

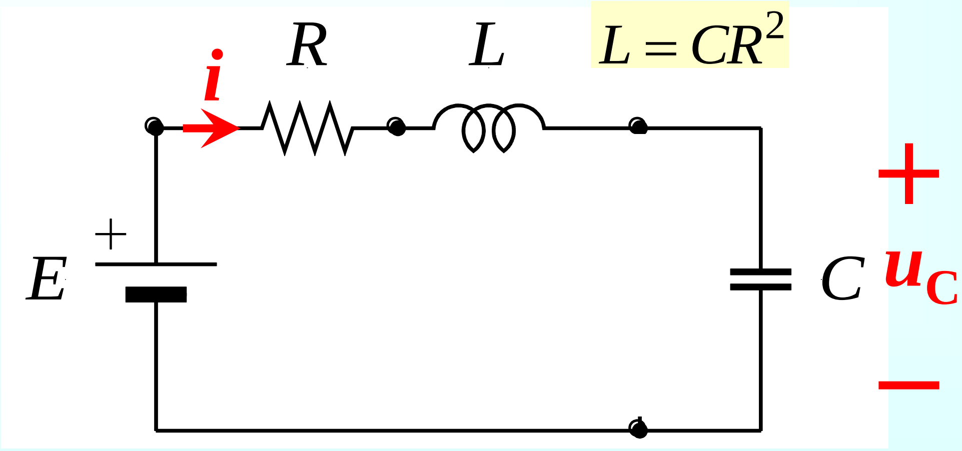
$$i_L\left(0^-\right)=E/R$$

Природни почетни услови по променљивој τ

Комплексан одзив: напон кондензатора

$$t > t_0 \Rightarrow \tau > 0$$

$$\mathrm{LT}\big(Eh(\tau)\big) = \frac{E}{\underline{s}}, \tau = t - t_0$$



$$\frac{E}{\underline{s}} = R\underline{I} + L\big(\underline{s}\underline{I} - I_0\big) + \underline{U}_C$$

$$\underline{I} = C\left(\underline{s}\underline{U}_C - \overbrace{U_0}^{0}\right)$$

$$\underline{I}\big(R + \underline{s}L\big) + \underline{U}_C = \frac{E}{\underline{s}} + LI_0$$

$$\underline{I} = C\underline{s}\underline{U}_C$$

$$C\underline{s}\underline{U}_C\big(R + \underline{s}L\big) + \underline{U}_C = \frac{E}{\underline{s}} + LI_0$$

$$\boxed{\underline{U}_C = \frac{E/\underline{s} + LI_0}{C\underline{s}\big(R + \underline{s}L\big) + 1}}$$

Појединости одређивања одзива

$$\underline{U}_C = \frac{E/\underline{s} + LI_0}{C\underline{s}(R + \underline{s}L) + 1}$$

$$\underline{U}_C = \frac{E + LI_0\underline{s}}{\underline{s}(C\underline{s}(R + \underline{s}L) + 1)} = \frac{E + LI_0\underline{s}}{\underline{s}(LC\underline{s}^2 + RC\underline{s} + 1)}$$

$$\underline{U}_C = \frac{E + LI_0\underline{s}}{\underline{s}((RC)^2\underline{s}^2 + RC\underline{s} + 1)}$$

$e^{-at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{b^2+(a+s)^2}$
$e^{-at}\cos(bt)$	$\dfrac{a+s}{b^2+(a+s)^2}$

$$\underline{U}_C = \frac{E}{(RC)^2}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}^2 + \frac{1}{RC}\underline{s} + \frac{1}{(RC)^2}\right)} + \frac{LI_0}{(RC)^2}\frac{\underline{s}}{\underline{s}\left(\underline{s}^2 + \frac{1}{RC}\underline{s} + \frac{1}{(RC)^2}\right)}$$

$$\underline{U}_C=\frac{E}{(RC)^2}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}^2+\frac{1}{RC}\underline{s}+\frac{1}{(RC)^2}\right)}+\frac{LI_0}{(RC)^2}\frac{\underline{s}}{\underline{s}\left(\underline{s}^2+\frac{1}{RC}\underline{s}+\frac{1}{(RC)^2}\right)}$$

$$\underline{U}_C=\frac{E}{(RC)^2}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}^2+\frac{1}{RC}\underline{s}+\frac{1}{(RC)^2}\right)}+\frac{I_0}{C}\frac{1}{\left(\underline{s}^2+\frac{1}{RC}\underline{s}+\frac{1}{(RC)^2}\right)}$$

$$\underline{U}_C=\frac{E}{(RC)^2}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}^2+\frac{1}{RC}\underline{s}+\frac{1}{4(RC)^2}+\frac{3}{4(RC)^2}\right)}+$$

$$+\frac{I_0}{C}\frac{1}{\left(\underline{s}^2+\frac{1}{RC}\underline{s}+\frac{1}{4(RC)^2}+\frac{3}{4(RC)^2}\right)}$$

$$\underline{U}_C=\frac{E}{(RC)^2}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}^2+\frac{1}{RC}\underline{s}+\frac{1}{4(RC)^2}+\frac{3}{4(RC)^2}\right)}+\frac{I_0}{C}\frac{1}{\left(\underline{s}^2+\frac{1}{RC}\underline{s}+\frac{1}{4(RC)^2}+\frac{3}{4(RC)^2}\right)}$$

$$u_C(\tau)=\mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{U}_C\right)=\frac{E}{(RC)^2}\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}\left(\left(\underline{s}+\frac{1}{2RC}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2\right)}\right)+$$

$$+\frac{I_0}{C}\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\left(\left(\underline{s}+\frac{1}{2RC}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2\right)}\right)$$

$$u_C(\tau)=\frac{E}{(RC)^2}\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{\overbrace{A}^{(RC)^2}}{\underline{s}}+\frac{\overbrace{B}^{-(RC)^2}\underline{s}+\overbrace{C}^{-RC}}{\left(\underline{s}+\frac{1}{2RC}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2}\right)+\frac{I_0}{C}\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\left(\underline{s}+\frac{1}{2RC}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2}\right)$$

$$u_C(\tau)=\mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{U}_C\right)=E\cdot\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}}-\frac{\underline{s}+\frac{1}{2RC}}{\left(\underline{s}+\frac{1}{2RC}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2}-\frac{\frac{1}{2RC}}{\left(\underline{s}+\frac{1}{2RC}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2}\right)+$$

$$+\frac{I_0}{C}\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\left(\underline{s}+\frac{1}{2RC}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2}\right)$$

$$u_C(\tau) = E \cdot \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}} - \frac{\underline{s} + \frac{1}{2RC}}{\left(\underline{s} + \frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2RC}}{\left(\underline{s} + \frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2} \right) +$$

$$+ \frac{E}{RC} \frac{2RC}{\sqrt{3}} \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2RC}}{\left(\underline{s} + \frac{1}{2RC}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\right)^2} \right)$$

