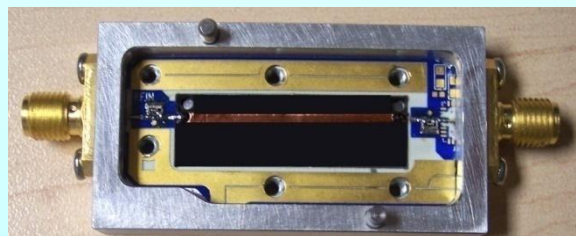
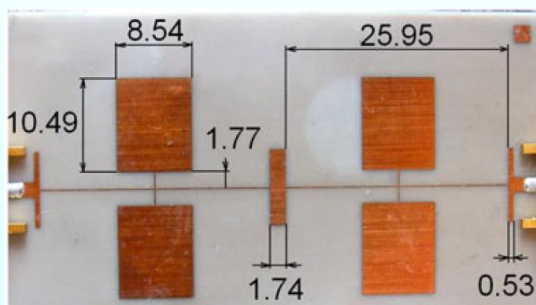


Теорија електричних кола



Милка Потребић

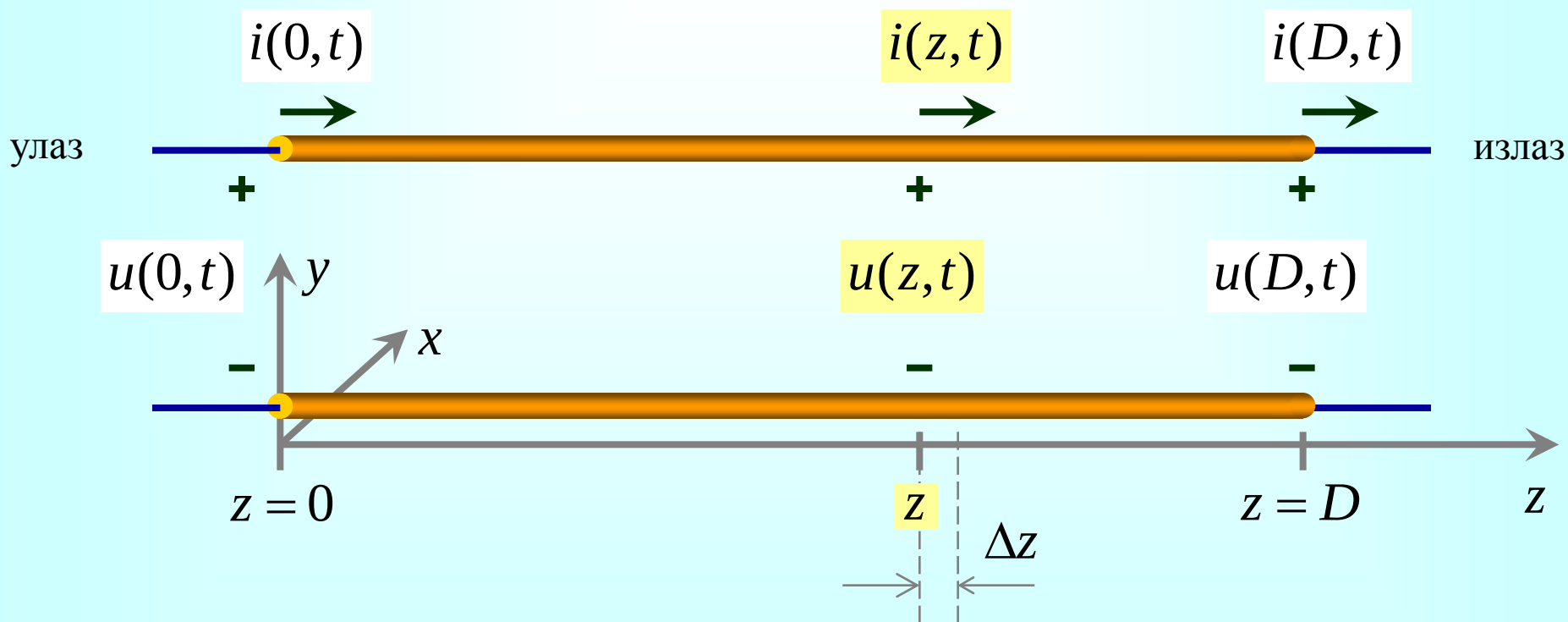




Водови

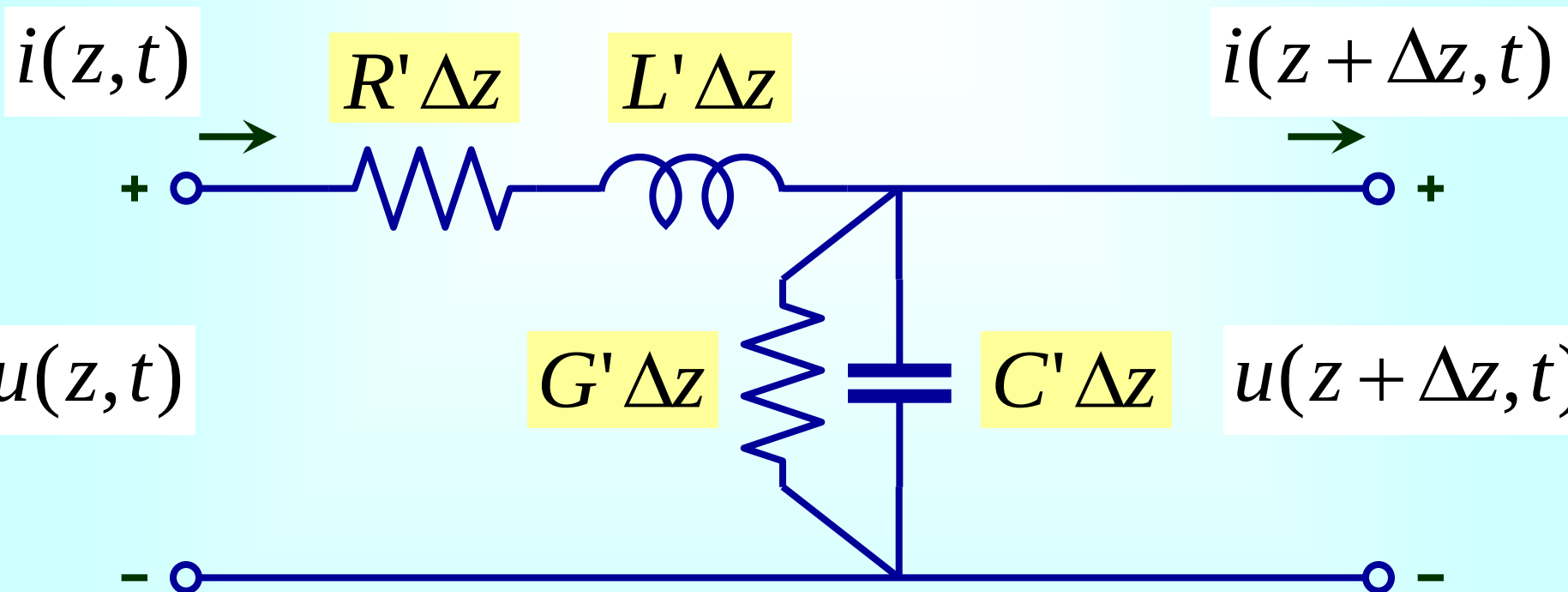
временски непроменљиви
линеарни, са устаљеним
простопериодичним одзивом

Шематска представа вода

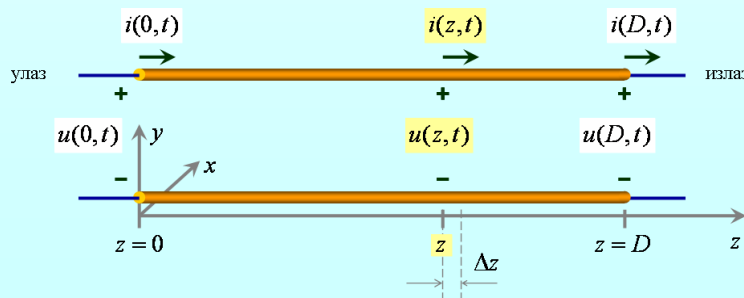


Основни параметри вода су **подужна отпорност, R'** , **подужна индуктивност, L'** , **подужна капацитивност, C'** , и **подужна проводност, G'** , и зову се *примарни параметри*

Модел кратког одсечка вода



електрични елемент вод

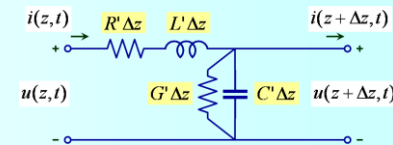


шематска ознака

физички вод (имплементација)



тржишно набављива направа



Једначине телеграфичара

$$-\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = R' i(z,t) + L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G' u(z,t) + C' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

Дуж вода се простире
талас напона и струје

Таласне једначине
напона и струје

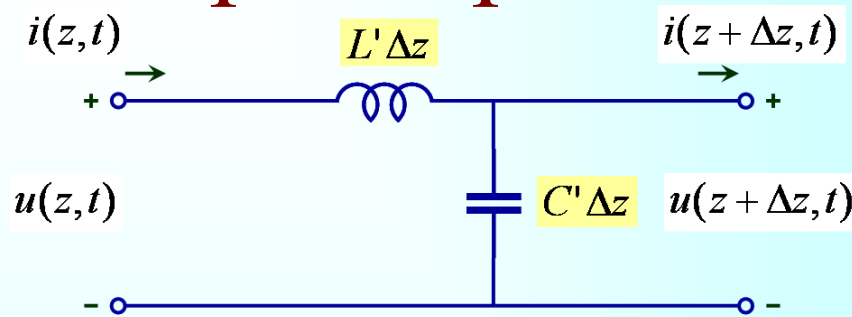
$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = G' R' u(z,t) + (C' R' + G' L') \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + C' L' \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = G' R' i(z,t) + (C' R' + G' L') \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + C' L' \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Идеалан вод: нема губитака, константни параметри

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} &= L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= C' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} &= C' L' \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} &= C' L' \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}$$



Брзина простирања

$$v = \frac{1}{\sqrt{C' L'}}$$

Карактеристична импеданса

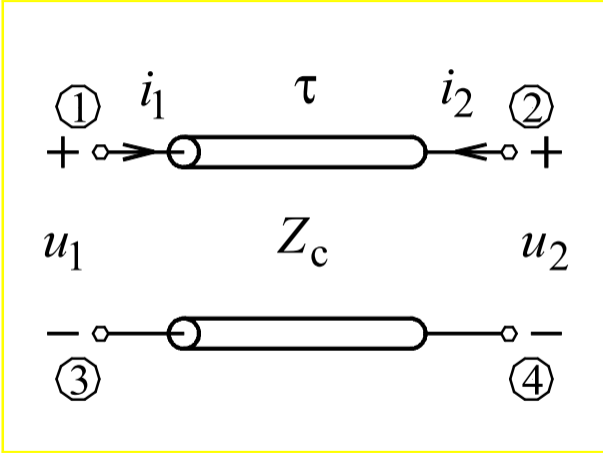
$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$u(z,t) = F_1(t - z/v) + F_2(t + z/v)$$

Опште решење

$$i(z,t) = \frac{1}{Z_c} F_1(t - z/v) - \frac{1}{Z_c} F_2(t + z/v)$$

Идеалан вод дужине D

Назив	Графички симбол	Карактеристика
Вод		$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$ Z_c је отпорност, јединица Ω, и назива се карактеристична импеданса вода. τ је време, јединица s, и назива се кашњење вода.

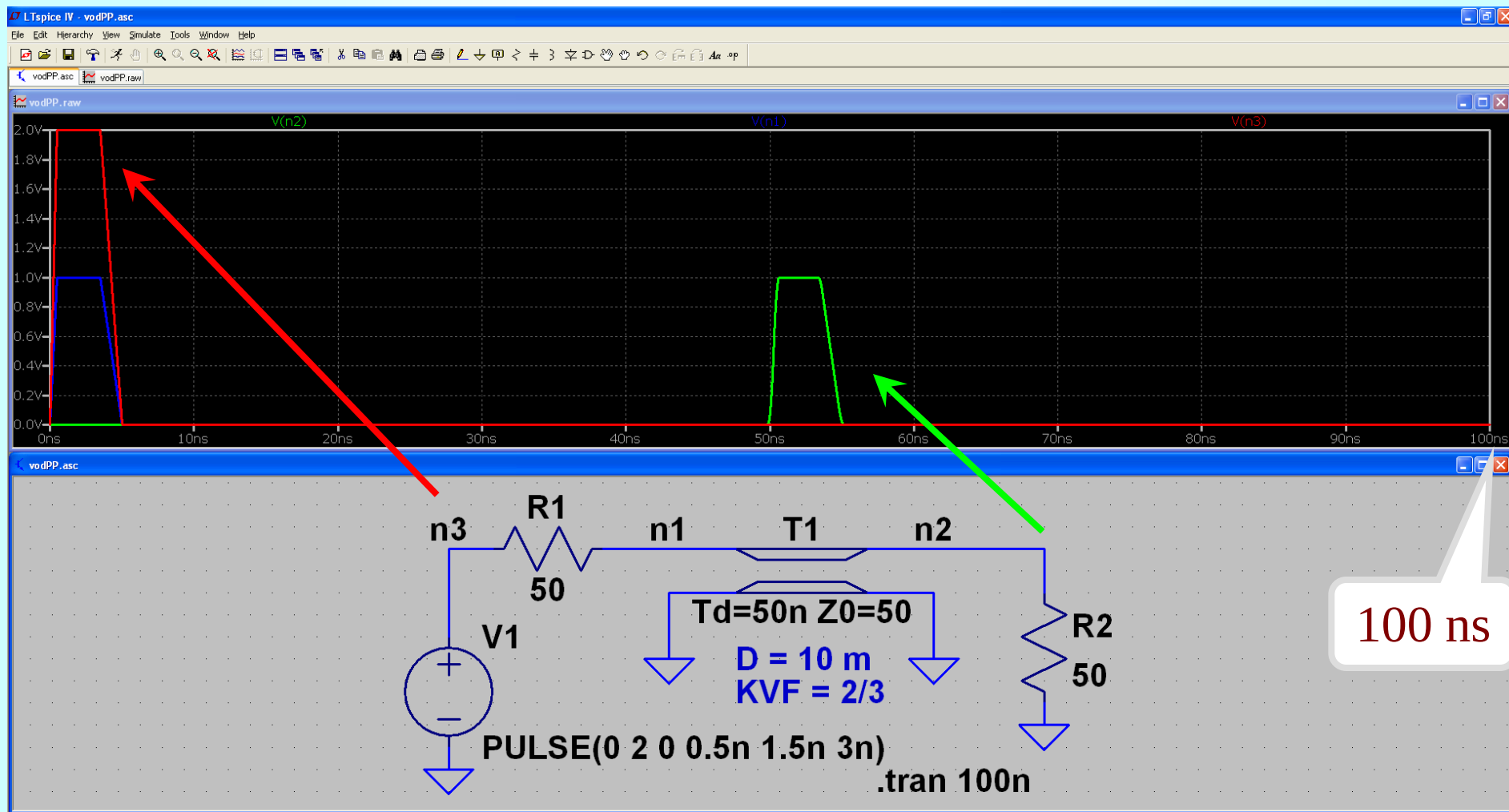
$$c_0 = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\tau = \frac{D}{v} = D \sqrt{C' L'} = \frac{D}{K_{VF} c_0}$$