$e^{-a\,t}\sin(b\,t)$	$\frac{b}{b^2+(a+s)^2}$
$e^{-a\,t}\cos(b\,t)$	$\frac{a+s}{b^2+(a+s)^2}$

$$u_C(\tau) = E - E\mathrm{e}^{-\frac{1}{2RC}\tau}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\tau\right) - \frac{E}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2RC}\tau}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\tau\right) + E\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2RC}\tau}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\tau\right)$$

$$\boxed{u_C(\tau) = E - E\mathrm{e}^{-\frac{1}{2RC}\tau}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\tau\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}E\mathrm{e}^{-\frac{1}{2RC}\tau}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\tau\right), \quad \tau > 0}$$

Одзив: напон кондезатора

$$u_C(\tau) = E - E\mathrm{e}^{-\frac{1}{2RC}\tau}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\tau\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}E\mathrm{e}^{-\frac{1}{2RC}\tau}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}\tau\right), \quad \tau > 0$$

$$\boxed{\tau = t - t_0}$$

$$\boxed{u_C(t) = E - E\mathrm{e}^{-\frac{1}{2RC}(t-t_0)}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}(t-t_0)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2RC}(t-t_0)\right)\right), \quad t > t_0}$$

Задаци (23)

Задатак 1

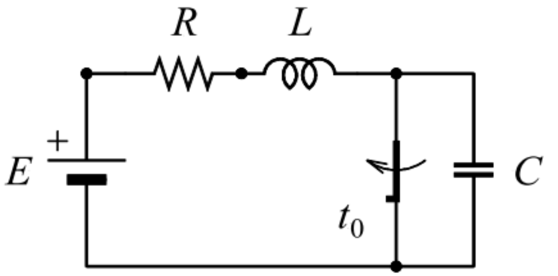
Вредности елемената електричног кола су познате. Прекидач је затворен и одзив је устаљен. У тренутку t_0 прекидач се отвара.

(5) Одредити природне почетне услове у тренутку t_0^-.

(5) Одредити тренутну вредност напона кондензатора, за $t \geq t_0$, ако је $L = CR^2$.

(5) Колика је сакупљена (акумулисана) енергија калема када $t \to +\infty$?

Разматрати општи случај $t_0 \neq 0$.



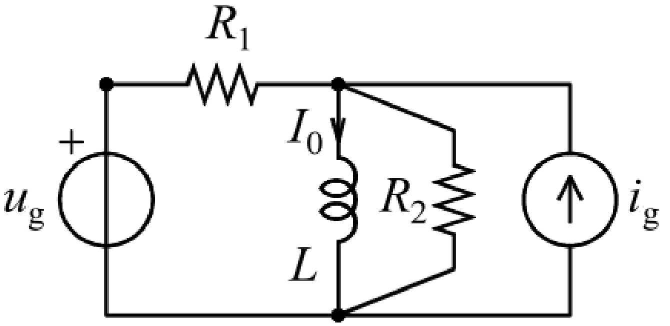
Задатак 2

Вредности елемената електричног кола су познате. $R_1 = R_2 = 2R$, $u_g(t) = U_m \, \mathrm{h}(t)$, $i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\,\mathrm{h}(t)$, $t_0 = 0$.

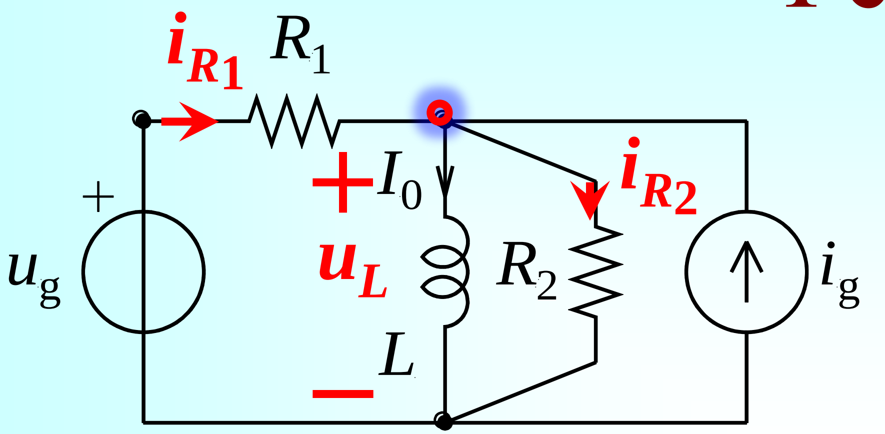
(5) Одредити струју калема за $t > t_0$.

(5) Који је ред кола?

(5) Колики је напон отпорника R_1 када $t \to \infty$?



Решавање кола LT



$$-\frac{\underline{U}_g-\underline{U}_L}{R_1}+\underline{I}_L+\frac{\underline{U}_L}{R_2}-\underline{I}_g=0$$

$$\underline{U}_L=L\left(\underline{s}\underline{I}_L-I_0\right)$$

$$R_1=R_2=2R$$

$$u_g(t)=U_m\,h(t)$$

$$i_g(t)=I_m\exp(-tR/L)\,h(t)$$

$$t_0=0$$

$$-\frac{\underline{U}_g-L\left(\underline{s}\underline{I}_L-I_0\right)}{R_1}+\underline{I}_L+\frac{L\left(\underline{s}\underline{I}_L-I_0\right)}{R_2}-\underline{I}_g=0$$

$$-\underline{U}_g+L\left(\underline{s}\underline{I}_L-I_0\right)+2R\underline{I}_L+L\left(\underline{s}\underline{I}_L-I_0\right)-2R\underline{I}_g=0$$

$$-\underline{U}_g+\left(2L\underline{s}+2R\right)\underline{I}_L-2LI_0-2R\underline{I}_g=0$$

Комплексан одзив: струја калема

$$-\underline{U}_{\mathrm{g}}+\left(2L\underline{s}+2R\right)\underline{I}_{L}-2LI_{0}-2R\underline{I}_{\mathrm{g}}=0 \rightarrow \underline{I}_{L}=\frac{\underline{U}_{\mathrm{g}}+2R\underline{I}_{\mathrm{g}}+2LI_{0}}{2L\underline{s}+2R}$$

$$\underline{I}_{L}=\frac{1}{2\left(L\underline{s}+R\right)}\underline{U}_{\mathrm{g}}+\frac{R}{L\underline{s}+R}\underline{I}_{\mathrm{g}}+\frac{L}{L\underline{s}+R}I_{0}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}=\mathrm{LT}\left(u_{\mathrm{g}}(t)\right)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\underline{s}}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{g}}=\mathrm{LT}\left(i_{\mathrm{g}}(t)\right)=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\underline{s}+R/L}$$

$$\boxed{\underline{I}_{L}=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}+R/L\right)}+\frac{R}{L}\frac{I_{\mathrm{m}}}{\left(\underline{s}+R/L\right)^{2}}+\frac{1}{\underline{s}+R/L}I_{0}}$$

Одзив: струја калема

$$i_L(t)=\mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{I}_L\right)=\frac{U_\mathrm{m}}{2L}\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}+R/L\right)}\right)+\frac{R}{L}I_\mathrm{m}\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\left(\underline{s}+R/L\right)^2}\right)+I_0\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}+R/L}\right)$$

$$\frac{p+q\,s}{(a+s)\,(b+s)} \qquad \frac{e^{-a\,t}\,(a\,q-p)}{a-b}+\frac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{a-b}$$

$$\frac{p+q\,s}{(a+s)^2} \qquad e^{-a\,t}\,q+e^{-a\,t}\,(p-a\,q)\,t$$

$$i_L(t)=\mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{I}_L\right)=\frac{U_\mathrm{m}}{2L}\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)}{R/L}h(t)+I_\mathrm{m}\frac{R}{L}t\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}h(t)+I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},\quad t>0$$

$$\boxed{i_L(t)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_\mathrm{m}}{2R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)h(t)+I_\mathrm{m}\frac{R}{L}t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}h(t),\quad t>0}$$

Задатак (24)

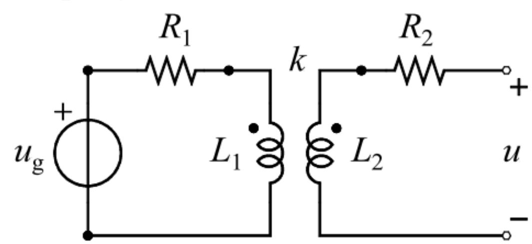
Задатак 2

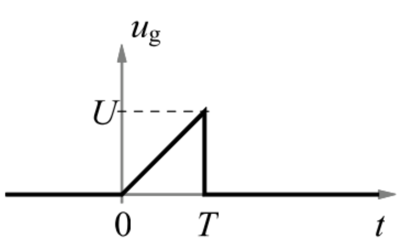
Параметри електричног кола са слике су познати. Побуда је дата на слици, $T = L/R$, $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $L_1 = L$, $L_2 = 4L$, $k = 1/2$.

(5) Одредити индициону функцију за напон отвореног секундара (одскочни одзив).

(5) Одредити напон отвореног секундара и

(5) нацртати његов график. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.





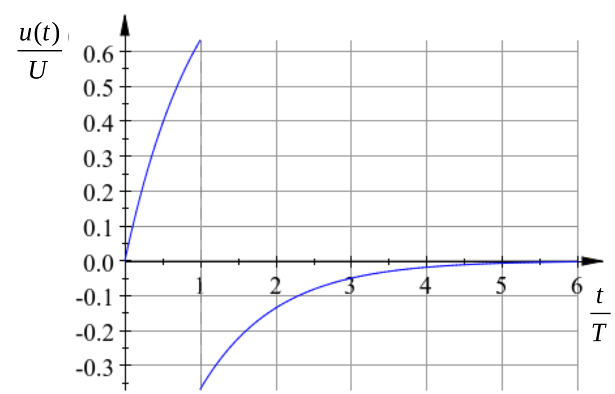
Индициона функција (одскочни одзив) је

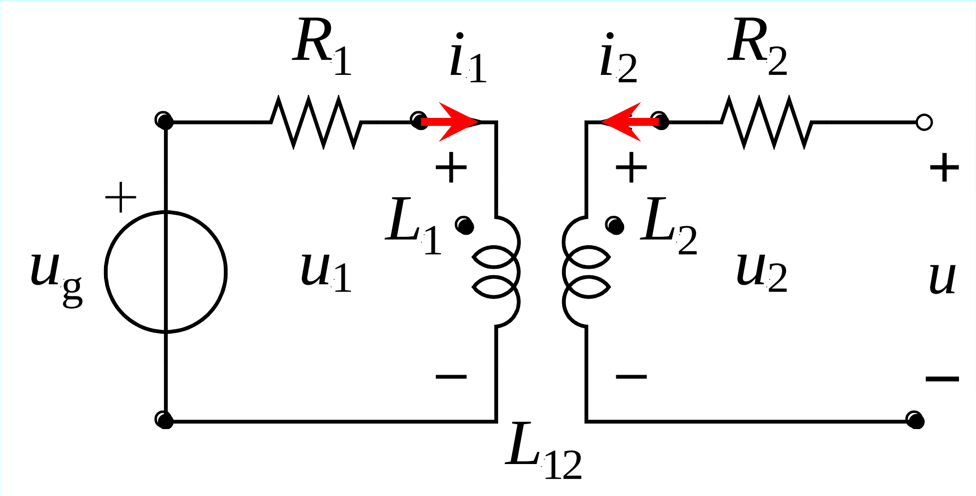
$$\boxed{f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} h(t), -\infty < t < +\infty}$$