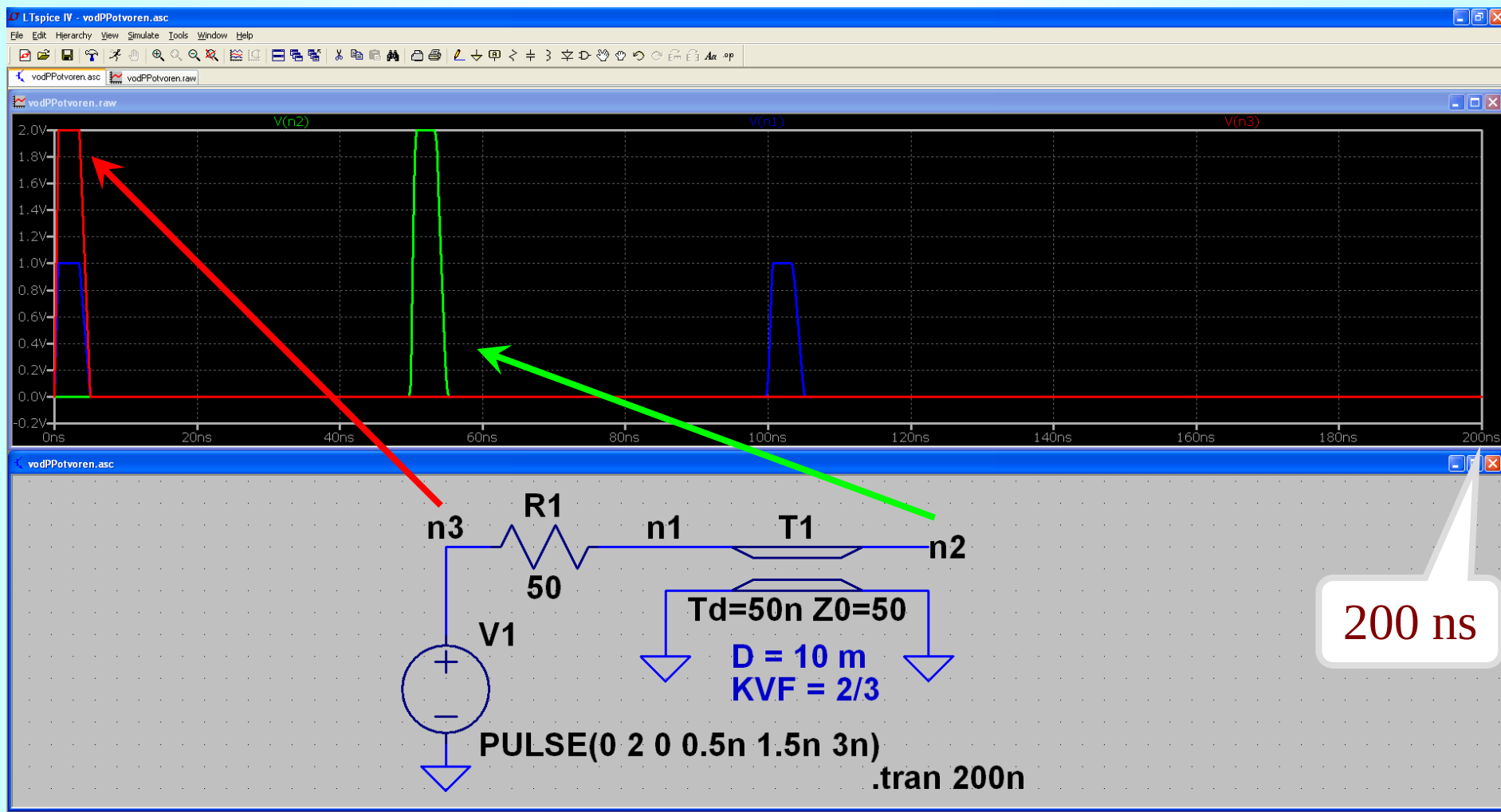
Velocity Factor

SPICE **T** element, ideal transmission line, **Txxx n1 n3 n2 n4 Z0=Zc Td=tau**

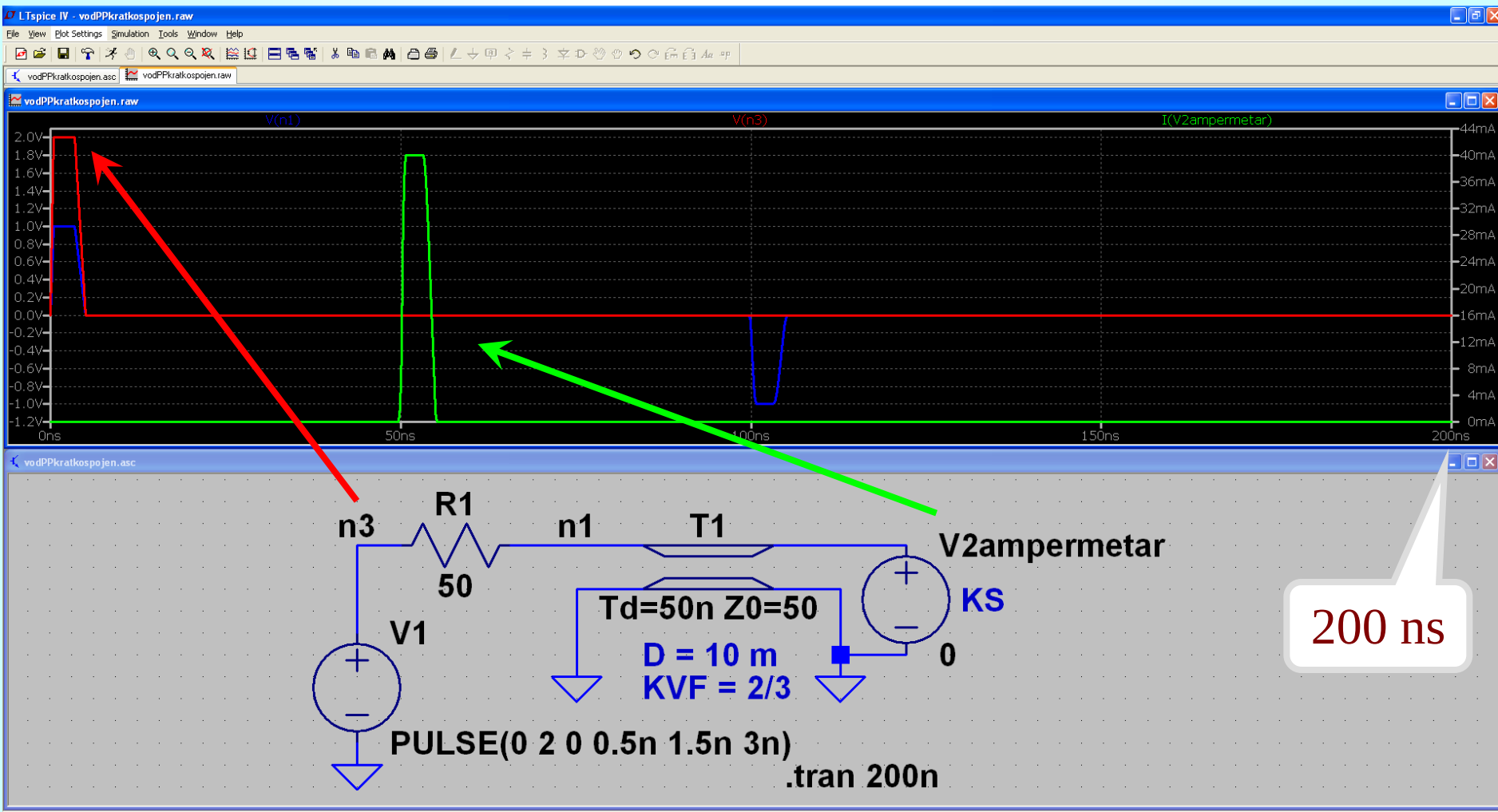
Коло са идеалним водом (1)



Коло са идеалним водом (2)



Коло са идеалним водом (3)



Вод са устаљеним простопериодичним одзивом

$$u(z,t) = \sqrt{2}U(z) \cos(\omega t + \theta(z))$$

$$\underline{U}(z) = U(z) e^{j\theta(z)}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$i(z,t) = \sqrt{2}I(z) \cos(\omega t + \psi(z))$$

$$\underline{I}(z) = I(z) e^{j\psi(z)}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

Примењујемо фазорску трансформацију на леву и десну страну једначина вода.

Једначине телеграфичара за фазоре
(комплексне представнике)

Таласне једначине за фазоре
(комплексне представнике)

$$-\frac{d\underline{U}(z)}{dz} = \underline{Z}' \underline{I}(z)$$

$$\underline{Z}' = R' + j\omega L'$$

Подужна импеданса вода

$$\frac{d^2 \underline{U}(z)}{dz^2} = \underline{Y}' \underline{Z}' \underline{U}(z)$$

$$-\frac{d\underline{I}(z)}{dz} = \underline{Y}' \underline{U}(z)$$

$$\underline{Y}' = G' + j\omega C'$$

Подужна адмитанса вода

$$\frac{d^2 \underline{I}(z)}{dz^2} = \underline{Y}' \underline{Z}' \underline{I}(z)$$

Опште решење комплексних једначина телеграфичара

$$\frac{d^2 \underline{U}(z)}{dz^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U}(z) = 0$$

$$\underline{U}(z) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}z}$$

$$\underline{I}(z) = -\frac{1}{\underline{Z}'} \frac{d\underline{U}(z)}{dz}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{Y}_c \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{Y}_c \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}z}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Y}' \underline{Z}'} = \alpha + j\beta$$

Коефицијент
простирања

Коефицијент
слабљења

Фазни
коефицијент

$$\underline{Y}_c = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}'} = \sqrt{\frac{\underline{Y}'}{\underline{Z}'}}$$

Карактеристична
адмитанса

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{\underline{Y}_c} = \sqrt{\frac{\underline{Z}'}{\underline{Y}'}}$$

Карактеристична
импеданса

Секундарни параметри вода

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

- Коефицијент простирања (propagation constant) и карактеристична импеданса (characteristic impedance, surge impedance, natural impedance) су **секундарни параметри** вода
- Секундарни параметри зависе од примарних параметара и учестаности
- Коефицијент слабљења и фазни коефицијент зависе од учестаности
- Губици у воду се описују подужном отпорношћу и подужном проводношћу, као примарним параметрима, и коефицијентом слабљења као секундарним параметром
- Ако се губици у воду занемарују, то значи да ће бити једнаки **нули** подужна отпорност, подужна проводност и коефицијент слабљења
- Карактеристична импеданса вода занемарљивих губитака је **реална**, не зависи од учестаности, и једнака је квадратном корену количника подужне индуктивности и подужне капацитивности

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$R' = 0, \quad G' = 0 \\ \alpha = 0$$

$$R' = 0, \quad G' = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L'C'}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{L'C'}$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_c \in \mathbf{R}$$

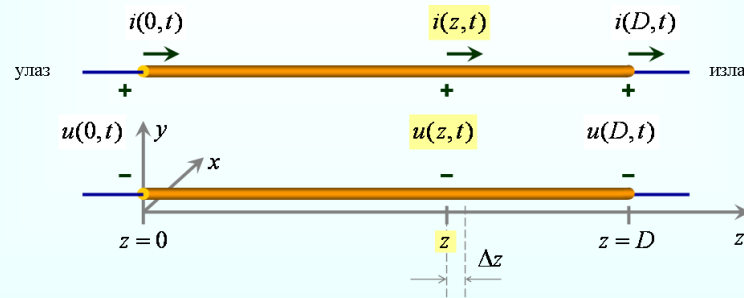
Тренутне вредности напона и струје на воду

$$\underline{U}(z) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}z}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{Y}_c \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{Y}_c \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}z}$$

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\theta_1} \quad \underline{Y}_c = Y_c e^{j\nu_c}$$

$$\underline{A}_2 = A_2 e^{j\theta_2}$$



$$u(z, t) = \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_1) + \sqrt{2}A_2 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_2)$$

$$i(z, t) = \sqrt{2}Y_c A_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_1 + \nu_c) + \sqrt{2}Y_c A_2 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_2 + \nu_c)$$

У сваком пресеку z напон и струја на воду су простопериодични са угаоном учестаности ω

Таласна дужина и фазна брзина

- Таласна дужина на воду је најкраће растојање на воду за које је промена фазе напона или струје на воду једнака 2π
- Таласна дужина на воду без губитака је просторна периода напона и струје на воду
- Фазна брзина на воду је брзина којом се у правцу и смеру простирања таласа креће замишљена тачка константне фазе; другим речима, то је једнолика брзина којом би требало да се креће замишљени посматрач дуж z -осе да би фаза напона и струје прогресивног таласа била за њега непроменљива

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

Брзина простирања таласа

- Брзина простирања електромагнетских таласа на воду је једнака фазној брзини
- Показује се да је брзина простирања реципрочна вредност квадратног корена производа пермитивности и пермеабилности диелектрика вода
- За диелектрике који се користе у практичним водовима пермеабилност је једнака пермеабилности вакуума
- Реципрочна вредност квадратног корена из релативне пермитивности диелектрика вода се назива **фактор брзине** и обично се изражава у процентима
- Показује се да је производ подужне индуктивности и подужне капацитивности вода једнак производу релативне пермитивности и релативне пермеабилности диелектрика водадиелектрика

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$L'C' = \epsilon\mu$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Константе у прорачуну водова

Брзина простирања електромагнетских таласа у вакуму

$$c_0 = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

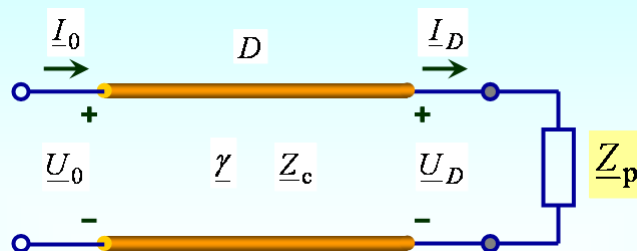
Пермеабилност вакума (магнетска константа)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

$$\pi = 3,141592\,654\dots$$

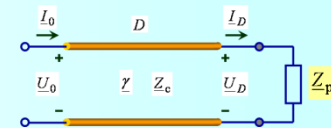
Пермитивност вакума (електрична константа)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0} = 8,854187818 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$



Ограничен вод

временски непроменљив
линеаран, са устаљеним
простопериодичним одзивом



Комплексне једначине ограниченог вода

$$\begin{aligned}\underline{U}(z) &= A_1 e^{-\underline{\gamma}z} + A_2 e^{\underline{\gamma}z} \\ \underline{I}(z) &= \underline{Y}_c A_1 e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{Y}_c A_2 e^{\underline{\gamma}z}\end{aligned}$$

Гранични услови

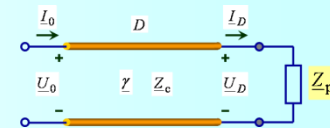
$$\underline{U}(D) = \underline{U}_D \quad \underline{I}(D) = \underline{I}_D$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (\underline{U}_D + \underline{Z}_c \underline{I}_D) e^{\underline{\gamma}D}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (\underline{U}_D - \underline{Z}_c \underline{I}_D) e^{-\underline{\gamma}D}$$

$$\underline{U}(z) = \cosh(\underline{\gamma}(D-z)) \underline{U}_D + \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}(D-z)) \underline{I}_D$$

$$\underline{I}(z) = \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}(D-z)) \underline{U}_D + \cosh(\underline{\gamma}(D-z)) \underline{I}_D$$



Шта су функције $\cosh$ и $\sinh$?

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

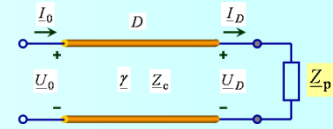
$$\cosh(jx) = \cos(x)$$

$$\sinh(jx) = j\sin(x)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{1}{\coth(x)}$$

$$\tanh(jx) = j\tan(x)$$

$$j = \sqrt{-1}$$



Рефлектован талас

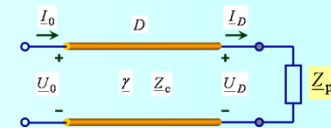
$$\underline{U}(z) = A_1 e^{-\underline{\gamma}z} + A_2 e^{\underline{\gamma}z} = \underline{U}_{\text{inc}}(z) + \underline{U}_{\text{ref}}(z)$$

$$\underline{I}(z) = \underline{Y}_c A_1 e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{Y}_c A_2 e^{\underline{\gamma}z} = \underline{I}_{\text{inc}}(z) + \underline{I}_{\text{ref}}(z)$$

У решењу једначина телеграфичара, сабирак који у изложиоцу има предзнак **плус** назива се **рефлектован талас**

$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{U}_{\text{ref}}(z)}{\underline{U}_{\text{inc}}(z)} = \frac{A_2}{A_1} e^{2\underline{\gamma}z} = \frac{\underline{U}_D - \underline{Z}_c \underline{I}_D}{\underline{U}_D + \underline{Z}_c \underline{I}_D} e^{-2\underline{\gamma}(D-z)}$$

Коефицијент рефлексије на воду



Коефицијент рефлексије на потрошачу

Коефицијент рефлексије на потрошачу
је коефицијент рефлексије на крају вода,
на месту где се прикључује потрошач

$$\underline{\rho}(z) = \underline{\rho}_p e^{-2\underline{\gamma}(D-z)}$$

$$\underline{\rho}_p = \underline{\rho}(D) = \frac{\underline{U}_D - \underline{Z}_c \underline{I}_D}{\underline{U}_D + \underline{Z}_c \underline{I}_D} = \frac{\underline{Z}_p - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_c}$$

$$\underline{\rho}_{p,KS} = -1$$

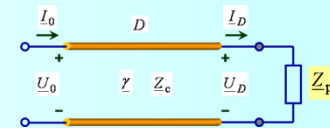
Потрошач је кратак спој

$$\underline{\rho}_{p,OV} = 1$$

Потрошач је отворена веза

$$\underline{\rho}_{p,c} = 0$$

Импеданса
потрошача је
једнака
карактеристичној
импеданси вода



Улазна импеданса

$$\underline{Z}(z) = \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} = \frac{\cosh(\underline{\gamma}(D-z))\underline{U}_D + \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}(D-z))\underline{I}_D}{\underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}(D-z))\underline{U}_D + \cosh(\underline{\gamma}(D-z))\underline{I}_D}$$

$$\underline{Z}(z)|_{\underline{U}_D=0} = \underline{Z}_c \tanh(\underline{\gamma}(D-z))$$

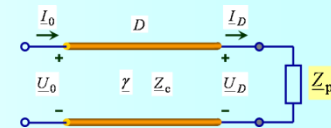
Потрошач је кратак спој

$$\underline{Z}(z)|_{\underline{I}_D=0} = \underline{Z}_c \coth(\underline{\gamma}(D-z))$$

Потрошач је отворена веза

$$\underline{Z}(z)|_{\frac{\underline{U}_D}{\underline{I}_D}=\underline{Z}_p} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_p + \underline{Z}_c \tanh(\underline{\gamma}(D-z))}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_p \tanh(\underline{\gamma}(D-z))}$$

$$\cosh(\underline{\gamma}(D-z)) \neq 0$$



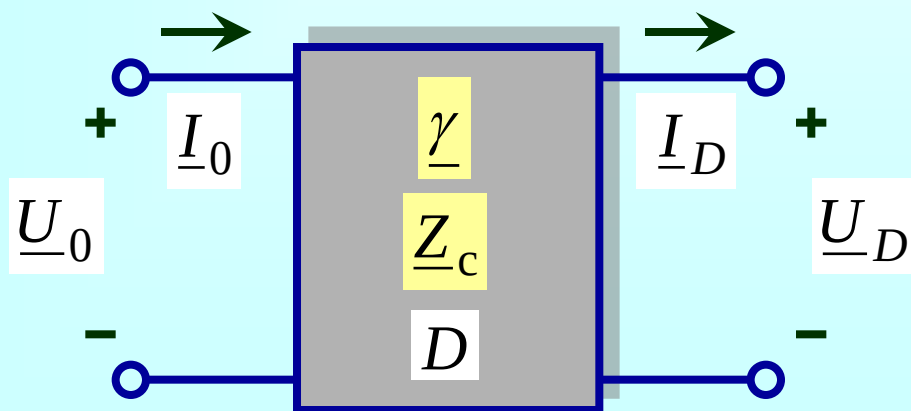
Једначине улаз-излаз

$$\underline{U}_0 = \cosh(\underline{\gamma}D) \underline{U}_D + \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}D) \underline{I}_D$$

$$\underline{I}_0 = \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}D) \underline{U}_D + \cosh(\underline{\gamma}D) \underline{I}_D$$

Једначине улаз-излаз повезују напон и струју на почетку вода са напоном и струјом на **крају** вода

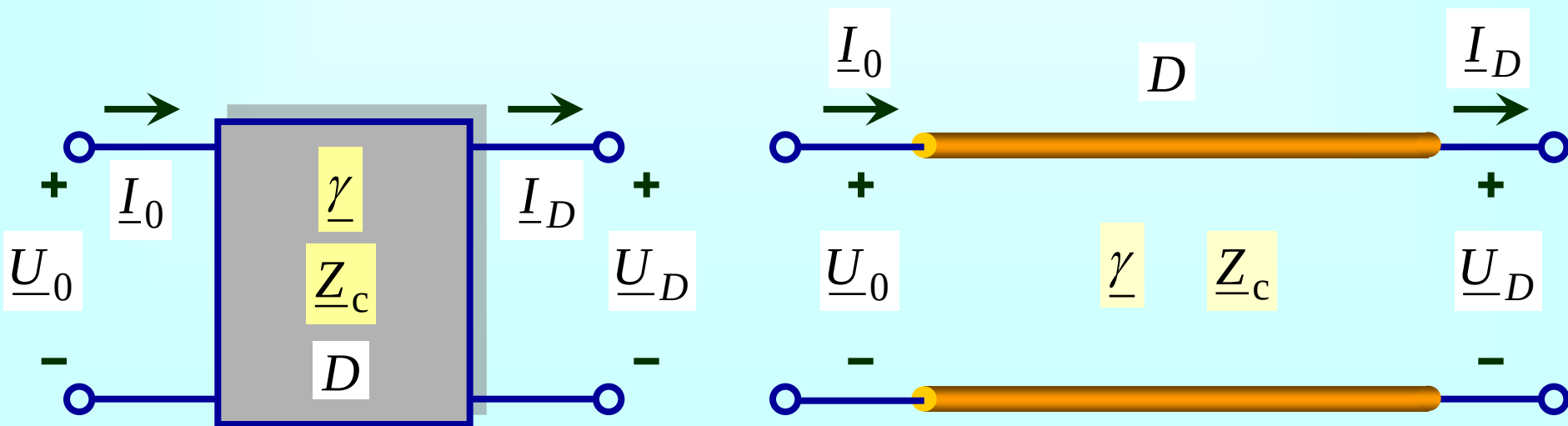
Ограничен вод се може представити као мрежа са два приступа – четири краја

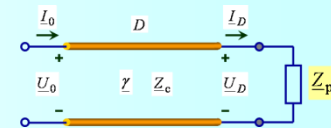


Коефицијенти у једначинама улаз-излаз садрже коефицијент простирања и карактеристичну импедансу, који се називају *секундарни параметри* вода

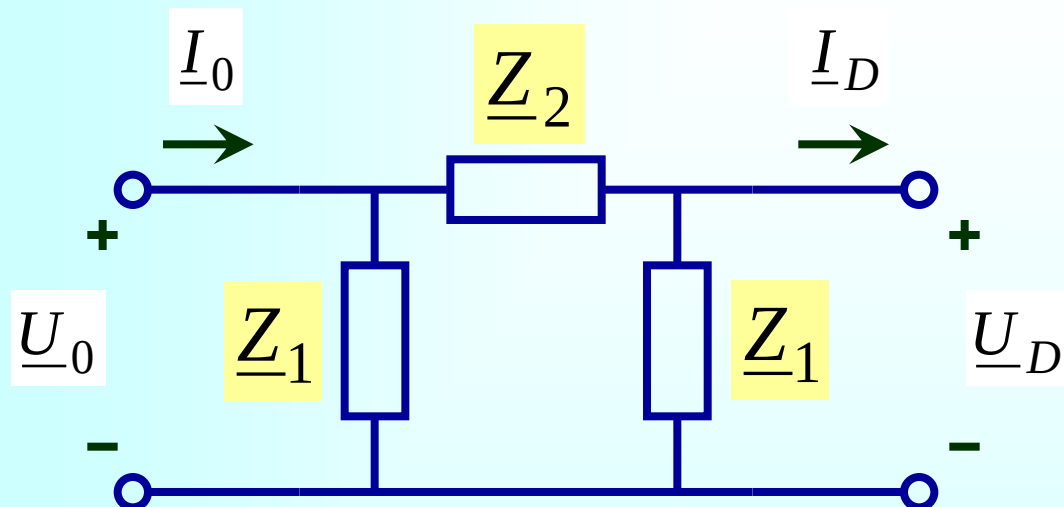
ABCD-параметри ограниченог вода

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{A}\underline{U}_D + \underline{B}\underline{I}_D \\ \underline{I}_0 &= \underline{C}\underline{U}_D + \underline{D}\underline{I}_D \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \underline{A} &= \cosh(\underline{\gamma}D) & \underline{B} &= \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}D) \\ \underline{C} &= \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}D) & \underline{D} &= \cosh(\underline{\gamma}D) \end{aligned}$$





Заменска П-шема одсечка вода

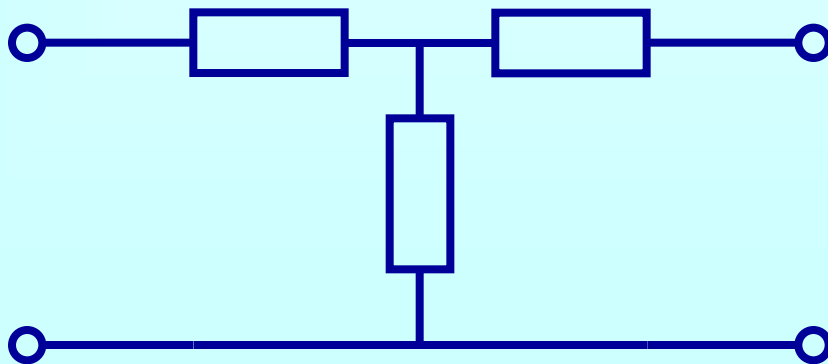


$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \coth\left(\frac{1}{2} \underline{\gamma} D\right)$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma} D)$$

Импедансе заменске шеме
зависе од учестаности!

Одредити импедансе заменске
Т-шеме одсечка вода

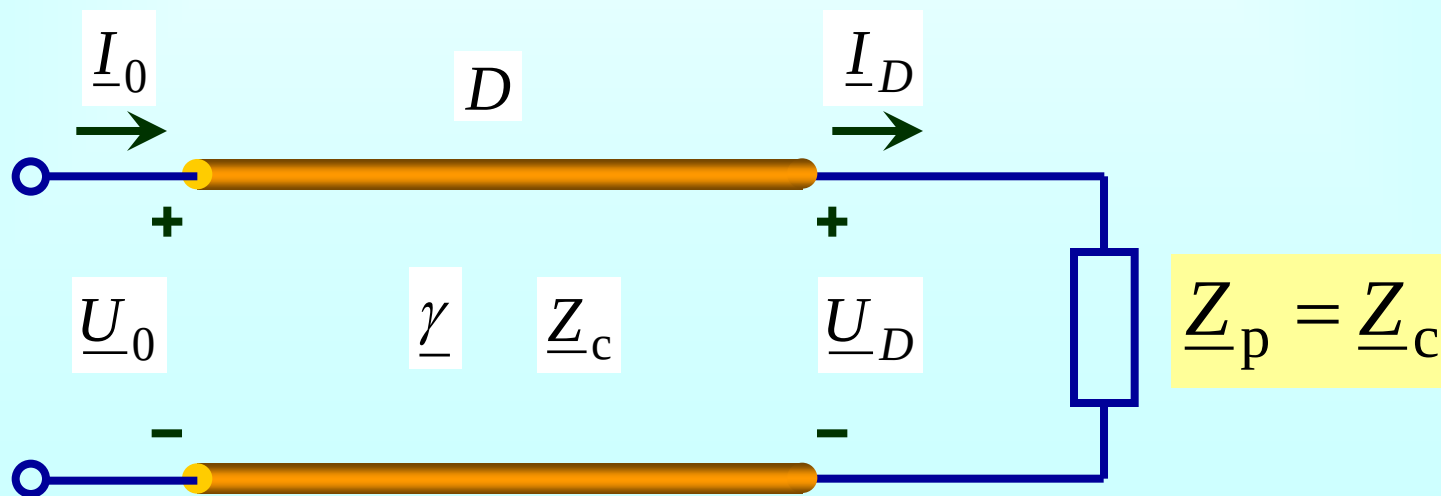


Прилагођен вод

Вод је *прилагођен* ако не постоји рефлектован талас

$$\underline{U}_{\text{ref}}(z) = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \Rightarrow \underline{\rho}(z) = 0 \Rightarrow \underline{U}_D - \underline{Z}_c \underline{I}_D = 0$$

Ограничен вод је прилагођен ако је завршен потрошачем чија је импеданса једнака карактеристичној импеданси вода



Једначине прилагођеног вода

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_0 e^{-\underline{\gamma}z}$$

$$\underline{U}_D = \underline{Z}_c \underline{I}_D$$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_D e^{\underline{\gamma}D}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{Y}_c \underline{U}_0 e^{-\underline{\gamma}z}$$

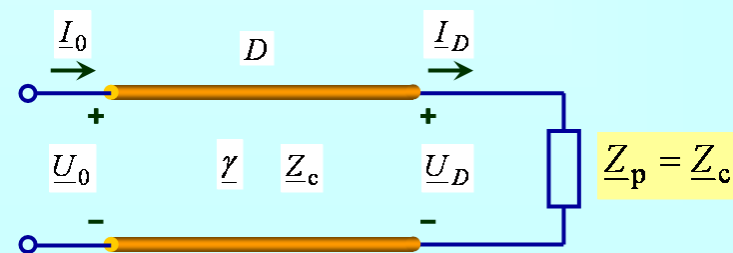
$$\underline{\rho}(z) = 0$$

$$\underline{I}_0 = \underline{Y}_c \underline{U}_D e^{\underline{\gamma}D}$$

$$\underline{Z}(z) = \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} = \underline{Z}_c$$

Прилагођен вод има исте једначине као и неограничен вод. Његова улазна импеданса је једнака карактеристичној импеданси и **не зависи од дужине**.

Прилагођење вода је често веома важно у пракси. Ако потрошач има импедансу која се разликује од карактеристичне импедансе вода, онда се додају динамички елементи и огранци вода да би рефлексован талас на воду био једнак нули.



Вод без губитака

временски непроменљив
линеаран, са устаљеним
простопериодичним одзивом

Параметри вода без губитака

$$R' = 0$$

$$\alpha = 0$$

Коефицијент слабљења (α)
је једнак нули

$$G' = 0$$

$$\beta = \omega \sqrt{C' L'}$$

Фазни коефицијент (β) линеарно
зависи од учестаности

$$\underline{Z}' = j\omega L'$$

$$\underline{Y}' = j\omega C'$$

$$\underline{\gamma} = j\omega \sqrt{C' L'}$$

Коефицијент простирања ($\underline{\gamma}$)
је чисто имагинаран и
линеарно зависи од учестаности

$$v = \frac{1}{\sqrt{C' L'}}$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Карактеристична импеданса ($\underline{Z}_c$)
не зависи од учестаности и
чисто је реална

Фазна брзина (v)
не зависи од учестаности

Електрична дужина вода

$$\Theta = \beta D = 2\pi \frac{D}{\lambda}$$

Електрична дужина вода (Θ) је производ дужине вода и фазног коефицијента

Електрична дужина вода је по природи угао, па се изражава у степенима или радијанима

Вод чија је дужина једнака половини таласне дужине се зове *полуталасни вод*, а вод чија је дужина једнака четвртини таласне дужине се зове *четвртталасни вод* (ламбда-четвртински)

$$n = \frac{D}{\lambda} = \frac{\Theta}{2\pi}$$

Нормализована дужина вода (n) је количник дужине вода и таласне дужине

Једначине вода без губитака

$$\underline{U}(z) = \cos(\beta(D-z))\underline{U}_D + jZ_c \sin(\beta(D-z))\underline{I}_D$$

$$\underline{I}(z) = jY_c \sin(\beta(D-z))\underline{U}_D + \cos(\beta(D-z))\underline{I}_D$$

$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{U}_D - Z_c \underline{I}_D}{\underline{U}_D + Z_c \underline{I}_D} e^{-2j\beta(D-z)}$$

$$\underline{U}_0 = \cos(\Theta)\underline{U}_D + jZ_c \sin(\Theta)\underline{I}_D$$

$$\underline{I}_0 = jY_c \sin(\Theta)\underline{U}_D + \cos(\Theta)\underline{I}_D$$

Улазна импеданса на почетку вода

$$\underline{Z}(0)|_{\underline{U}_D=0} = j Z_c \tan(\Theta)$$

Потрошач је кратак спој

$$\underline{Z}(0)|_{\underline{I}_D=0} = -j Z_c \cot(\Theta)$$

Потрошач је отворена веза

$$\underline{Z}(0) = Z_c \frac{\underline{Z}_p + j Z_c \tan(\Theta)}{Z_c + j \underline{Z}_p \tan(\Theta)} \bigg|_{\substack{\underline{U}_D = \underline{Z}_p \\ \underline{I}_D}}$$

Краткоспојени или отворени вод се назива *огранак вода*

$$\cos(\Theta) \neq 0$$

$$\underline{Z}(0) = \frac{Z_c^2}{\underline{Z}_p} \bigg|_{\cos(\Theta)=0, \frac{\underline{U}_D}{\underline{I}_D} = \underline{Z}_p}$$

Дужина вода је једнака четвртини таласне дужине

Периодичност улазне импедансе

$$\underline{Z}(0) = Z_c \frac{\underline{Z}_p + jZ_c \tan(\Theta)}{Z_c + j\underline{Z}_p \tan(\Theta)} = Z_c \frac{\underline{Z}_p + jZ_c \tan(\Theta + k\pi)}{Z_c + j\underline{Z}_p \tan(\Theta + k\pi)}$$

Улазна импеданса вода без губитака је **периодична** функција електричне дужине са периодом **π**

$$\underline{Z}(0) = Z_c \frac{\underline{Z}_p + jZ_c \tan(\frac{2\pi}{\lambda} D)}{Z_c + j\underline{Z}_p \tan(\frac{2\pi}{\lambda} D)} = Z_c \frac{\underline{Z}_p + jZ_c \tan(\frac{2\pi}{\lambda} (D + k \frac{\lambda}{2}))}{Z_c + j\underline{Z}_p \tan(\frac{2\pi}{\lambda} (D + k \frac{\lambda}{2}))}$$

Улазна импеданса вода без губитака је **периодична** функција дужине са периодом **$\lambda/2$**

k је цео број

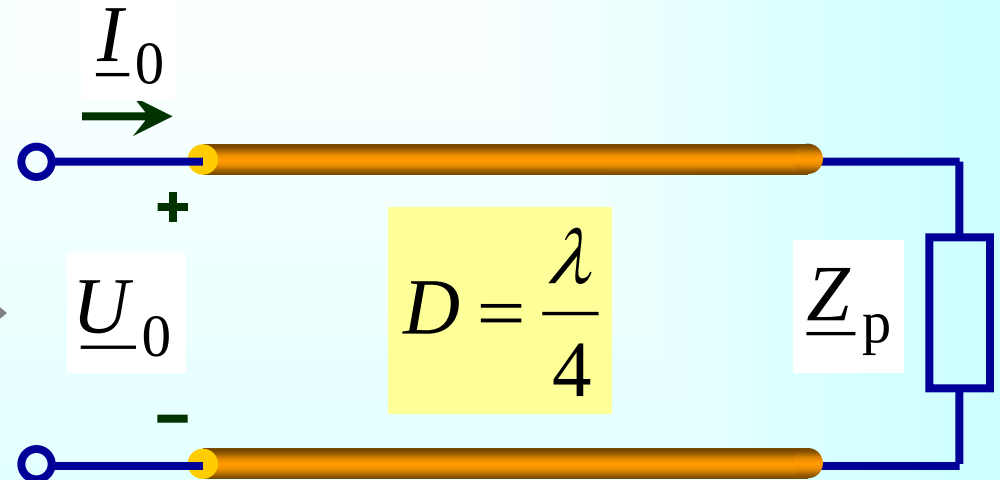
Четвртталасни вод без губитака

$$\Theta = \beta D = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{U}_0 = jZ_c \underline{I}_D$$

$$\underline{I}_0 = jY_c \underline{U}_D$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = Z_c^2 \frac{\underline{I}_D}{\underline{U}_D} = \frac{Z_c^2}{\underline{Z}_p}$$



Улазна импеданса је обрнуто сразмерна импеданси потрошача, па се четвртталасни вод без губитака назива **инвертор импедансе**

Питања

Водови

(5) РФ/микроталасни коаксијални кабл RG58C/U дужине 1 m (један метар) је моделован као идеалан вод без губитака чији су примарни параметри $C' = 100 \text{ pF/m}$, $L' = 250 \text{ nH/m}$.
Колико је кашњење овог вода?

5 ns

(7) Колики су примарни параметри и кашњење вода занемарљивих губитака (Belden RG6 за системе CCTV, CATV, SMATV) карактеристичне импедансе 75Ω и сачинитеља брзине $K_{VF} = 82\%$ (velocity factor) дужине 1 m ?

$$C' = 54.2 \frac{\text{pF}}{\text{m}}, L' = 305 \frac{\text{nH}}{\text{m}}$$
$$\tau = 4.1 \text{ ns}$$

(5) Карактеристична импеданса електроенергетског вода са губицима зависи од учестаности

(a) Не

(б) Да ?

(5) Шта је електрична дужина вода без губитака?

Видети предавања.

(5) Надземни далековод дужине 300 km је моделован као идеалан вод без губитака са ваздушним диелектриком.
Колико је кашњење овог вода?

1 ms

(6) Известити једначине телеграфичара вода. Дати потребна појмовна одређења, написати одговарајуће изразе, нацртати потребне слике, и објаснити величине које се у извођењу појављују.

Видети предавања.

(5) Енергетски подземни вод (Gas-Insulated Transmission Line, GIL, Siemens) има примарне параметре $C' = 54.5 \text{ nF/km}$, $L' = 0.205 \text{ mH/km}$, $R' = 8.616 \text{ m}\Omega/\text{km}$, $G' = 0$, на учестаности $f = 50 \text{ Hz}$.

Колика је карактеристична импеданса?
Колики је коефицијент простирања?

$$\underline{Z}_c = (61.5 - j4.09) \Omega$$

$$\underline{Z}_c = (61.6 \Omega) \angle (-0.0665 \text{ rad} = -3.81^\circ)$$

$$\underline{\gamma} = 10^{-6} (0.0701 + j1.05) \text{ m}^{-1}$$

$$\underline{\gamma} = (1.055 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}) \angle (1.504 \text{ rad} = 86.2^\circ)$$

(4) UTP CAT6 LAN (Unshielded Twisted Pair, Category 6, Local Area Network) кабл за рачунарске мреже, дужине 100 m, је моделован као идеалан вод без губитака чији су примарни параметри $C' = 56 \text{ pF/m}$, $L' = 430 \text{ nH/m}$.

$$491 \text{ ns}$$

Колико је кашњење овог вода?

(5) Примарни параметри енергетског вода су $R' = 0.08 \Omega/\text{km}$, $L' = 1.34 \text{ mH/km}$, $C' = 8.6 \text{ nF/km}$, $G' = 37.5 \text{ nS/km}$. Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је $f = 50 \text{ Hz}$. Одредити карактеристичну импедансу и коефицијент простирања.

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$396.725 - 34.586 j$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

$$108.321 \times 10^{-6} + (1.07056 \times 10^{-3}) j$$

(5) Колики су примарни параметри вода без губитака карактеристичне импедансе Z_c и сачинитеља брзине K_{VF} (velocity factor, фактор брзине)?

$$C' = \frac{1}{K_{VF} c_0 Z_c}, \quad L' = \frac{Z_c}{K_{VF} c_0}$$

c_0 је брзина светлости у вакууму

(5) Како се дефинише коефицијент рефлексије на потрошачу вода без губитака?