Напон отвореног секундара је

$$\boxed{u(t) = \begin{cases} U(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}),\ 0 \le t < T = \dfrac{L}{R} \\ -U\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},\ t \ge T = \dfrac{L}{R} \end{cases}}$$

График напона отвореног секундара је





Решавање кола LT

$R_1 = R$

$R_2 = 2R$

$L_1 = L$

$L_2 = 4L$

$k = \frac{1}{2}$

$T = L/R$

$$L_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{L \cdot 4L} = L$$

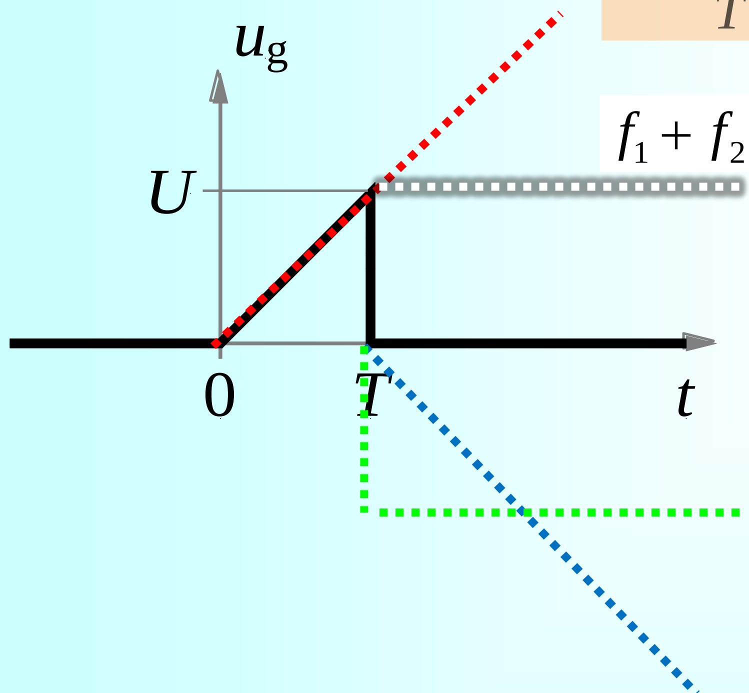
$$\underline{U}_g = R_1 \underline{I}_1 + L_1 \underline{s} \underline{I}_1 + L_{12} \underline{s} \overbrace{\underline{I}_2}^{0} = \underline{I}_1 (L_1 \underline{s} + R_1)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_g}{L_1 \underline{s} + R_1}$$

$$\underline{U} = R_2 \overbrace{\underline{I}_2}^{0} + L_{12} \underline{s} I_1 + L_2 \underline{s} \overbrace{\underline{I}_2}^{0} = L_{12} \underline{s} I_1$$

$$\boxed{\underline{U} = L_{12} \underline{s} I_1 = \frac{L_{12} \underline{s}}{L_1 \underline{s} + R_1} \underline{U}_g}$$

$$f_1 = \frac{U}{T}\overbrace{th(t)}^{r(t)}$$



Побуда

$$f_3 = -Uh(t-T)$$

Померај аргумента

$$\mathrm{LT}(u(t-T)) = \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

$$f_2 = -\frac{U}{T}r(t-T)$$

$$u_g(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = \frac{U}{T}\overbrace{th(t)}^{r(t)} - \frac{U}{T}\overbrace{r(t-T)}^{(t-T)h(t-T)} - Uh(t-T)$$

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u_g(t)) = \frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}^2} - \frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}^2}\mathrm{e}^{-\underline{s}T} - U\frac{1}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

Импулсни и одскочни одзив

Unit-impulse response

$$g(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{H}(\underline{s}))$$

Импулсни одзив се често обележава са $h(t)$

Импулсни одзив (*Гринова функција*) је инверзна Лапласова трансформација одговарајуће трансфер функције*

Unit-step response

$$f(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}}\underline{H}(\underline{s})\right)$$

Одскочни одзив (*индициона функција*) је инверзна Лапласова трансформација одговарајуће трансфер функције* подељене са $\underline{s}$

*прецизније, уопштене комплексне функције електричног кола у области Лапласове трансформације

Индициона функција за напон секундара

$$\underline{U} = \frac{L_{12}\underline{s}}{L_1\underline{s}+R_1}\underline{U}_\mathrm{g} \Rightarrow \underline{H}(\underline{s}) = \frac{L_{12}\underline{s}}{L_1\underline{s}+R_1}$$

$$f(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}}\underline{H}(\underline{s})\right) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}}\frac{L_{12}\underline{s}}{L_1\underline{s}+R_1}\right) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}+R/L}\right)$$

$$\boxed{f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}h(t)}$$

$$e^{-a\,t} \qquad \frac{1}{a+s}$$

Комплексан одзив: напона секундара

$$\underline{U} = \frac{L_{12}\underline{s}}{L_1\underline{s}+R_1}\underline{U}_{\mathrm{g}}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}) = \mathrm{LT}\big(u_{\mathrm{g}}(t)\big) = \frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}^2} - \frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}^2}\mathrm{e}^{-\underline{s}T} - U\frac{1}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

$$\underline{U} = \frac{L_{12}\underline{s}}{L_1\underline{s}+R_1}\frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}^2} - \frac{L_{12}\underline{s}}{L_1\underline{s}+R_1}\frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}^2}\mathrm{e}^{-\underline{s}T} - \frac{L_{12}\underline{s}}{L_1\underline{s}+R_1}U\frac{1}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

$$\boxed{\underline{U} = \frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}+R/L\right)} - \frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}+R/L\right)}\mathrm{e}^{-\underline{s}T} - U\frac{1}{\underline{s}+R/L}\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}$$