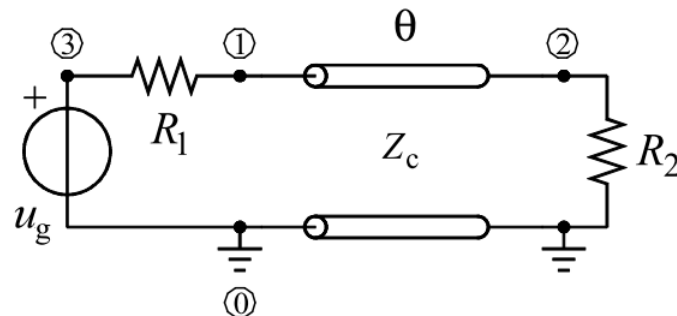
Видети предавања.

(5) Колика треба да буде карактеристична импеданса, а колика најмања електрична дужина, идеалног вода да би снага потрошача R_2 била највећа могућа? Одзив је устаљен простопериодичан.

$$Z_c =$$

$$\theta =$$

Видети задатак: прилагођење по снази.



(5) STP 600 MHz CAT7 LAN (Shielded Twisted Pair, Category 7, Local Area Network) кабл за повезивање сервера 10 Gigabit Ethernet рачунарске мреже, дужине 100 m, је моделован као идеалан вод без губитака чији су примарни параметри $C' = 43 \text{ pF/m}$, $L' = 415 \text{ nH/m}$.

Колико је кашњење овог вода и која је његова карактеристична импеданса?

$$\tau = 422 \text{ ns}$$

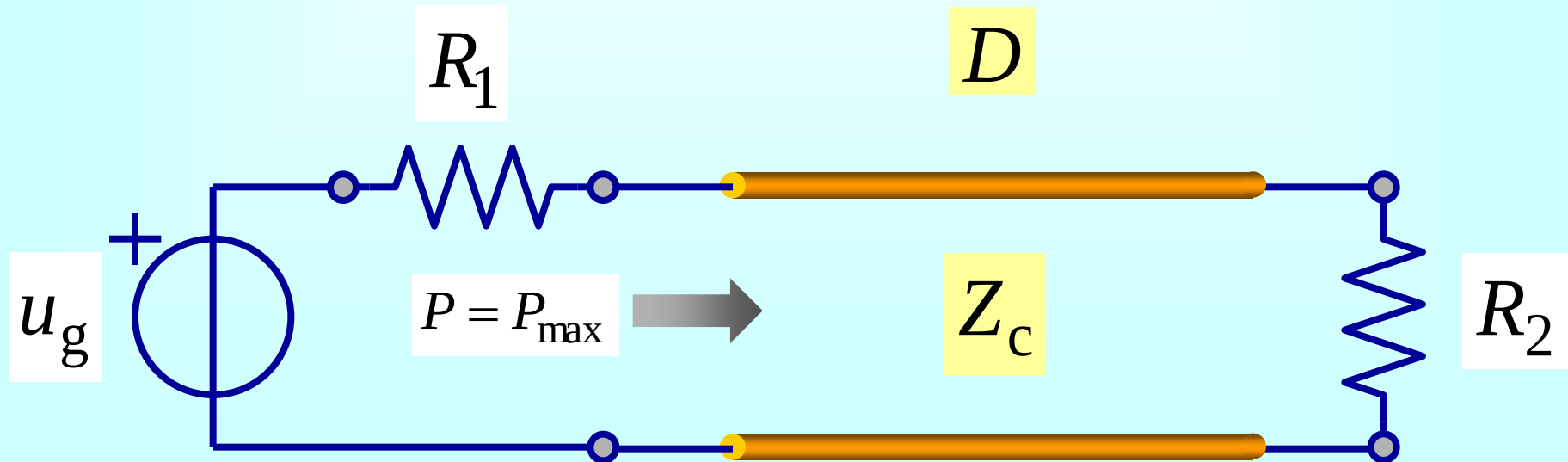
$$Z_c = 98 \Omega$$

Задаци за вежбу

Водови

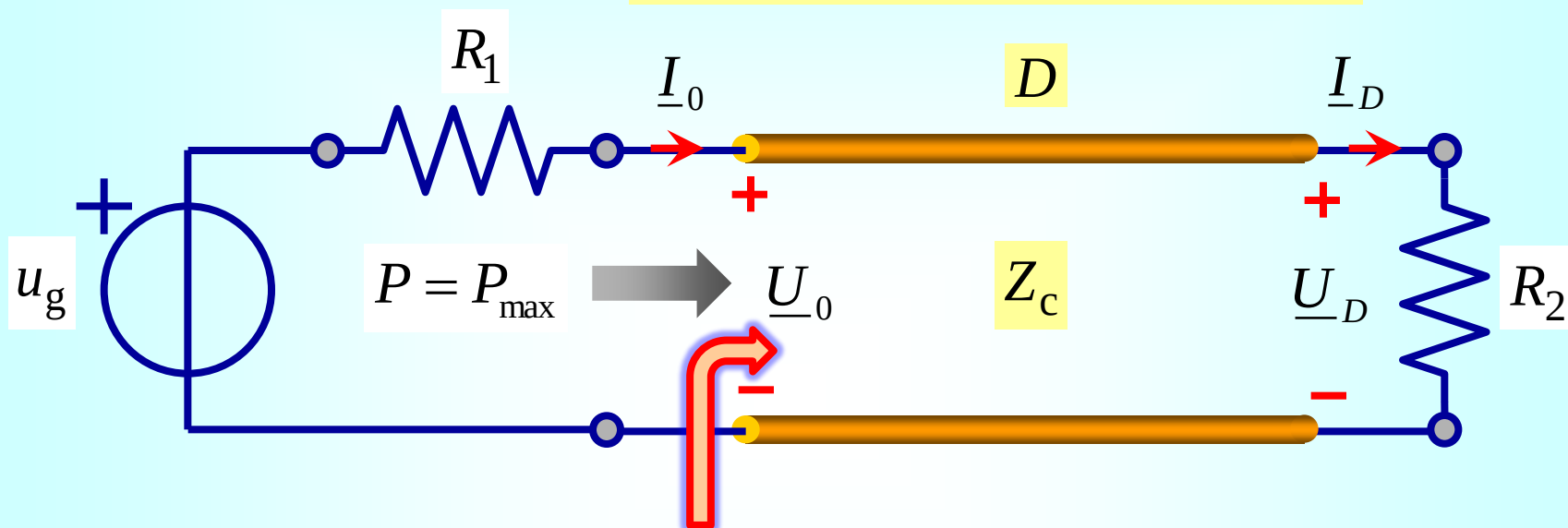
Прилагођење по снази

Вод у колу са слике је без губитака. Одзив је устаљен. Побуда је простопериодична. Одредити електричну дужину вода и карактеристичну импедансу вода тако да средња снага која се предаје воду буде највећа могућа.



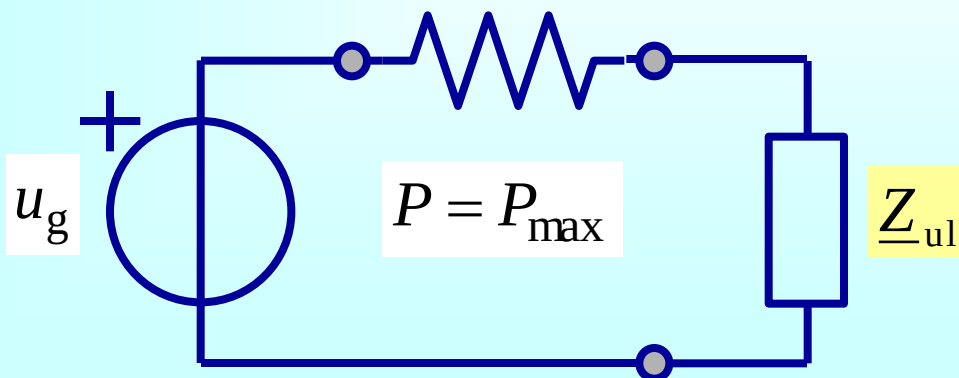
$$\underline{U}_0 = \cos(\Theta) \underline{U}_D + jZ_c \sin(\Theta) \underline{I}_D$$

$$\underline{I}_0 = jY_c \sin(\Theta) \underline{U}_D + \cos(\Theta) \underline{I}_D$$



$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \frac{\cos(\Theta) \underline{U}_D + jZ_c \sin(\Theta) \underline{I}_D}{jY_c \sin(\Theta) \underline{U}_D + \cos(\Theta) \underline{I}_D}$$

$$R_1 = \underline{Z}_g$$



Прилагођење по снази

$$\underline{Z}_{ul} = \underline{Z}_g^*$$

ИЛИ

$$\underline{Z}_{ul}^* = \underline{Z}_g$$

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \frac{\cos(\Theta) \overbrace{\underline{U}_D}^{R_2 \underline{I}_D} + jZ_c \sin(\Theta) \underline{I}_D}{jY_c \sin(\Theta) \underbrace{\underline{U}_D}_{R_2 \underline{I}_D} + \cos(\Theta) \underline{I}_D} = \frac{R_2 \cos(\Theta) + jZ_c \sin(\Theta)}{jY_c R_2 \sin(\Theta) + \cos(\Theta)}$$

$$R_1 = \underline{Z}_g$$

$$\underline{Z}_{ul} = \underline{Z}_g^*$$

$$R_1 = \frac{R_2 \cos(\Theta) + jZ_c \sin(\Theta)}{jY_c R_2 \sin(\Theta) + \cos(\Theta)}$$

$$(R_1 - R_2) \cos(\Theta) + j \sin(\Theta) (Z_c - Y_c R_1 R_2) = 0$$

$$(R_1 - R_2) \cos(\Theta) = 0 \wedge (Z_c - Y_c R_1 R_2) \sin(\Theta) = 0$$

$$(R_1 - R_2)\cos(\Theta) = 0 \wedge (Z_c - Y_c R_1 R_2)\sin(\Theta) = 0$$

$$(1) \cos(\Theta) = 0 \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, 1, 2, 3 \dots \Rightarrow \Theta_{\min} = \frac{\pi}{2}$$

$$Z_c - \frac{1}{Z_c} R_1 R_2 = 0 \Rightarrow Z_c = \sqrt{R_1 R_2}$$

$$(2) R_1 = R_2 = R$$

$$Z_c - \frac{1}{Z_c} R_1 R_2 = 0 \Rightarrow Z_c = \sqrt{R_1 R_2} = R$$

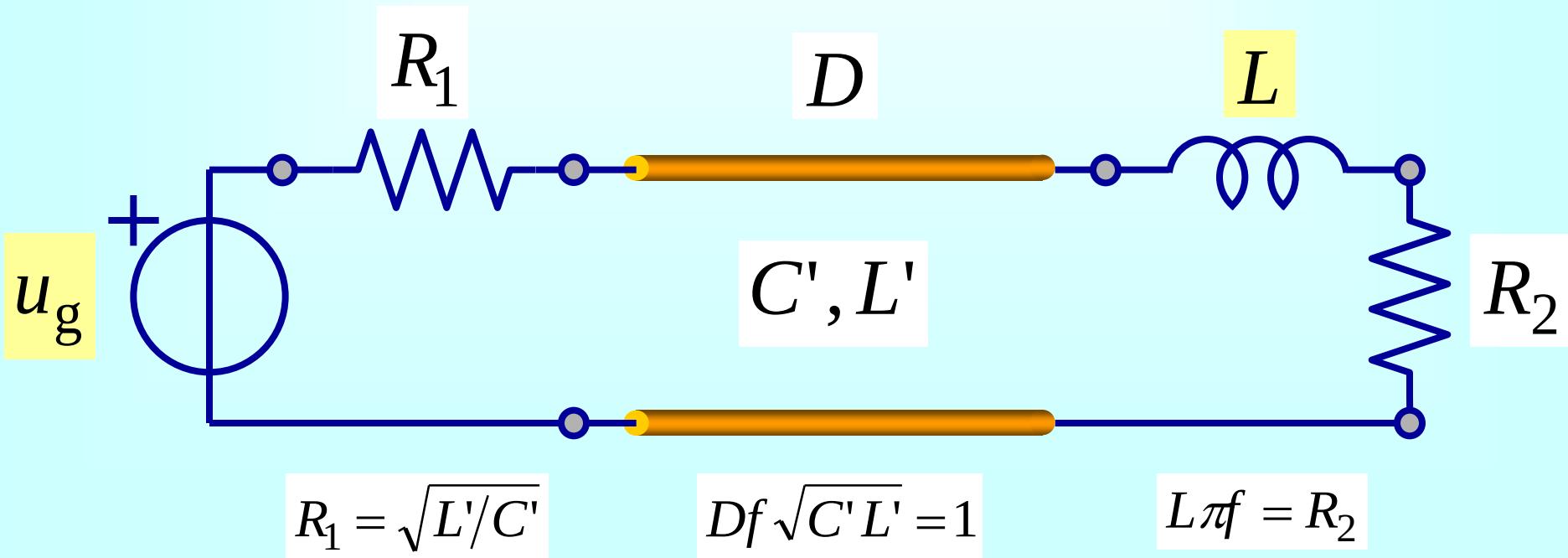
$$(3) R_1 = R_2 = R$$

$$\sin(\Theta) = 0 \Rightarrow \Theta = 0 + k\pi, k = 0, 1, 2, 3 \dots \Rightarrow \Theta_{\min} = \pi$$

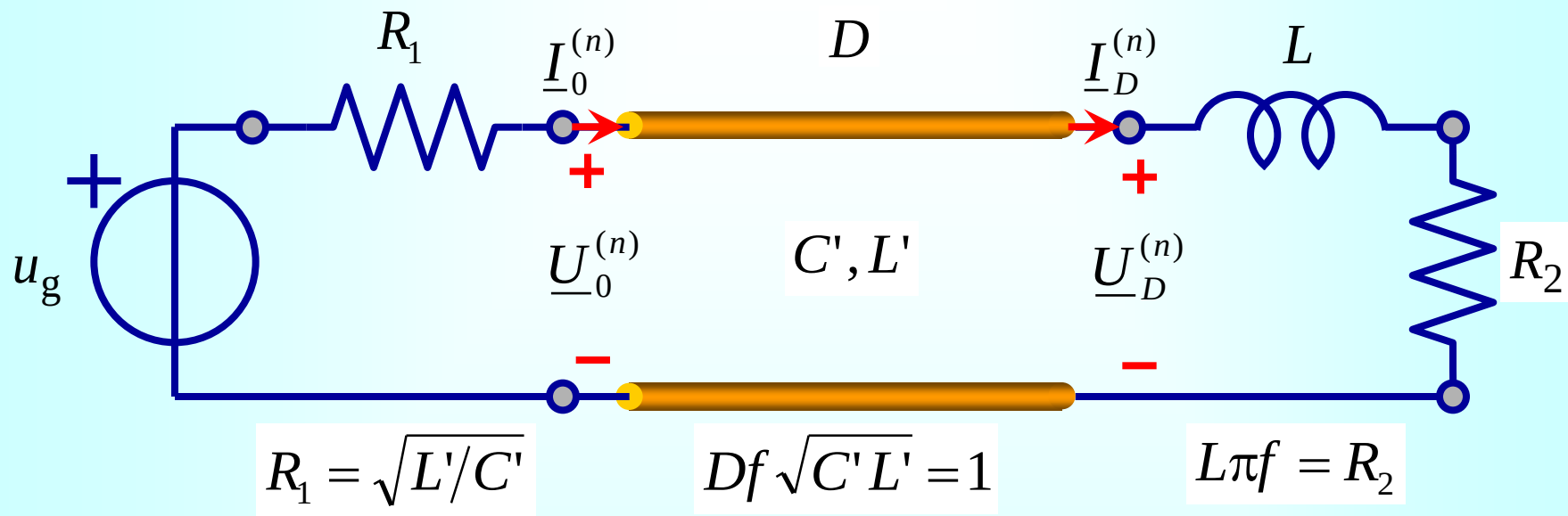
Сложена побуда

Вод у колу са слике је без губитака. Одзив је устаљен.
Одредити струју калема и средњу снагу извора.

$$u_g(t) = \sqrt{2}U \cos(2\pi ft) + U \sin(4\pi ft)$$



Одзив на n -ти хармоник



$$\underline{U}_0^{(n)} = \cos(\Theta^{(n)})\underline{U}_D^{(n)} + jZ_c \sin(\Theta^{(n)})\underline{I}_D^{(n)}$$

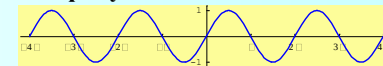
$$\underline{U}_0^{(n)} = \underline{U}_g^{(n)} - R_1 \underline{I}_0^{(n)}$$

$$\underline{I}_0^{(n)} = jY_c \sin(\Theta^{(n)})\underline{U}_D^{(n)} + \cos(\Theta^{(n)})\underline{I}_D^{(n)}$$

$$Z_c = \sqrt{L'/C'}$$

$$\Theta^{(n)} = \beta^{(n)} D = n\omega\sqrt{L'C'}D = n2\pi f\sqrt{L'C'}\frac{1}{f\sqrt{L'C'}} = 2\pi n$$

$$\frac{\underline{U}_D^{(n)}}{\underline{I}_D^{(n)}} = jn\omega L + R_2 = jn2\pi fL + R_2 = j2nR_2 + R_2 = R_2(1 + j2n)$$



Одзив на 1. хармоник

AC Analysis 1

$$u_g^{(1)}(t) = \sqrt{2} \underbrace{U_g^{(1)}}_{\underbrace{0}} \cos(2\pi f t + \underbrace{\theta_g^{(1)}}_{\underbrace{0}})$$

1. хармоник побуде

$$\omega = 2\pi f$$

$$\underline{U}_g^{(1)} = U_g^{(1)} e^{j\theta_g^{(1)}} = U$$

Фазор (комплексан представник)

1. хармоника побуде

$$\Theta^{(1)} = \beta^{(1)} D = 2\pi \quad \underline{U}_D^{(1)} / \underline{I}_D^{(1)} = R_2(1 + j2)$$

$$\underline{U}_0^{(1)} = \cos(\Theta^{(1)}) \underline{U}_D^{(1)} + jZ_c \sin(\Theta^{(1)}) \underline{I}_D^{(1)} = \underline{U}_D^{(1)}$$

$$\underline{I}_0^{(1)} = jY_c \sin(\Theta^{(1)}) \underline{U}_D^{(1)} + \cos(\Theta^{(1)}) \underline{I}_D^{(1)} = \underline{I}_D^{(1)}$$

$$\underbrace{\underline{U}_D^{(1)}}_{\underline{U}_0^{(1)}} = \underbrace{U}_{\underline{U}_g^{(1)}} - R_1 \underline{I}_0^{(1)} = R_2(1 + 2j) \underline{I}_D^{(1)}$$

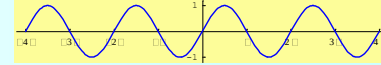
Фазор 1.

хармоника одзива

$$\underline{I}_D^{(1)} = \frac{U}{R_1 + R_2 + j2R_2}$$

$$i_D^{(1)}(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (2R_2)^2}} \cos(2\pi f t - \arctan(\frac{2R_2}{R_1 + R_2}))$$

1. хармоник одзива



Одзив на 2. хармоник

АС Analysis 2

$$u_g^{(2)}(t) = \sqrt{2} \left(\frac{U_g^{(2)}}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(4\pi f t + \overbrace{\left(-\pi/2 \right)}^{\theta_g^{(2)}} \right)$$

2. хармоник побуде

$$2\omega = 2(2\pi f)$$

$$\underline{U}_g^{(2)} = U_g^{(2)} e^{j\theta_g^{(2)}} = \frac{U}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/2}$$

Фазор 2. хармоника побуде

$$\Theta^{(2)} = \beta^{(2)} D = 4\pi \quad \underline{U}_D^{(2)} / \underline{I}_D^{(2)} = R_2(1 + 4j)$$

$$\underline{U}_0^{(2)} = \cos(\Theta^{(2)}) \underline{U}_D^{(2)} + jZ_c \sin(\Theta^{(2)}) \underline{I}_D^{(2)} = \underline{U}_D^{(2)}$$

$$\underline{I}_0^{(2)} = jY_c \sin(\Theta^{(2)}) \underline{U}_D^{(2)} + \cos(\Theta^{(2)}) \underline{I}_D^{(2)} = \underline{I}_D^{(2)}$$

Фазор 2.

хармоника одзива

$$\underline{U}_0^{(2)} = \underbrace{\left(\frac{U}{\sqrt{2}} \right) e^{-j\pi/2}}_{\underline{U}_g^{(2)}} - R_1 \underline{I}_0^{(2)} = R_2(1 + 4j) \underline{I}_D^{(2)}$$

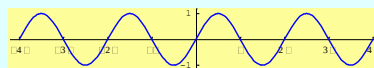
$$\underline{I}_D^{(2)} = \frac{U}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/2} \frac{1}{R_1 + R_2 + 4jR_2}$$

$$i_D^{(2)}(t) = \sqrt{2} \frac{U/\sqrt{2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (4R_2)^2}} \cos \left(4\pi f t - \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{4R_2}{R_1 + R_2} \right) \right)$$

2. хармоник
одзива

Одзив - збир свих хармоника одзива

$$i_D(t) = i_D^{(1)}(t) + i_D^{(2)}(t)$$



Обратити пажњу да **није могуће сабирати** фазоре (комплексне представнике) јер су они дефинисани за различите учестаности.

Комплексна снага, средња снага, реактивна снага

$$\underline{S}^{(n)} = \underline{U}^{(n)} (\underline{I}^{(n)})^*$$

Комплексна снага n -тог хармоника

$$P^{(n)} = \operatorname{Re}(\underline{S}^{(n)})$$

Средња снага n -тог хармоника

$$Q^{(n)} = \operatorname{Im}(\underline{S}^{(n)})$$

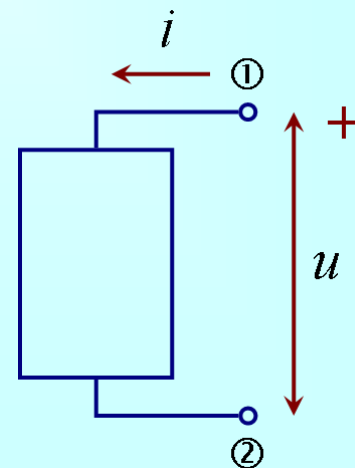
Реактивна снага n -тог хармоника

Средња (активна) снага

$$P = P^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$$

Реактивна снага

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q^{(n)}$$



Комплексна снага 1. хармоника

$$\underline{S}_g^{(1)} = \underline{U}_g^{(1)} (\underline{I}_0^{(1)})^* = U \left(\frac{U}{R_1 + R_2 + j2R_2} \right)^* = \frac{U^2}{R_1 + R_2 - j2R_2}$$

$$\underline{S}_g^{(1)} = \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R_2)^2 + 4R_2^2} U^2 + j \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)^2 + 4R_2^2} U^2 = P_g^{(1)} + jQ_g^{(1)}$$

Комплексна снага 2. хармоника

$$\underline{S}_g^{(2)} = \underline{U}_g^{(2)} (\underline{I}_0^{(2)})^* = \underline{U}_g^{(2)} \left(\frac{\underline{U}_g^{(2)}}{R_1 + R_2 + j4R_2} \right)^* = \frac{(U/\sqrt{2})^2}{R_1 + R_2 - j4R_2}$$

$$\underline{S}_g^{(2)} = \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R_2)^2 + 16R_2^2} \frac{U^2}{2} + j \frac{4R_2}{(R_1 + R_2)^2 + 16R_2^2} \frac{U^2}{2} = P_g^{(2)} + jQ_g^{(2)}$$

Средња (активна) снага

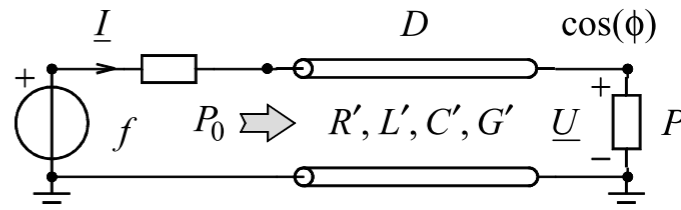
$$P_g = P_g^{(1)} + P_g^{(2)}$$

Задатак (1)

Задатак 2

Електроенергетски далековод, са губицима услед короне и несавршености изолатора, се може описати водом чији су примарни параметри $R' = 0.08 \Omega/\text{km}$, $L' = 1.34 \text{ mH}/\text{km}$, $G' = 37.5 \text{ nS}/\text{km}$, $C' = 8.6 \text{ nF}/\text{km}$. Дужина вода је $D = 900 \text{ km}$. Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је $f = 50 \text{ Hz}$. Вод је затворен потрошачем чија је средња (активна) снага $P = 100 \text{ MW}$, сачинитељ (фактор) снаге $\cos(\phi) = 1$ и комплексан напон $\underline{U} = 220 \text{ kV}$. Одредити

- (5) комплексну струју генератора
- (5) средњу (активну) снагу на улазу вода
- (5) заменску П-шему вода и вредности њених елемената.



Комплексна струја генератора је

$$(251.694 + j493.222) \text{ A}$$

Средња (активна) снага на улазу вода је

$$119.198 \text{ MW}$$

Вредности елемената заменске П-шеме вода су

$$(23.8084 - j758.253) \Omega, \text{ оточна}$$

$$(50.6423 + j325.412) \Omega, \text{ редна}$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$396.725 - 34.586 j$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v = \lambda f$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

$$108.321 \times 10^{-6} + (1.07056 \times 10^{-3}) j$$

$$\underline{U}_0 = \underline{A}\underline{U}_D + \underline{B}\underline{I}_D$$

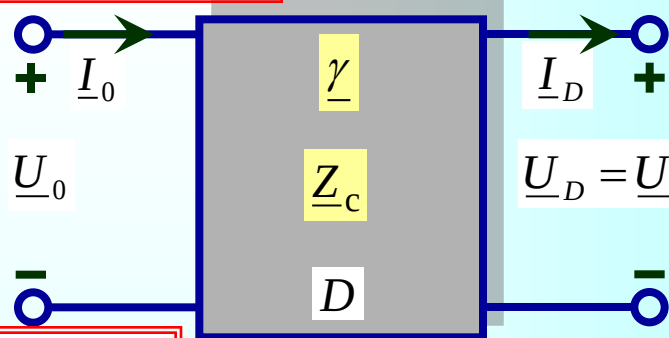
$$\underline{A} = \cosh(\underline{\gamma}D)$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}D)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{C}\underline{U}_D + \underline{D}\underline{I}_D$$

$$\underline{C} = \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}D)$$

$$\underline{D} = \cosh(\underline{\gamma}D)$$



$$\begin{pmatrix} 0.573357 + 0.0801842 j & 50.6423 + 325.412 j \\ -0.0000405565 + 0.00207625 j & 0.573357 + 0.0801842 j \end{pmatrix}$$

$$454.545$$

$$I_D = \frac{P}{U_D \cos \phi}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{C}\underline{U}_D + \underline{D}\underline{I}_D$$

$$(251.694 + j493.222) \text{ A}$$

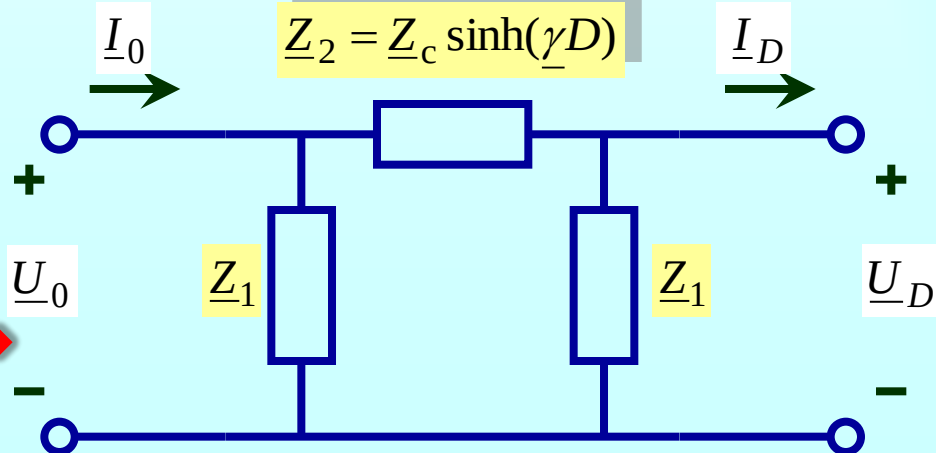
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \coth(\frac{1}{2} \underline{\gamma}D)$$

$$119.198 \text{ MW}$$

$$\underline{S}_0 = \underline{U}_0 (\underline{I}_0)^* = P_0 + jQ_0$$

$$(23.8084 - j758.253) \Omega, \text{ оточна}$$

$$(50.6423 + j325.412) \Omega, \text{ редна}$$



Задатак (2)

Задатак 2

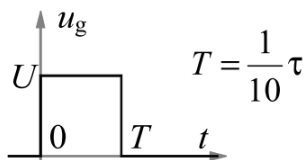
Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L' . Вод је без почетне енергије, $R_1 = R_2 = Z_c$, а побуда је позната.

Одредити

(5) Карактеристичну импедансу вода Z_c , кашњење вода τ , излазни напон $u_2(t)$ и његов домен,

(5) улазни напон $u_1(t)$ и његов домен.

(5) Нацртати напоне $u_1(t)$ и $u_2(t)$ за $-\tau < t < 3\tau$ ако је побуда дата на слици



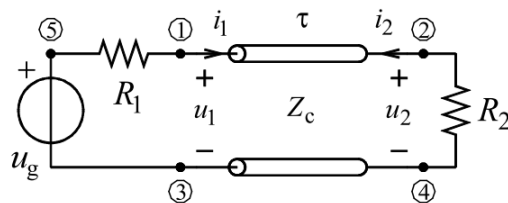
Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Карактеристична импеданса вода је

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Кашњење вода је

$$\tau = D\sqrt{L'C'}$$



$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

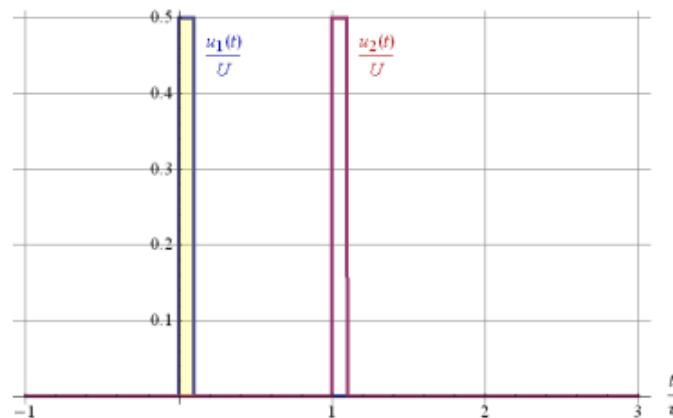
Излазни напон $u_2(t)$ је

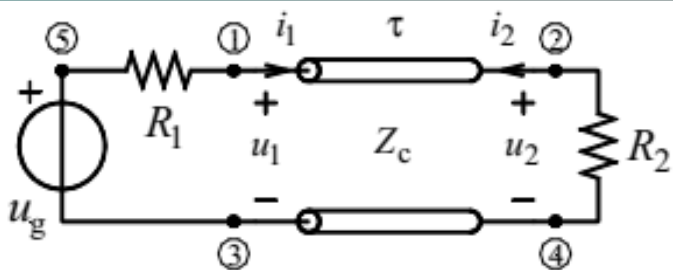
$$u_2(t) = \frac{1}{2} u_g(t - \tau)$$

Улазни напон $u_1(t)$ је

$$u_1(t) = \frac{1}{2} u_g(t)$$

График напона $u_1(t)$ и $u_2(t)$ је





$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) = Z_c \underline{I}_1(\underline{s}) + Z_c \underline{I}_2(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau} + \underline{U}_2(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = Z_c \underline{I}_2(\underline{s}) + Z_c \underline{I}_1(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau} + \underline{U}_1(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}$$

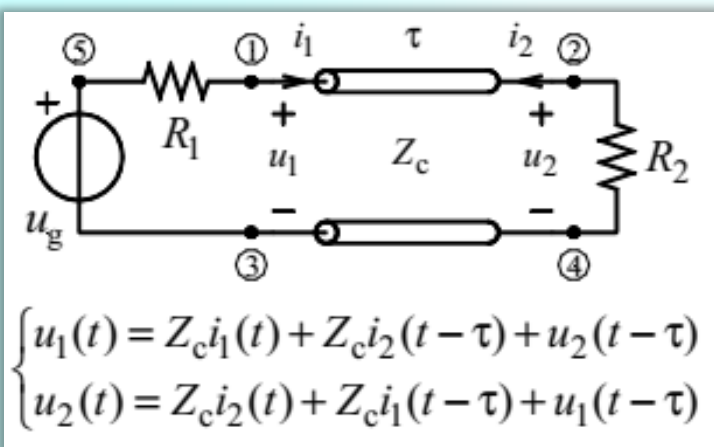
$$\underline{U}_1(\underline{s}) = \underline{U}_g(\underline{s}) - R_1 \underline{I}_1(\underline{s})$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = -R_2 \underline{I}_2(\underline{s})$$

$$\underline{U}_g(\underline{s}) - R_1 \underline{I}_1(\underline{s}) = Z_c \underline{I}_1(\underline{s}) + Z_c \underline{I}_2(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau} - R_2 \underline{I}_2(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}$$

$$-R_2 \underline{I}_2(\underline{s}) = Z_c \underline{I}_2(\underline{s}) + Z_c \underline{I}_1(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau} + \left(\underline{U}_g(\underline{s}) - R_1 \underline{I}_1(\underline{s}) \right) e^{-\underline{s}\tau}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_g(\underline{s}) - R_1 \underline{I}_1(\underline{s}) &= Z_c \underline{I}_1(\underline{s}) + \overbrace{Z_c \underline{I}_2(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau} - R_2 \underline{I}_2(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}}^{(Z_c - R_2) \underline{I}_2(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}} \\ -R_2 \underline{I}_2(\underline{s}) &= Z_c \underline{I}_2(\underline{s}) + Z_c \underline{I}_1(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau} + \left(\underline{U}_g(\underline{s}) - R_1 \underline{I}_1(\underline{s}) \right) e^{-\underline{s}\tau} \end{aligned}$$



$$\underline{U}_g(\underline{s}) - R_1 \underline{I}_1(\underline{s}) = Z_c \underline{I}_1(\underline{s})$$

$$-R_2 \underline{I}_2(\underline{s}) = Z_c \underline{I}_2(\underline{s}) + \overbrace{(Z_c - R_1)}^0 \underline{I}_1(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau} + \underline{U}_g(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}$$

$$\underline{I}_1(\underline{s}) = \frac{\underline{U}_g(\underline{s})}{R_1 + Z_c} = \frac{\underline{U}_g(\underline{s})}{2Z_c}$$

$$\underline{I}_2(\underline{s}) = -\frac{\underline{U}_g(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}}{R_2 + Z_c} = -\frac{\underline{U}_g(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}}{2Z_c}$$

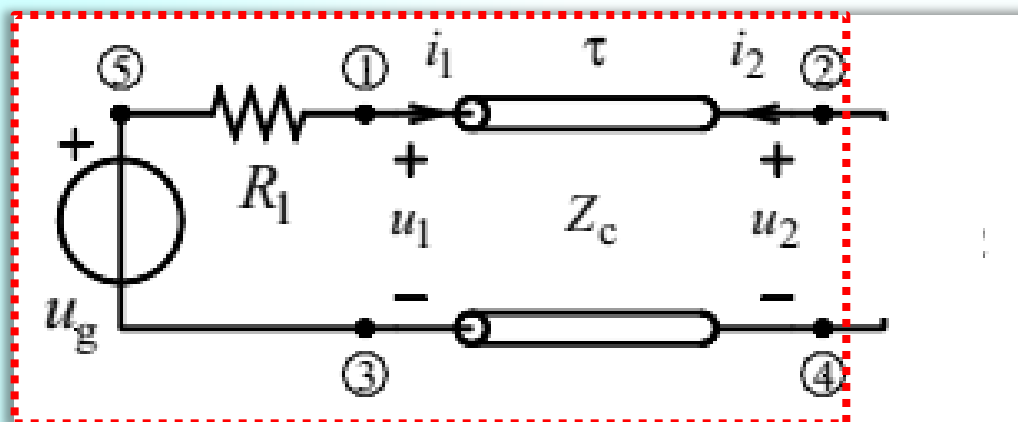
$$u_1(t) = \frac{1}{2} u_g(t)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} u_g(t - \tau)$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = -R_2 \underline{I}_2(\underline{s}) = R_2 \frac{\underline{U}_g(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau}}{2Z_c} = \frac{1}{2} \underline{U}_g(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau} \Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{2} u_g(t - \tau)$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) = \underline{U}_g(\underline{s}) - R_1 \underline{I}_1(\underline{s}) = \frac{1}{2} \underline{U}_g(\underline{s}) \Rightarrow u_1(t) = \frac{1}{2} u_g(t)$$

Тевененов генератор



$$u_T(t) = u_2(t) = u_g(t - \tau)$$

$$R_T = Z_c$$

Задатак (3)

Задатак 1

РФ/микроталасни коаксијални кабл RG58C/U се може приближно представити као вод без губитака чији су примарни параметри $C' = 100 \text{ pF/m}$, $L' = 250 \text{ nH/m}$.