Одзив: напон секундара

$$\underline{U} = \frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}+R/L\right)} - \frac{U}{T}\frac{1}{\underline{s}\left(\underline{s}+R/L\right)}\mathrm{e}^{-\underline{s}T} - U\frac{1}{\underline{s}+R/L}\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

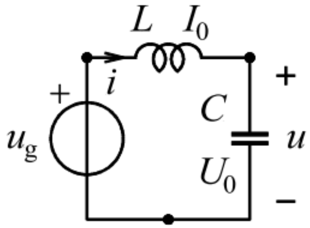
$$\frac{p+q\,s}{(a+s)\,(b+s)} \qquad \frac{e^{-a\,t}\,(a\,q-p)}{a-b} + \frac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{a-b}$$

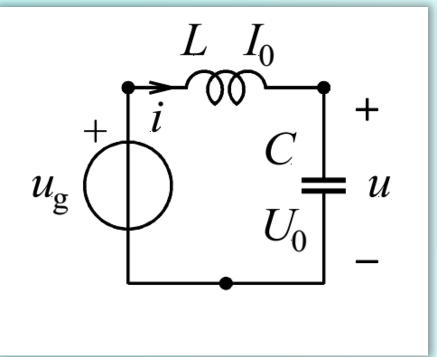
$$u(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{U}\right) = \frac{U}{T}\frac{1-e^{-\frac{R}{L}t}}{R/L}h(t) - \frac{U}{T}\frac{1-e^{-\frac{R}{L}(t-T)}}{R/L}h(t-T) - U\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-T)}h(t-T)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ U\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) & 0 \le t < T \\ U\left(1-\mathrm{e}^{-tR/L}-1+\mathrm{e}^{-tR/L}\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-tR/L}\mathrm{e}\right) = -U\mathrm{e}^{-tR/L} & t \ge T \end{cases}$$

Задаци (25)

√

Задатак 2 Вредности елемената електричног кола са слике су познате, $u_g(t) = U_m \sin(\omega t)\vartheta(t)$, $i(t_0^-) = I_0$, $u(t_0^-) = U_0$, $t_0 = 0$, $C = \dfrac{1}{\omega^2 L}$. **(5)** Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола. **(5)** Одредити напон кондензатора u и **(5)** скицирати његов график у функцији времена за $t > t_0$.  -- Једначине стања у матричном облику су Ред кола је	Напон кондензатора u је Скица графика напона је



$$UC \to \frac{s^3\, U0 + I0\, L\, s^2\, \omega^2 + s\, U0\, \omega^2 + \omega^3\, (Um + I0\, L\, \omega)}{\left(s^2 + \omega^2\right)^2}$$

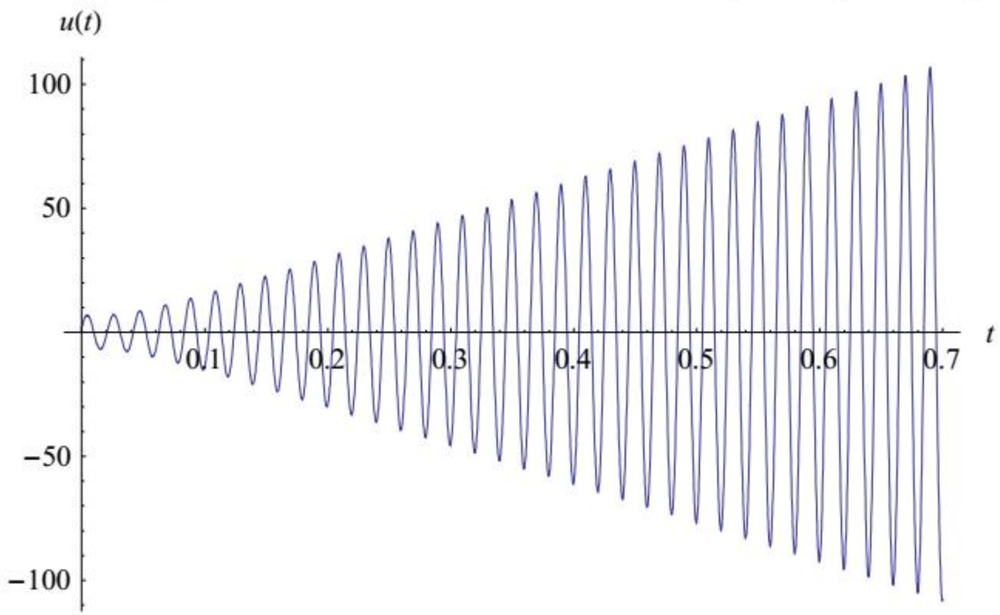
Комплексан одзив

$$u(t) = \frac{1}{2}\sin(t\,\omega)\,(2\,I_0\,L\,\omega + U_{\mathrm{m}}) + \cos(t\,\omega)\left(U_0 - \frac{1}{2}\,t\,\omega\,U_{\mathrm{m}}\right),\quad t > 0$$

Одзив: напон кондезатора

I0 → 0.2, L → 0.1, U0 → 2, Um → 1, ω → 100 π

$$u(t) = \frac{1}{2}\sin(t\,\omega)\,(2\,I_0\,L\,\omega + U_{\mathrm{m}}) + \cos(t\,\omega)\left(U_0 - \frac{1}{2}\,t\,\omega\,U_{\mathrm{m}}\right)$$



Задаци (26)

Задатак 1

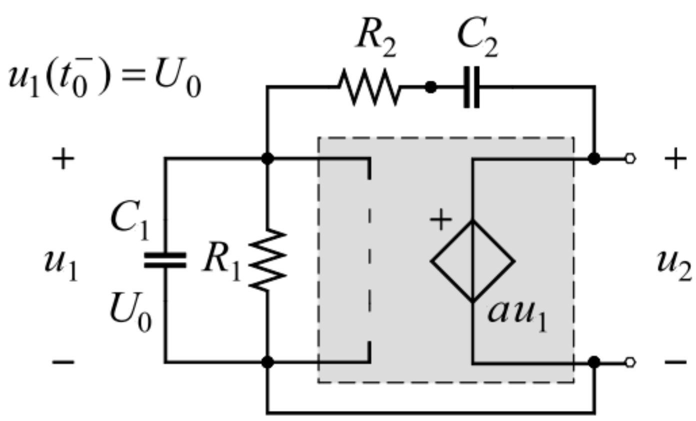
Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

$R_1 = R_2 = R$, $a = 3$, $C_1 = C_2 = C$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику.