Дужина вода је $D = 50 \text{ cm}$. Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је

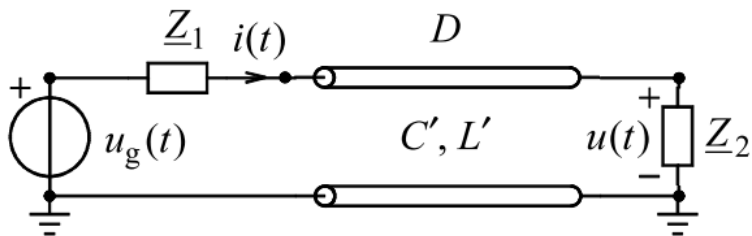
$$f = 100 \text{ MHz}, u_g(t) = \sqrt{2}U_g \cos(2\pi f t),$$

$$U_g = 2 \text{ V}, \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 50 \Omega. \text{ Одредити}$$

(5) средњу (активну) снагу потрошача $\underline{Z}_2$

(5) коефицијент рефлексије на улазу вода

(5) тренутне вредности напона на крају вода и струје на почетку вода.

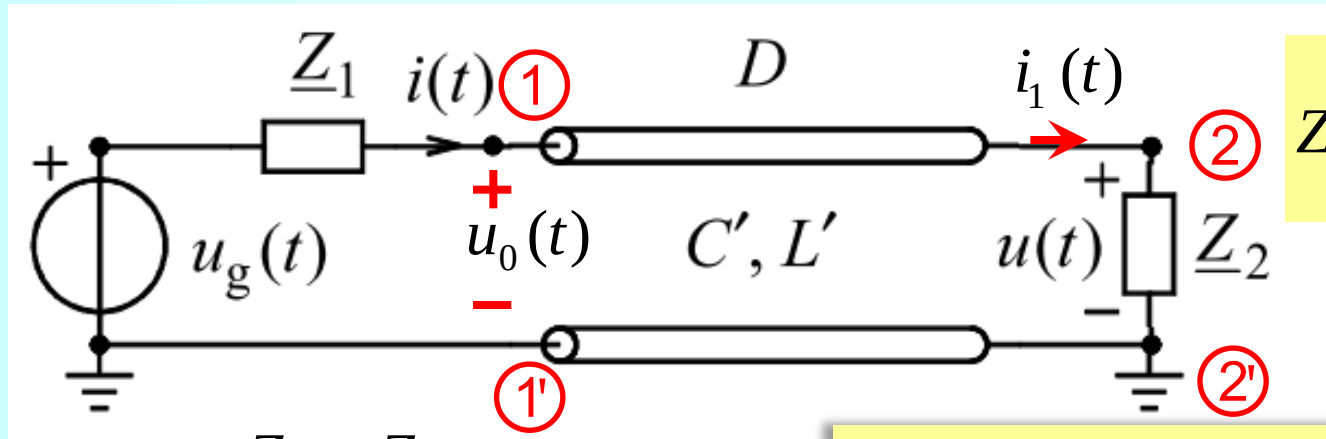


Средња (активна) снага потрошача је

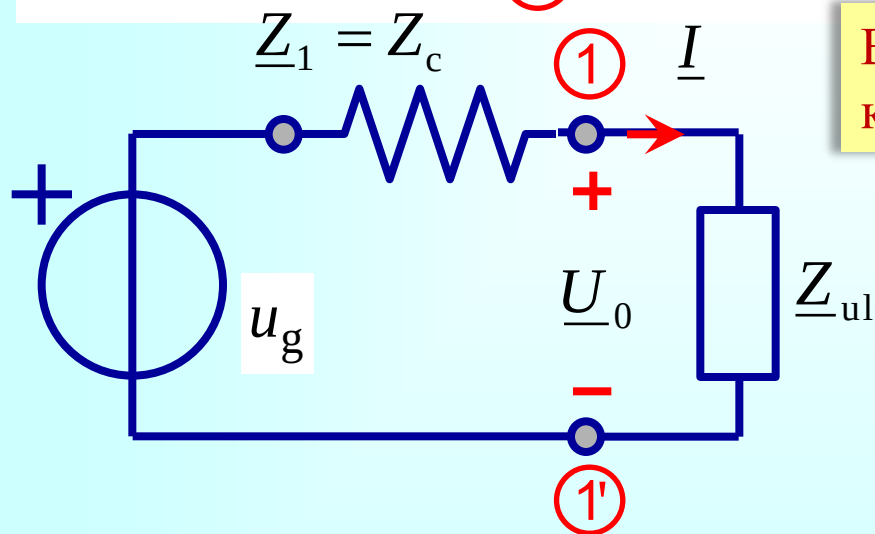
Коефицијент рефлексије на улазу вода је

Тренутне вредности напона на крају вода и струје на почетку вода су





$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 50 \Omega$$



Вод је **прилагођен**, тј. затворен је својом карактеристичном импедансом.

$$Z_{ul} = Z_c$$

$$\rho_{ul} = \rho_{11'} = 0$$

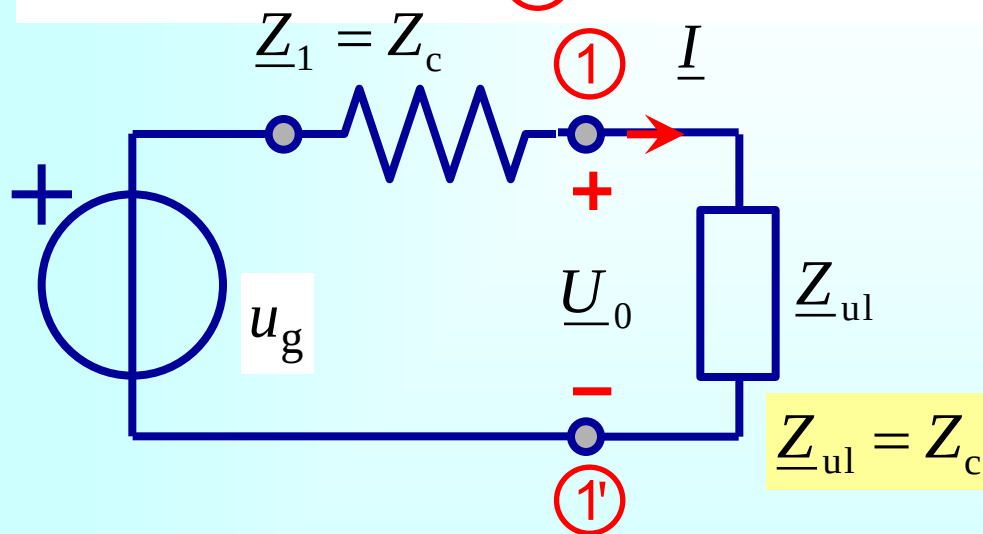
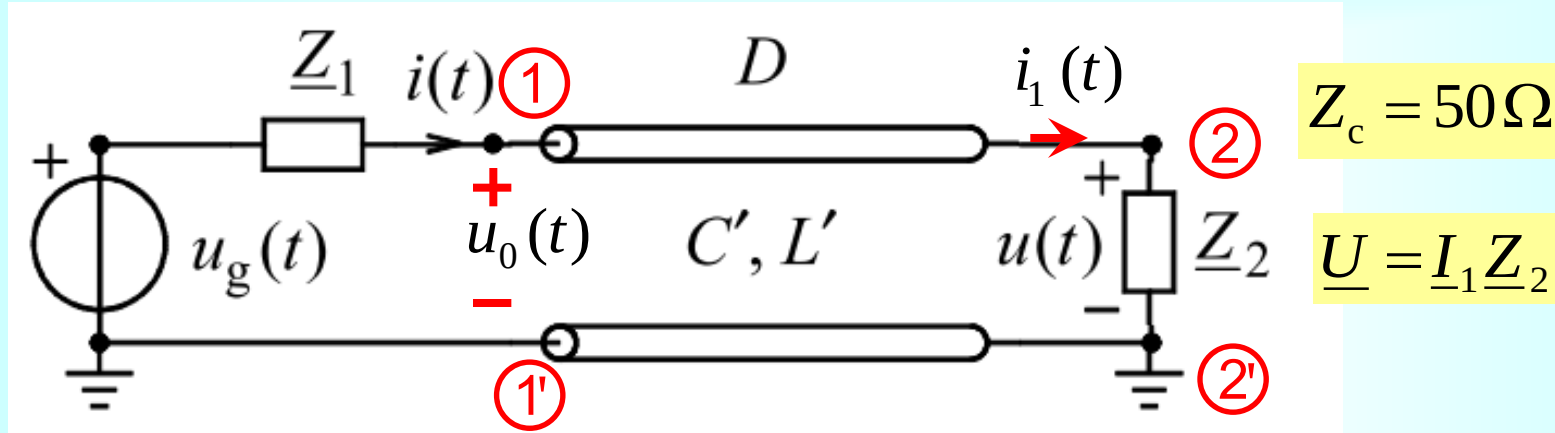
Коеф. рефлексије на ул. првог вода

$$S_{11'} = U_0 (I)^* = U_0 \left(\frac{U_0}{Z_{ul}} \right)^* = \frac{U_0^2}{Z_c} = \frac{U_g^2}{4Z_c} = P_{11'}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} U_g = \frac{1}{2} U_g, U_g = U_g$$

Водови су без губитака

$$P_{11'} = P_{22'} = P_{Z_2} = 20 \text{ mW}$$



$$\underline{U}_0 = \cos(\Theta) \underline{U} + jZ_c \sin(\Theta) \underline{I}_1$$

$$\underline{I} = jY_c \sin(\Theta) \underline{U} + \cos(\Theta) \underline{I}_1$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{Z_{ul}} = \frac{\underline{U}_g}{2Z_c} = \frac{U_g}{2Z_c} = 20 \text{ mA} \Rightarrow$$

$$i(t) = \sqrt{2} (20 \text{ mA}) \cos(2\pi ft)$$

$$\underline{U}_0 = \cos(\Theta) \underline{U} + jZ_c \sin(\Theta) \underline{I}_1 \Rightarrow \underline{U}_0 = \cos(\Theta) \underline{U} + jZ_c \sin(\Theta) (\underline{U} / Z_2) \Rightarrow$$

$$\underline{U} = \underline{U}_0 / (\cos(\Theta) + j \sin(\Theta)) = \frac{1}{2} U_g e^{-j\Theta} \Rightarrow u(t) = \sqrt{2} (1 \text{ V}) \cos(2\pi ft - \Theta)$$

$$\Theta = \beta D = \omega \sqrt{L' C'} D = \pi / 2$$

Задатак (4)

Задатак 2

Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L' . Вод је без почетне енергије, $R_l = Z_c$, а каузална побуда је позната. Одредити

(7) Карактеристичну импедансу вода Z_c , кашњење вода τ , излазни напон $u_2(t)$ и његов домен,

(4) улазни напон $u_1(t)$ и његов домен,

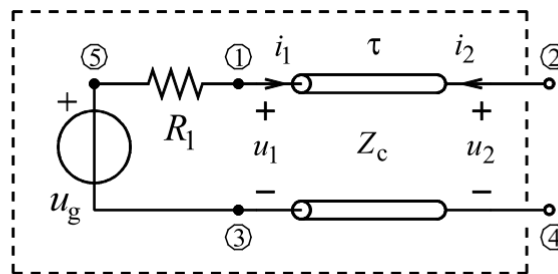
(4) Тевененов генератор мреже између крајева ② и ④.

Карактеристична импеданса вода је

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Кашњење вода је

$$\tau = D\sqrt{L'C'}$$



$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

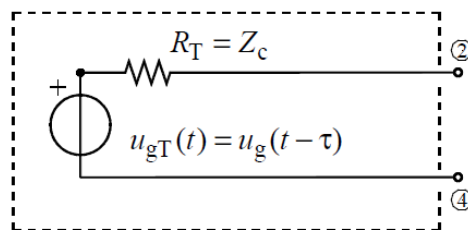
Излазни напон $u_2(t)$ и његов домен су

$$u_2(t) = u_g(t - \tau), \quad -\infty < t < \infty$$

Улазни напон $u_1(t)$ и његов домен су

$$u_1(t) = \frac{1}{2}u_g(t) + \frac{1}{2}u_g(t - 2\tau), \quad -\infty < t < \infty$$

Тевененов генератор између ② и ④ је



Задатак (5)

Задатак 2

Коаксијални кабл RG59, за професионалне телевизијске системе и системе кабловске телевизије, може се идеализовано представити као вод без губитака чија је карактеристична импеданса $Z_c = 75 \Omega$ а

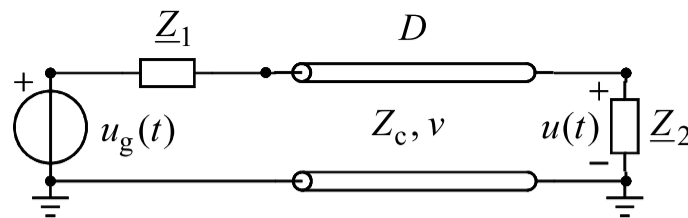
брзина простирања $v = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Дужина вода је $D = 100 \text{ cm}$. Одзив је устален и простопериодичан, учестаност је

$f = 200 \text{ MHz}$, $u_g(t) = \sqrt{2}U_g \cos(2\pi f t)$,
 $U_g = 5 \text{ V}$, $Z_1 = 75 \Omega$, $Z_2 = 50 \Omega$. Одредити

(4) примарне параметре вода

(6) коефицијент рефлексије на улазу вода и средњу (активну) снагу потрошача Z_2

(5) тренутну вредност напона $u(t)$ на крају вода.



Примарни параметри вода су

$$200/3 \text{ pF/m} = 66.67 \text{ pF/m}, \quad 375 \text{ nH/m}$$

Коефицијент рефлексије на улазу вода је

$$-1/5 = -0.2$$

Средња снага потрошача је

$$80 \text{ mW}$$

Тренутна вредност напона на крају вода је

$$u(t) = \sqrt{2}(2 \text{ V}) \cos(2\pi f t)$$



Задатак (6)

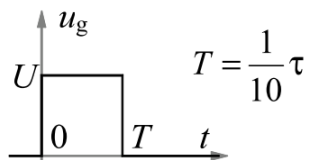
Задатак 2

Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L' . Вод је без почетне енергије, $R_l = Z_c$, а каузална побуа је позната. Одредити

(7) Карактеристичну импедансу вода Z_c , кашњење вода τ , струју кратког споја $i(t)$, њен домен, и

(5) улазну струју $i_1(t)$ вода и њен домен.

(3) Нацртати график улазне струје $i_1(t)$ за $-\tau < t < 3\tau$ ако је побуа дата на слици.



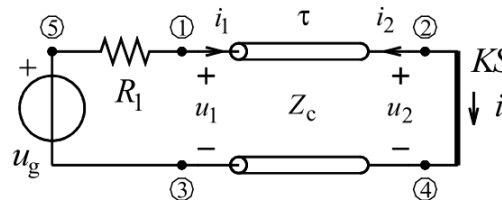
Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Карактеристична импеданса вода је

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Кашњење вода је

$$\tau = D\sqrt{L'C'}$$



$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

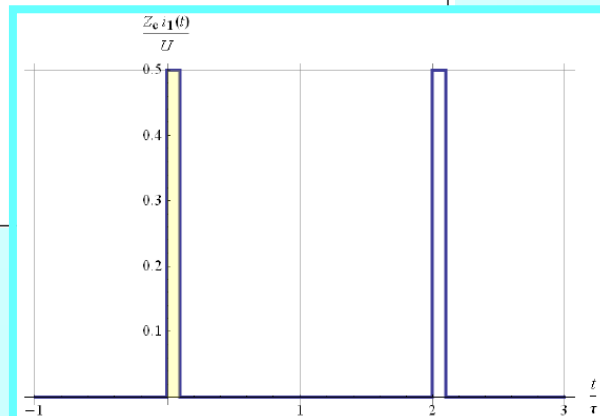
Струја кратког споја $i(t)$ и њен домен су

$$i(t) = \frac{1}{Z_c} u_g(t - \tau), \quad -\infty < t < \infty$$

Улазна струја вода $i_1(t)$ и њен домен су

$$i_1(t) = \frac{1}{2Z_c} u_g(t) + \frac{1}{2Z_c} u_g(t - 2\tau), \quad -\infty < t < \infty$$

График улазне струје $i_1(t)$ је



Задатак (7)

Задатак 1

RF микротракасти вод на електронској штампаној плочи телекомуникационог склопа се може приближно представити као вод чији су примарни параметри

$$R' = 9.4443 \Omega/\text{m}, L' = 307.25 \text{ nH}/\text{m},$$

$$G' = 34.84 \text{ mS}/\text{m}, C' = 122.5 \text{ pF}/\text{m}.$$

Дужина вода је $D = 16.8 \text{ mm}$. Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је

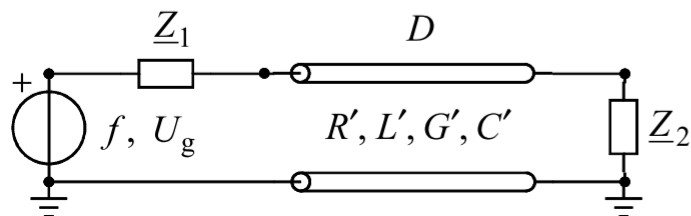
$$f = 2.425 \text{ GHz}, u_g(t) = \sqrt{2}U_g \cos(2\pi f t),$$

$$U_g = 2 \text{ V}, \underline{Z}_1 = 50 \Omega, \underline{Z}_2 = 75 \Omega.$$

Одредити

(5) секундарне параметре вода
(5) таласну дужину и средњу (активну) снагу потрошача $\underline{Z}_2$

(5) заменску Т-шему вода.



Секундарни параметри вода су

$$\underline{Z}_c = (50.08 + j0.4168) \Omega$$

$$\underline{\gamma} = (0.96668 + j93.4804) \frac{1}{\text{m}}$$

Таласна дужина је

$$\lambda = 67.214 \text{ mm}$$

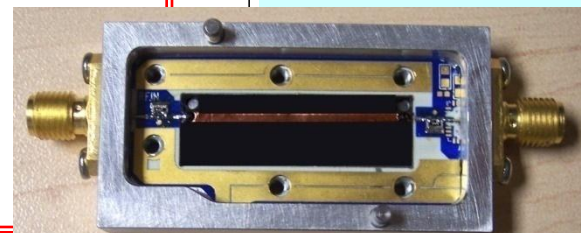
Средња (активна) снага потрошача је

$$P_{\underline{Z}_2} = 18.6 \text{ mW}$$

Заменска Т-шема вода је

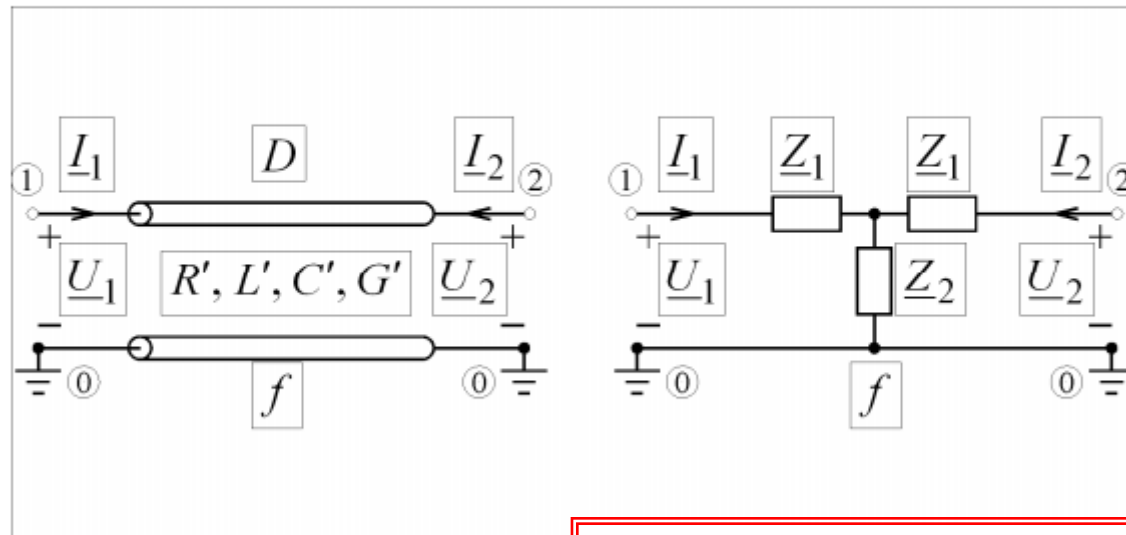
$$\underline{Z}_{1T} = (0.3963 + j50.06) \Omega$$

$$\underline{Z}_{2T} = (0.417 - j50.07) \Omega$$



(5) Извести заменску Т-шему одсечка вода.

у Београду – Електротехнички факултет, 2019.



$$\underline{Z}_{1T} = \underline{Z}_c \frac{\cosh(\underline{\gamma}D) - 1}{\sinh(\underline{\gamma}D)} = \underline{Z}_c \tanh(\underline{\gamma}D/2)$$

$$\underline{Z}_{2T} = \underline{Z}_c \frac{1}{\sinh(\underline{\gamma}D)}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

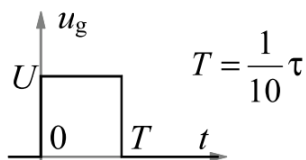
$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}, \quad \omega = 2\pi f$$

Задатак (8)

Задатак 2

Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L' . Вод је без почетне енергије, $R_1 = Z_c$, $R_2 = Z_c/3$, а побуда је позната. Одредити

- (7) Карактеристичну импедансу вода Z_c , кашњење вода τ , излазни напон вода $u_2(t)$, његов домен,
- (5) улазни напон вода $u_1(t)$ и његов домен.
- (3) Нацртати напоне $u_1(t)$ и $u_2(t)$ за $-\tau < t < 3\tau$ ако је побуда дата на слици



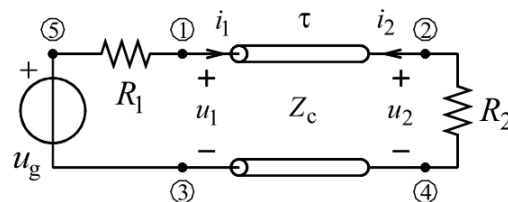
Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Карактеристична импеданса вода је

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Кашњење вода је

$$\tau = D\sqrt{L'C'}$$



$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

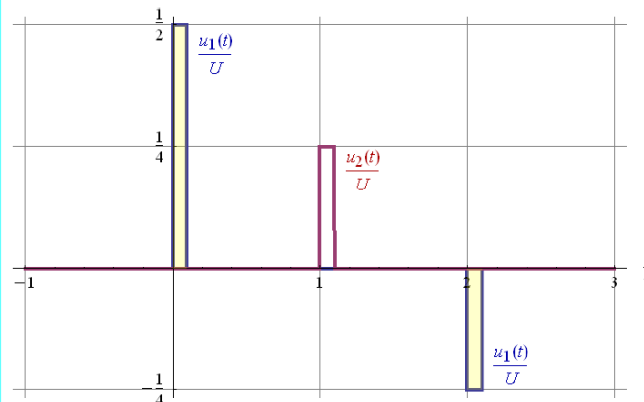
Излазни напон $u_2(t)$ и његов домен су

$$u_2(t) = \frac{1}{4} u_g(t - \tau), \quad -\infty < t < \infty$$

Улазни напон $u_1(t)$ и његов домен су

$$u_1(t) = \frac{1}{2} u_g(t) - \frac{1}{4} u_g(t - 2\tau), \quad -\infty < t < \infty$$

График напона $u_1(t)$ и $u_2(t)$ је



Задатак (9)



Задатак 1

RG58C/U коаксијални кабл за повезивање професионалних електронских RF мерних уређаја и телекомуникационе опреме се може приближно представити као вод чији су примарни параметри $R' = 5 \Omega/\text{m}$, $L' = 253 \text{ nH/m}$, $G' = 1 \text{ mS/m}$, $C' = 101 \text{ pF/m}$. Дужина вода је $D = 2 \text{ m}$. Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је $f = 1 \text{ GHz}$, $u_g(t) = \sqrt{2}U_g \cos(2\pi f t)$, $U_g = 2 \text{ V}$, $\underline{Z}_1 = 50 \Omega$, $\underline{Z}_2 = 50 \Omega$. Одредити

Секундарни параметри вода су

$$\underline{Z}_c = (50.05 - j0.03928) \Omega$$

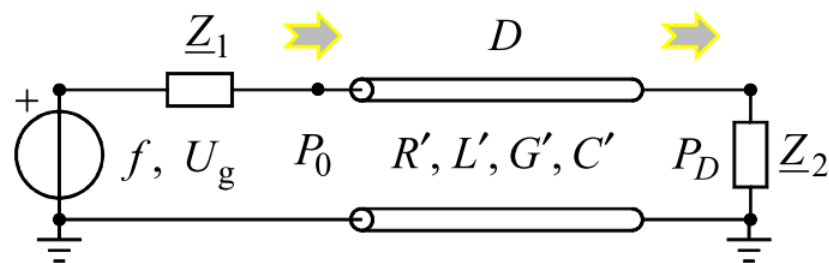
$$\underline{\gamma} = (0.07498 + j31.76) \frac{1}{\text{m}}$$

Таласна дужина је $\lambda = 197.8 \text{ mm}$

Фазна брзина је $v = 1.978 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Слабљење од улаза до излаза вода је

$$A_{P\text{dB}} = 1.3 \text{ dB}$$



- (5) секундарне параметре вода
- (5) таласну дужину и фазну брзину
- (5) слабљење од улаза до излаза вода дефинисано као $A_{P\text{dB}} = 10 \log_{10} P_0/P_D$, где је P_0 средња (активна) снага која се предаје воду на његовом улазу, а P_D средња (активна) снага потрошача $\underline{Z}_2$.

Задатак (10)

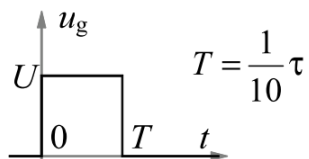
Задатак 2

Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L' . Вод је без почетне енергије, $R_1 = Z_c$, $R_2 = 2Z_c$, а побуда је позната. Одредити

(7) карактеристичну импедансу вода Z_c , кашњење вода τ , излазни напон $u_2(t)$, његов домен,

(5) улазни напон $u_1(t)$ и његов домен.

(3) Нацртати напоне $u_1(t)$ и $u_2(t)$ за $-\tau < t < 3\tau$ ако је побуда дата на слици



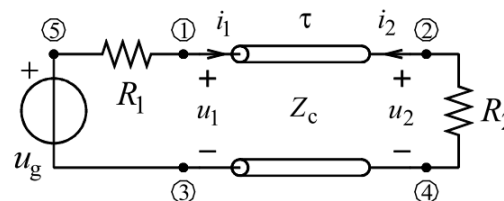
Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Карактеристична импеданса вода је

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Кашњење вода је

$$\tau = D\sqrt{L'C'}$$



$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

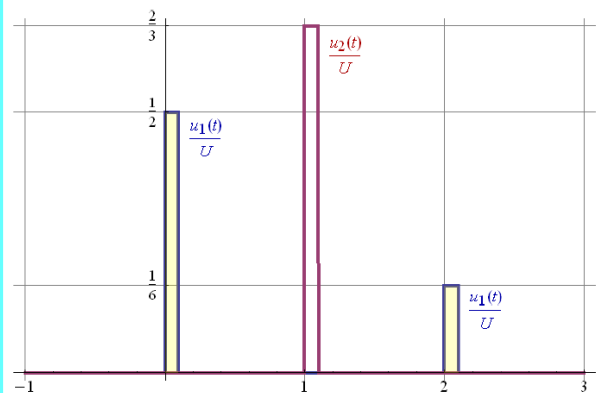
Излазни напон $u_2(t)$ и његов домен су

$$u_2(t) = \frac{2}{3} u_g(t - \tau), \quad -\infty < t < \infty$$

Улазни напон $u_1(t)$ и његов домен су

$$u_1(t) = \frac{1}{2} u_g(t) + \frac{1}{6} u_g(t - 2\tau), \quad -\infty < t < \infty$$

График напона $u_1(t)$ и $u_2(t)$ је



Задатак (11)

Задатак 2

Вилкинсонов делитељ снаге (Wilkinson power divider/combiner), који се користи у радарским системима и бежичним комуникационим системима (WLAN, WiFi, WiMAX, GPS, RFID), приказан је на слици.

Одзив је устаљен и простопериодичан,

$u_g(t) = \sqrt{2}U_g \cos(2\pi f t)$. Водови су без

губитака, карактеристичне импедансе

$Z_c = \sqrt{2}R$ и електричне дужине $\Theta = \pi/2$ на учестаности f . Отпорности отпорника су

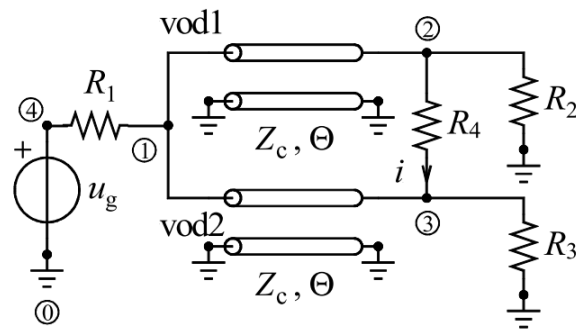
$R_1 = R_2 = R_3 = R$, $R_4 = 2R$.

Одредити

(5) напон на улазу водова, $v_1(t)$

(4) струју $i(t)$ отпорника R_4

(6) средње снаге отпорника R_2 и R_3 .



Напон на улазу водова, v_1 , је

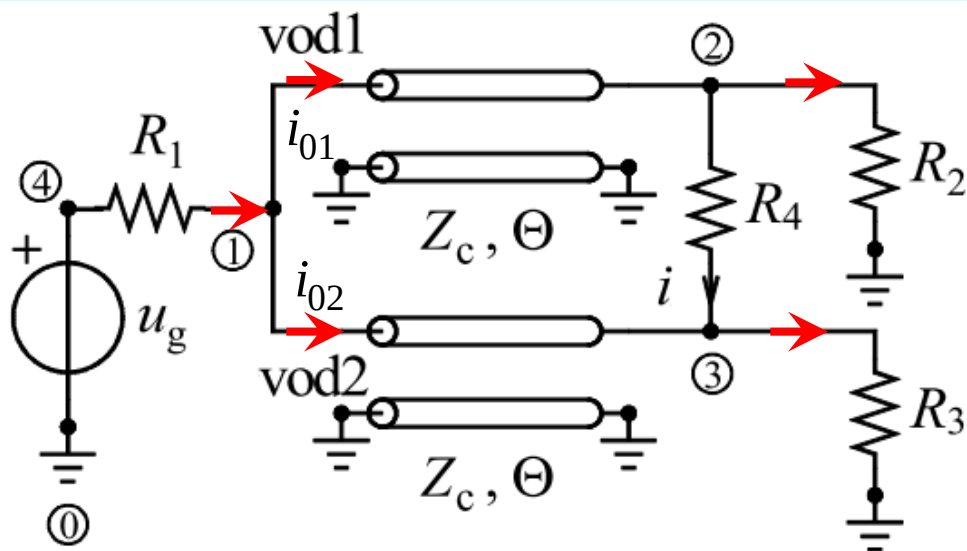
$$v_1 = \frac{1}{2}u_g$$

Струја i отпорника R_4 је

$$i = 0$$

Средње снаге отпорника R_2 и R_3 су

$$P_{R_2} = P_{R_3} = \frac{U_g^2}{8R}$$



$$(1) -\frac{U_g - \underline{V}_1}{R_1} + \underline{I}_{01} + \underline{I}_{02} = 0$$

$$(2) -\underline{I}_{D1} + \underline{I} + \frac{V_2}{R_2} = 0, \underline{I} = \frac{V_2 - V_3}{R_4}$$

$$(3) -\underline{I}_{D2} - \underline{I} + \frac{V_3}{R_3} = 0$$

$$\underline{V}_1 = \cos(\theta) \cdot \underline{V}_2 + jZ_c \sin(\theta) \cdot \underline{I}_{D1} = jZ_c \underline{I}_{D1}$$

$$\underline{I}_{01} = j\frac{1}{Z_c} \sin(\theta) \cdot \underline{V}_2 + \cos(\theta) \cdot \underline{I}_{D1} = j\frac{1}{Z_c} \underline{V}_2$$

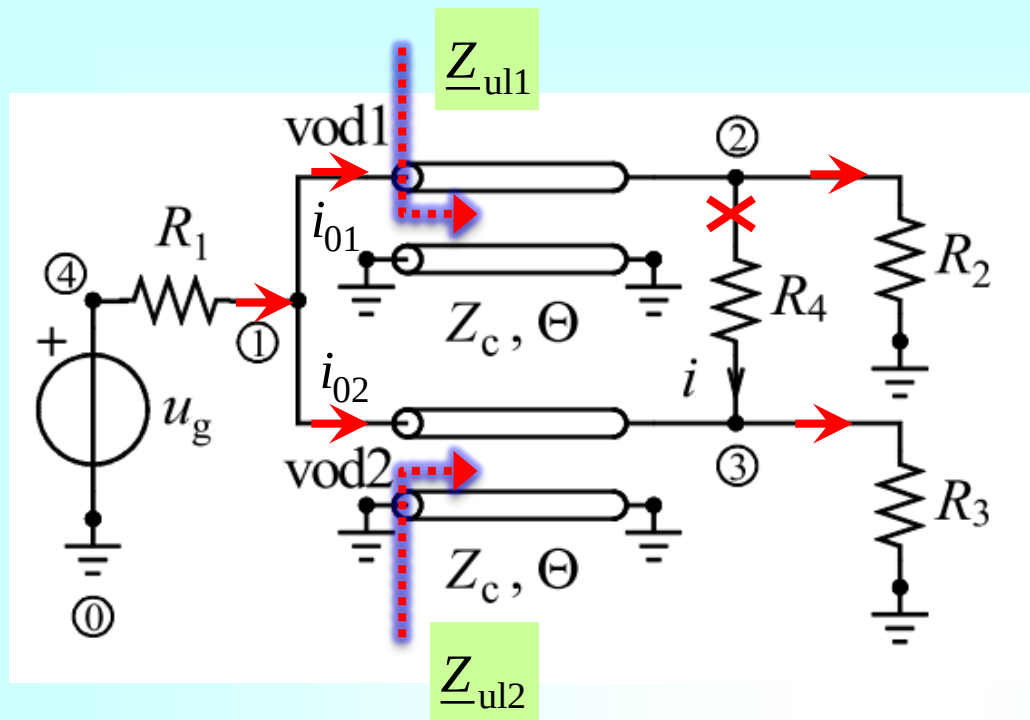
$$\underline{I}_{D1} = \underline{I}_{D2}$$

$$\underline{V}_1 = \cos(\theta) \cdot \underline{V}_3 + jZ_c \sin(\theta) \cdot \underline{I}_{D2} = jZ_c \underline{I}_{D2}$$

$$\underline{I}_{02} = j\frac{1}{Z_c} \sin(\theta) \cdot \underline{V}_3 + \cos(\theta) \cdot \underline{I}_{D2} = j\frac{1}{Z_c} \underline{V}_3$$

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_3$$

$$(2) - (3) \Rightarrow \overbrace{-\underline{I}_{D1} + \underline{I}_{D2}}^0 + 2\underline{I} + \frac{V_2 - V_3}{R} = 0 \Rightarrow 2\frac{V_2 - V_3}{2R} + \frac{V_2 - V_3}{R} = 0 \Rightarrow \underline{V}_2 = \underline{V}_3$$



$$\underline{V}_2 = \underline{V}_3 \Rightarrow \underline{I} = 0$$

$$\underline{Z}_{ul1} = \frac{Z_c^2}{R_2} = 2R$$

$$\underline{Z}_{ul2} = \frac{Z_c^2}{R_3} = 2R$$

$$\underline{Z}_{ul1} \parallel \underline{Z}_{ul2} = R$$

$$\underline{S}_{10} = \underline{V}_1 \frac{U_g^*}{2R} = \frac{U_g}{2} \frac{U_g^*}{2R} = \frac{U_g^2}{4R} \Rightarrow$$

$$P_{R_2} = \frac{U_g^2}{8R}, P_{R_3} = \frac{U_g^2}{8R}$$

Задатак (12)

Задатак 2

Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L' . Вод и кондензатор су без почетне енергије, $R_1 = Z_c$, $u_g = U\vartheta(t)$,

$U > 0$, C је познато. Одредити

(7) карактеристичну импедансу вода Z_c ,

кашњење вода τ , струју кондензатора $i(t)$, њен домен,

(5) улазну струју $i_1(t)$ и њен домен.

(3) Нацртати струју кондензатора $i(t)$.