(5) Одредити напон u_2 за $t > t_0$.

(5) Нацртати график u_2 у функцији времена за $t > t_0$.

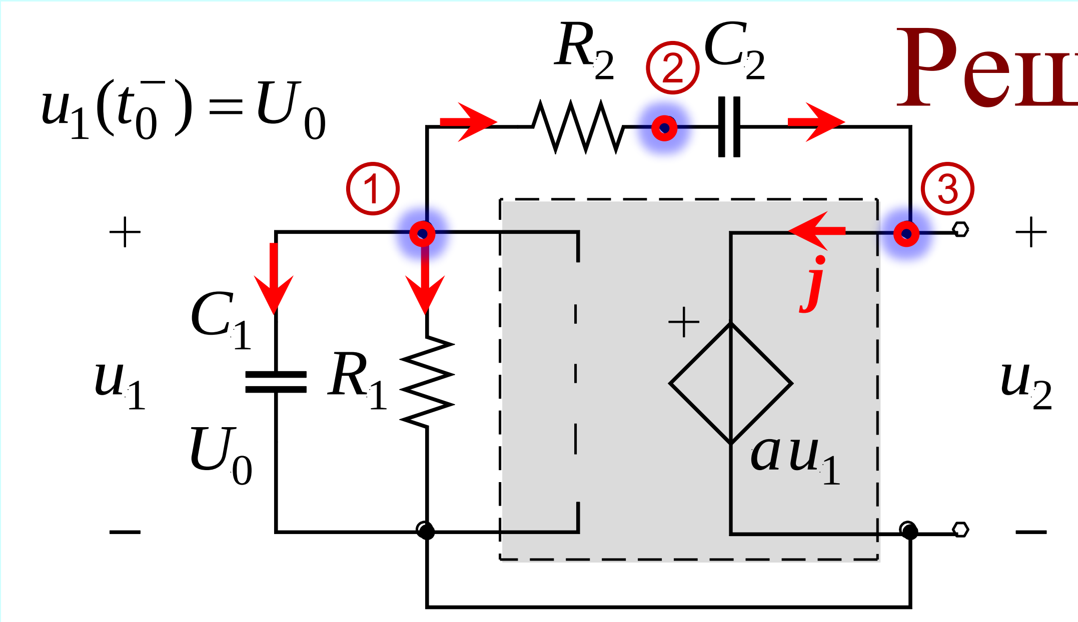


Једначине стања у матричном облику су

Напон u_2 за $t > t_0$ је

График u_2 у функцији времена за $t > t_0$ је

Решавање кола LT



$(1)\, C(\underline{s}\underline{U}_1(\underline{s}) - U_0) + \underline{U}_1(\underline{s})/R_1 + \left(\underline{U}_1(\underline{s}) - \underline{V}_2(\underline{s})\right)/R_2 = 0$

$(2) - \left(\underline{U}_1(\underline{s}) - \underline{V}_2(\underline{s})\right)/R_2 + C_2\underline{s}\left(\underline{V}_2(\underline{s}) - \underline{U}_2(\underline{s})\right) = 0$

x $(3)\, \underline{J} - C_2\underline{s}\left(\underline{V}_2(\underline{s}) - \underline{U}_2(\underline{s})\right) = 0$

$\underline{U}_2(\underline{s}) = a\underline{U}_1(\underline{s})$

$\underline{J} \Rightarrow \cancel{3)}$

$$(1)\, C\left(\underline{s}\underline{U}_1(\underline{s})-U_0\right)+\underline{U}_1(\underline{s})/R_1+\left(\underline{U}_1(\underline{s})-\underline{V}_2(\underline{s})\right)/R_2=0$$

$$(2)\, -\left(\underline{U}_1(\underline{s})-\underline{V}_2(\underline{s})\right)/R_2+C_2\underline{s}\left(\underline{V}_2(\underline{s})-\underline{U}_2(\underline{s})\right)=0$$

$$\underline{U}_2(\underline{s})=a\underline{U}_1(\underline{s})$$

$$(1)\, \left(2+\underline{s}RC\right)\underline{U}_1-RCU_0=\underline{V}_2$$

$$(2)\, -\left(1+a\underline{s}RC\right)\underline{U}_1+\underline{V}_2\left(1+\underline{s}RC\right)=0$$

$$(2)\, -\left(1+a\underline{s}RC\right)\underline{U}_1+\left(\left(2+\underline{s}RC\right)\underline{U}_1-RCU_0\right)\left(1+\underline{s}RC\right)=0$$

$$\left(-\left(1+\overbrace{a}^{3}\underline{s}RC\right)+\left(2+\underline{s}RC\right)\left(1+\underline{s}RC\right)\right)\underline{U}_1=RCU_0\left(1+\underline{s}RC\right)$$

$$\boxed{\underline{U}_1=\frac{RCU_0\left(1+\underline{s}RC\right)}{\underline{s}^2\left(RC\right)^2+1}}$$

Комплексан одзив

Одзив: напон u_2

$\sin(b\,t)$	$\dfrac{b}{b^2+s^2}$
$\cos(b\,t)$	$\dfrac{s}{b^2+s^2}$

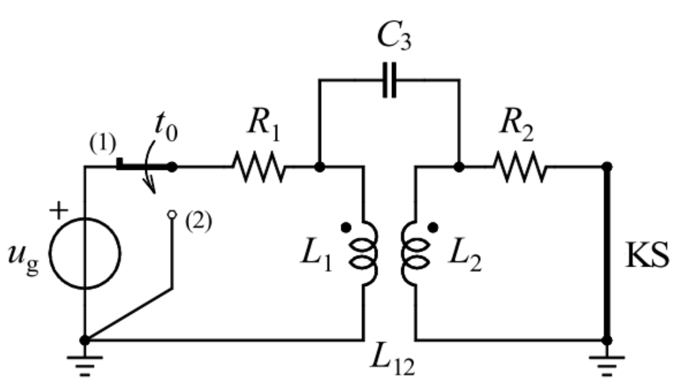
$$\underline{U}_1 = \frac{RCU_0\left(1+\underline{s}RC\right)}{\underline{s}^2(RC)^2+1}$$

$$u_1(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{U}_1(\underline{s})\right) = U_0\,\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{\underline{s}}{\underline{s}^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}\right) + U_0\,\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{RC}}{\underline{s}^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}\right)$$

$$u_1(t) = U_0\cos\left(\frac{t}{RC}\right) + U_0\sin\left(\frac{t}{RC}\right), \quad t>0$$

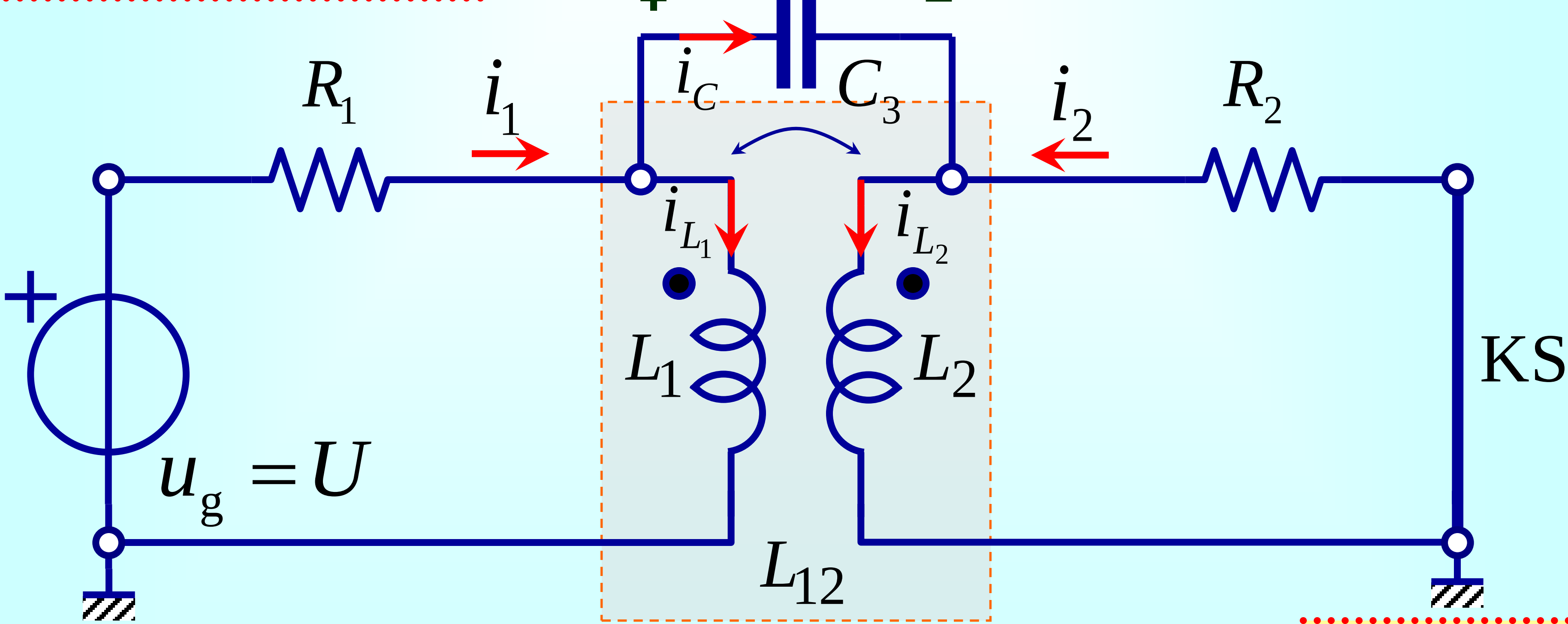
$$\boxed{u_2(t) = 3u_1(t) = 3U_0\cos\left(\frac{t}{RC}\right) + 3U_0\sin\left(\frac{t}{RC}\right), \quad t>0}$$

Задаци (27)

Задатак 1 Линеаран индуктиван трансформатор је симетричан, са савршеном спрегом, а индуктивност примара је L. Отпорности отпорника су R и $u_g = U$. Прекидач је у положају (1) и одзив је устаљен. У тренутку $t_0 = 0$ прекидач се пребацује у положај (2). Одредити **(5)** природне почетне услове за тренутак t_0 и ред кола за $t > t_0$, **(5)** струју кратког споја за $t > t_0$ и **(5)** нацртати њен график. 	Природни почетни услови су Ред кола је Струја кратког споја је График струје кратког споја је

Природни почетни услови

$t < t_0 = 0, P \rightarrow (1)$



линеарни индуктивни трансформатор
симетричан са савршеном спрегом

$u_{L_1} = u_{L_2} = L\mathrm{D}i_{L_1} + L\mathrm{D}i_{L_2} \Rightarrow u_C = 0 \Rightarrow i_C = C\mathrm{D}u_C = 0$

устаљен одзив $i_{L_1} = \mathrm{const}, i_{L_2} = \mathrm{const} \Rightarrow u_{L_1} = 0, u_{L_2} = 0$

$i_{L_1}(0^-) = U/R$

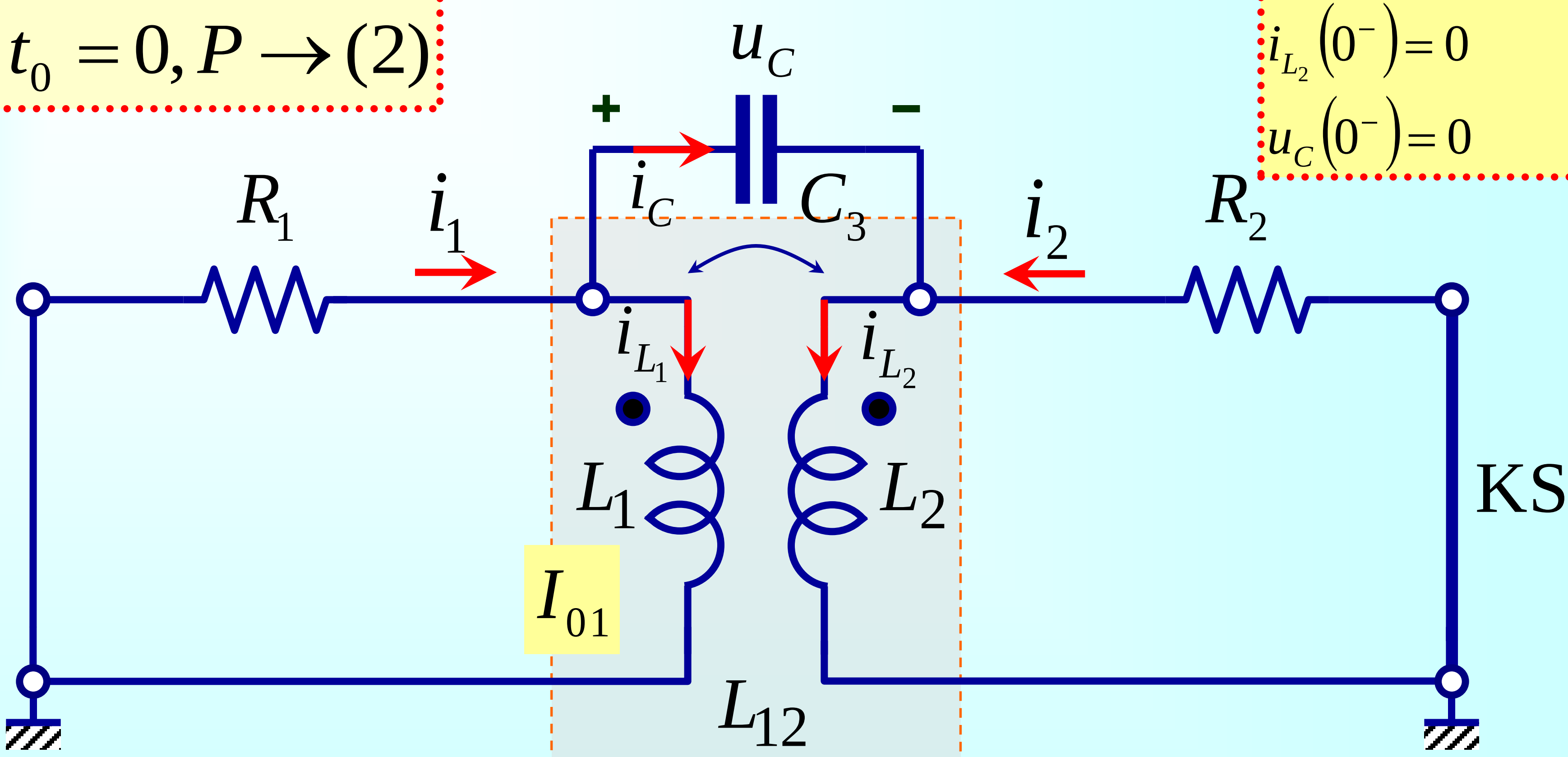
$i_{L_2}(0^-) = 0$

$u_C(0^-) = 0$

Коло са почетним условом

$$i_{L_1}\left(0^-\right)=\frac{U}{R}=I_{01}$$
$$i_{L_2}\left(0^-\right)=0$$
$$u_C\left(0^-\right)=0$$

$$t>t_0=0, P\rightarrow(2)$$



линеарни индуктивни трансформатор
симетричан са савршеном спрегом

$$\underline{U}_{L_1}=\underline{U}_{L_2}=L\left(\underline{s}\underline{I}_{L_1}-I_{01}\right)+L\underline{s}\underline{I}_{L_2}\Rightarrow\underline{U}_C=0\Rightarrow\underline{I}_C=C\underline{s}\underline{U}_C=0$$

$$\underline{U}_{L_1}=-R_1\underline{I}_1 \qquad \underline{I}_{L_1}=\underline{I}_1 \qquad \underline{U}_{L_2}=-R_2\underline{I}_2 \qquad \underline{I}_{L_2}=\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_{L_1} = \underline{U}_{L_2} = L\left(\underline{s}\underline{I}_{L_1} - I_{01}\right) + L\underline{s}\underline{I}_{L_2} \Rightarrow \underline{U}_C = 0 \Rightarrow \underline{I}_C = C\underline{s}\underline{U}_C = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{U}_{L_1} = -R\underline{I}_1 \\ \underline{U}_{L_2} = -R\underline{I}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{I}_{L_2} = \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{L_1} = \underline{I}_1 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{I}_{L_1} = \underline{I}_{L_2}$$

$$e^{-at} \qquad \frac{1}{a+s}$$

$$\underline{U}_{L_1} = L\left(\underline{s}\underline{I}_{L_1} - I_{01}\right) + L\underline{s}\overbrace{\underline{I}_{L_2}}^{\underline{I}_{L_1}} = -R\overbrace{\underline{I}_1}^{\underline{I}_{L_1}}$$

$$\underline{I}_{L_1} = \frac{LI_{01}}{2L\underline{s} + R} = \frac{I_{01}}{2}\frac{1}{\underline{s} + R/(2L)}$$

Комплексан одзив

$$\boxed{i_{L_1}(t) = i_{L_2}(t) = i_2(t) = \frac{I_{01}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}, \quad t > 0}$$

Одзив: струја КС