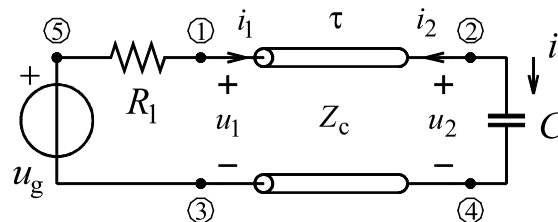
Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Карактеристична импеданса вода је

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Кашњење вода је

$$\tau = D\sqrt{L'C'}$$



$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

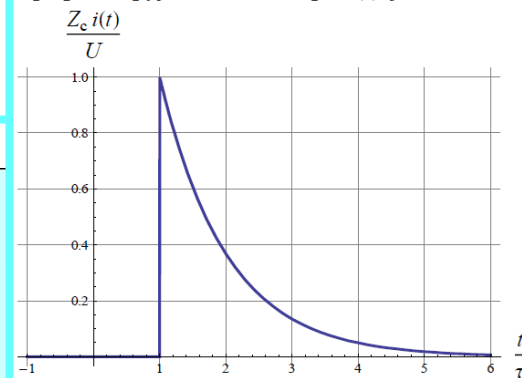
Струја кондензатора $i(t)$ и њен домен су

$$i(t) = \frac{U}{Z_c} \exp\left(-\frac{(t - \tau)}{CZ_c}\right) \vartheta(t - \tau), \quad -\infty < t < \infty$$

Улазна струја $i_1(t)$ и њен домен су

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{U}{2Z_c} \vartheta(t) \\ &+ \frac{U}{2Z_c} \left(2 \exp\left(-\frac{(t - 2\tau)}{CZ_c}\right) - 1 \right) \vartheta(t - 2\tau) \end{aligned}, \quad -\infty < t < \infty$$

График струје кондензатора $i(t)$ је



(Цртано за $CZ_c = \tau$.)

Задатак (13)

Задатак 2

Део електроенергетске дистрибутивне мреже се идеализовано може представити водовима без губитака истих параметара: подужна капацитивност је $C' = c$ а подужна индуктивност је $L' = l$. Одзив је устаљен.

Побуда је

$$u_g = U_0 + \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t) + U_{m2} \cos(2\omega t).$$

Постоји веза параметара $d_3 \omega \sqrt{cl} = \pi$.

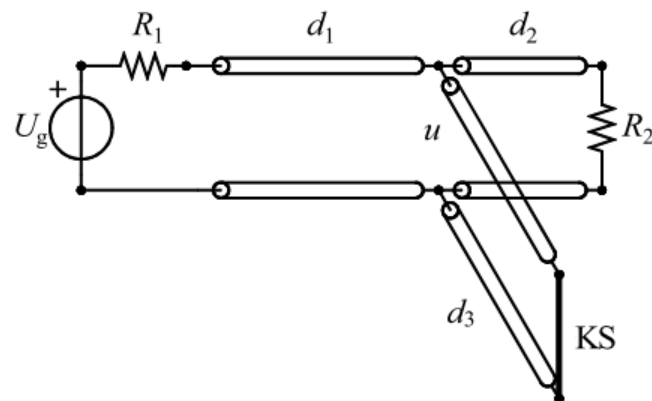
(5) Одредити тренутну вредност напона на месту споја водова.

(5) Одредити снагу отпорника R_2 .

(5) Нацртати граф кола.

Тренутна вредност напона на месту споја водова је

Снага отпорника R_2 је

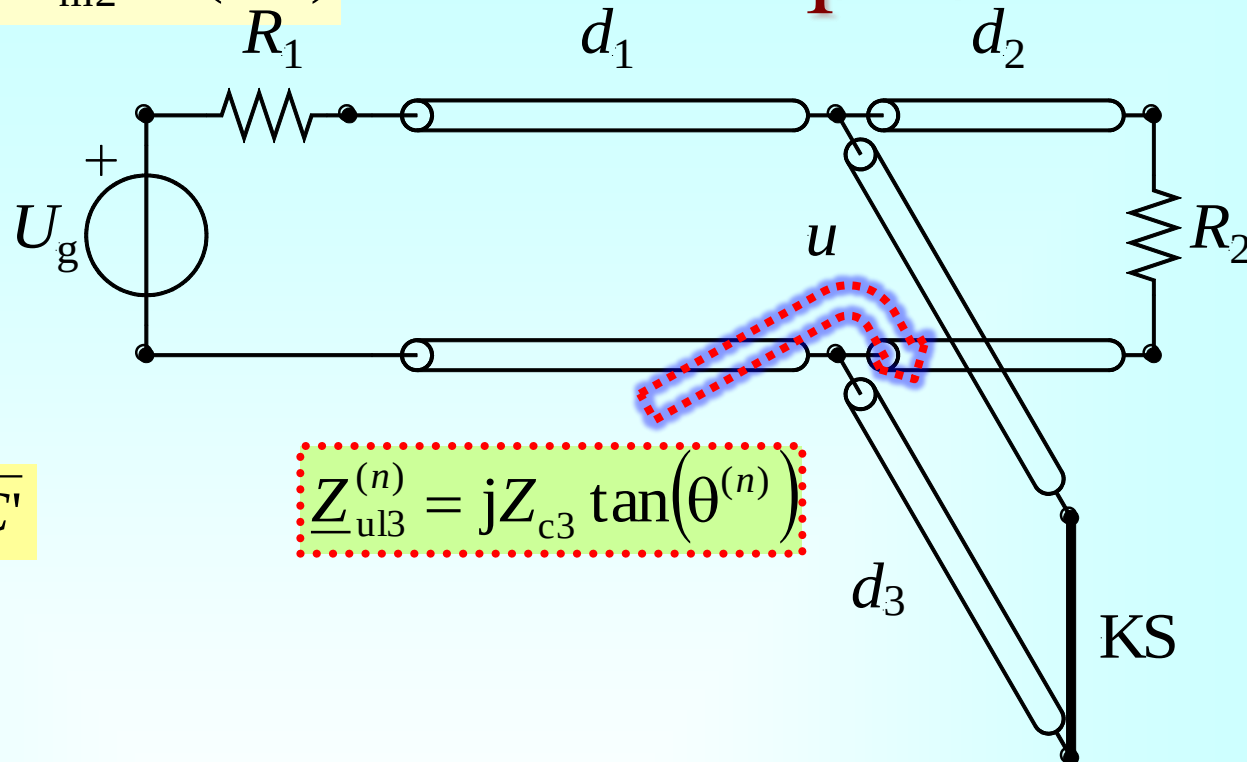


Граф кола је

n -ТИ ХАРМОНИК

$$u_g = U_0 + \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t) + U_{m2} \cos(2\omega t)$$

$$d_3 \omega \sqrt{cl} = \pi$$



$$Z_{c1} = Z_{c2} = Z_{c3} = \sqrt{L'/C'}$$

$$\underline{Z}_{ul3}^{(n)} = jZ_{c3} \tan(\theta^{(n)})$$

$$\theta^{(n)} = \beta^{(n)} d_3 = n\omega \sqrt{L'C'} d_3 = n\pi \Rightarrow \tan(\theta^{(n)}) = 0 \Rightarrow \underline{Z}_{ul3}^{(n)} = 0 \Rightarrow u^{(n)}(t) = 0$$



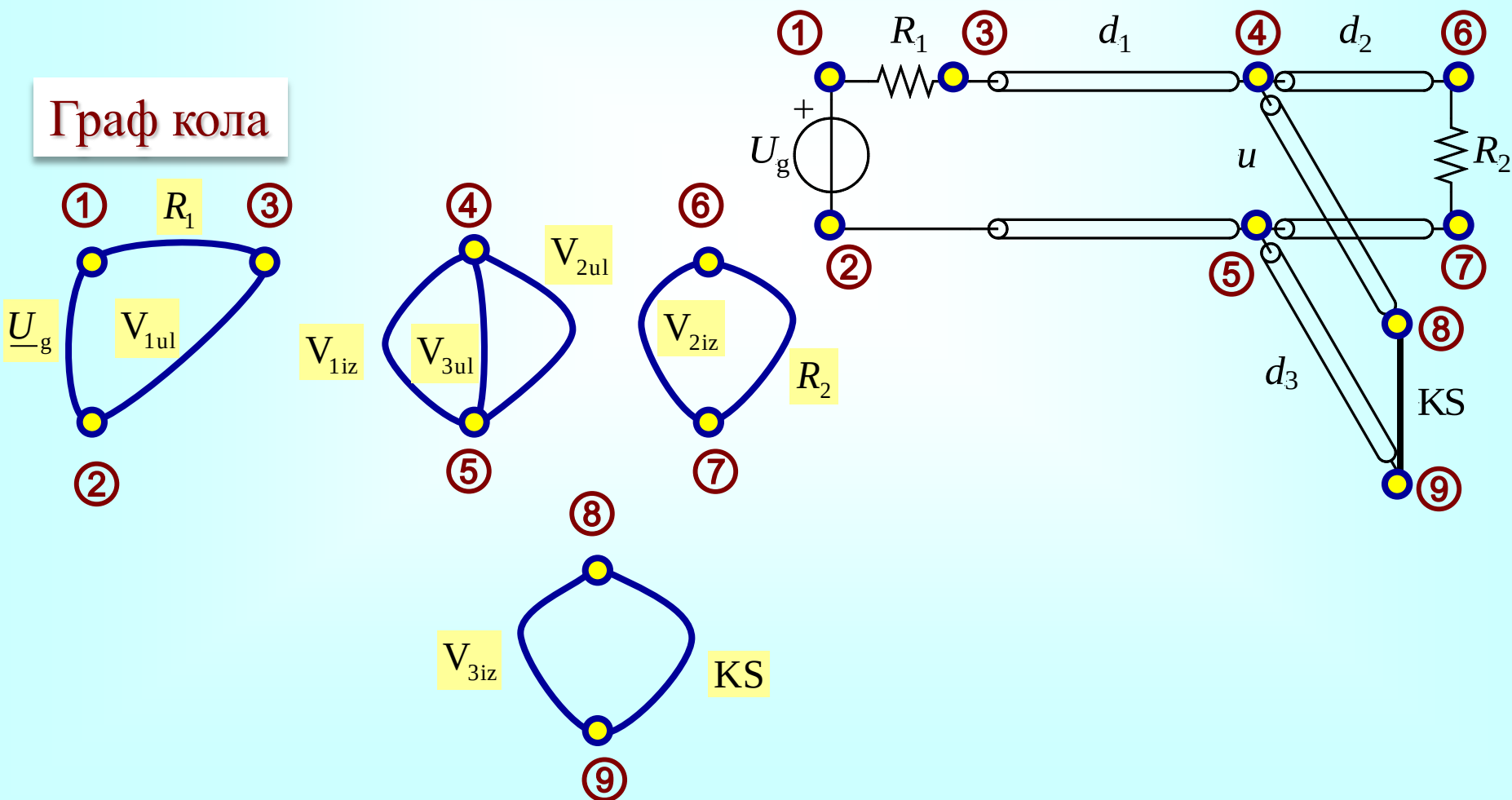
Одзив - збир свих хармоника одзива

$$u(t) = u^{(0)}(t) + u^{(1)}(t) + u^{(2)}(t) = 0$$

Средња (активна) снага отпорника R_2

$$P_{R_2} = P_{R_2}^{(0)} + P_{R_2}^{(1)} + P_{R_2}^{(2)} = 0$$

Граф кола



Задатак (14)

Задатак 2

Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L' . Вод и калем су без почетне енергије, $R_1 = Z_c$, $u_g = U\vartheta(t)$,

$U > 0$, L је познато. Одредити

(7) карактеристичну импедансу вода Z_c , кашњење вода τ , напон калема $u_2(t)$, његов домен,

(5) улазну струју $i_1(t)$ и њен домен.

(3) Нацртати график напон калема $u_2(t)$.

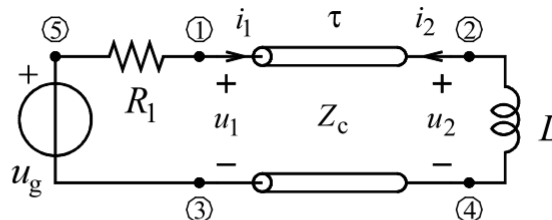
Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Карактеристична импеданса вода је

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Кашњење вода је

$$\tau = D\sqrt{L'C'}$$



$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

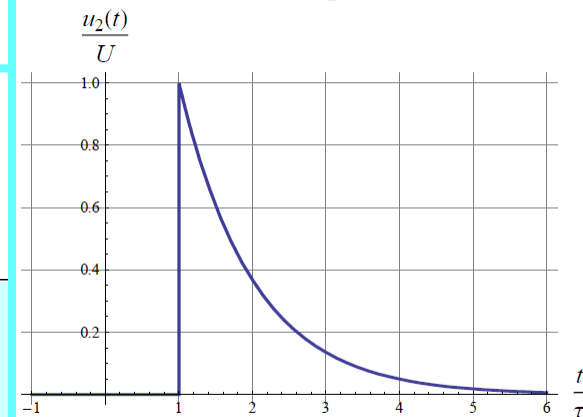
Напон калема $u_2(t)$ и његов домен су

$$u_2(t) = U \exp\left(\frac{-(t - \tau)}{L} Z_c\right) \vartheta(t - \tau), \quad -\infty < t < \infty$$

Улазна струја $i_1(t)$ и њен домен су

$$i_1(t) = \frac{U}{2Z_c} \vartheta(t) + \frac{U}{2Z_c} \left(1 - 2 \exp\left(\frac{-(t - 2\tau)}{L} Z_c\right)\right) \vartheta(t - 2\tau), \quad -\infty < t < \infty$$

График напона калема $u_2(t)$ је



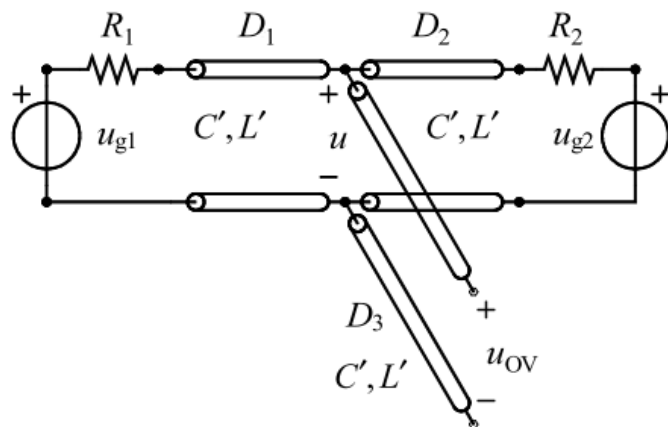
(Цртано за $L/Z_c = \tau$.)

Задатак (15)

Задатак 1

Водови без губитака имају исте подужне параметре $C'=c$ и $L'=l$. Постоји веза параметара $D_1 = D_2 = D_3 = d$, $2d\omega\sqrt{cl} = \pi$, $R_1 = R_2 = \sqrt{l/c}$. Одзив је устаљен а побуда је $u_{g1} = 2U + \sqrt{2}U \cos(\omega t)$, $u_{g2} = \sqrt{2}U \cos(3\omega t)$.
Одредити

- (5) тренутну вредност напона на месту споја
- (5) тренутну вредност напона отворене везе
- (5) број грана графа електричног кола.



Тренутна вредност напона u на месту споја водова је

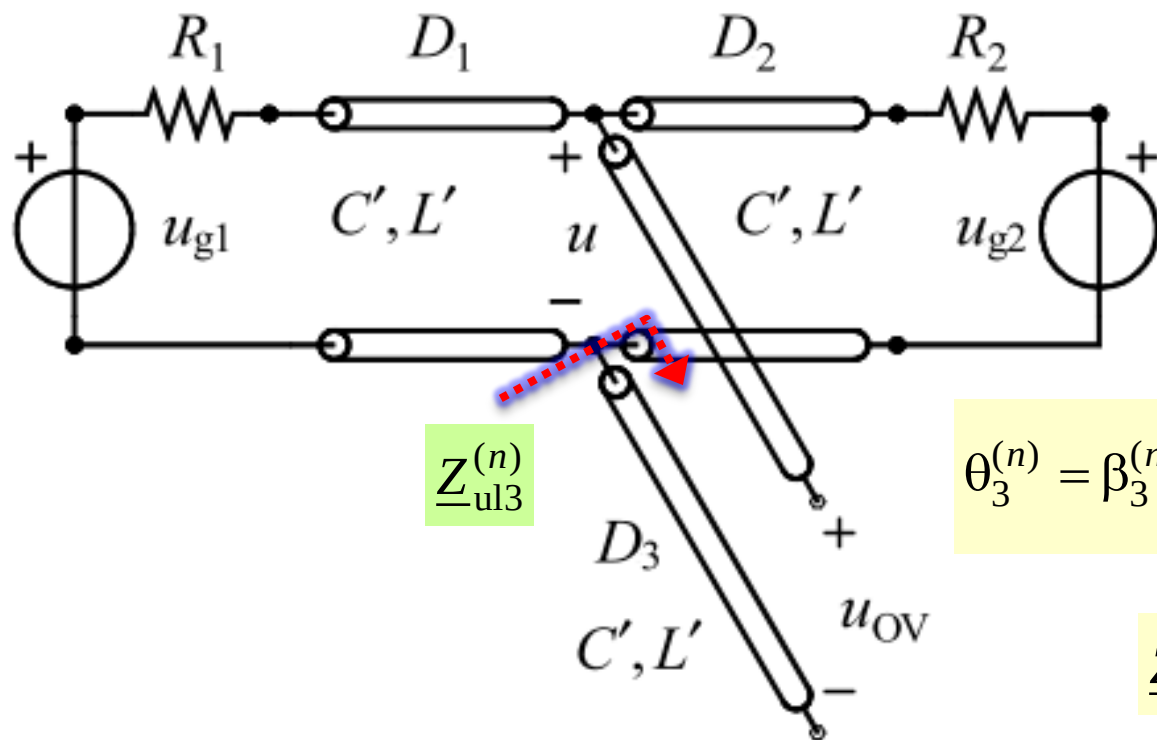
$$u = U$$

Тренутна вредност напона отворене везе је

$$u_{OV} = U - \sqrt{2}U \cos(\omega t) - \sqrt{2}U \cos(3\omega t)$$

Број грана графа електричног кола је

$$10$$



$$\theta_3^{(n)} = \beta_3^{(n)} d = n\omega\sqrt{L'C'} \frac{\pi}{2\omega\sqrt{L'C'}} = n\frac{\pi}{2}$$

$$\underline{Z}_{ul3}^{(n)} = -jZ_c \operatorname{ctg}(\theta_3^{(n)})$$

$$\theta_3^{(0)} = 0$$

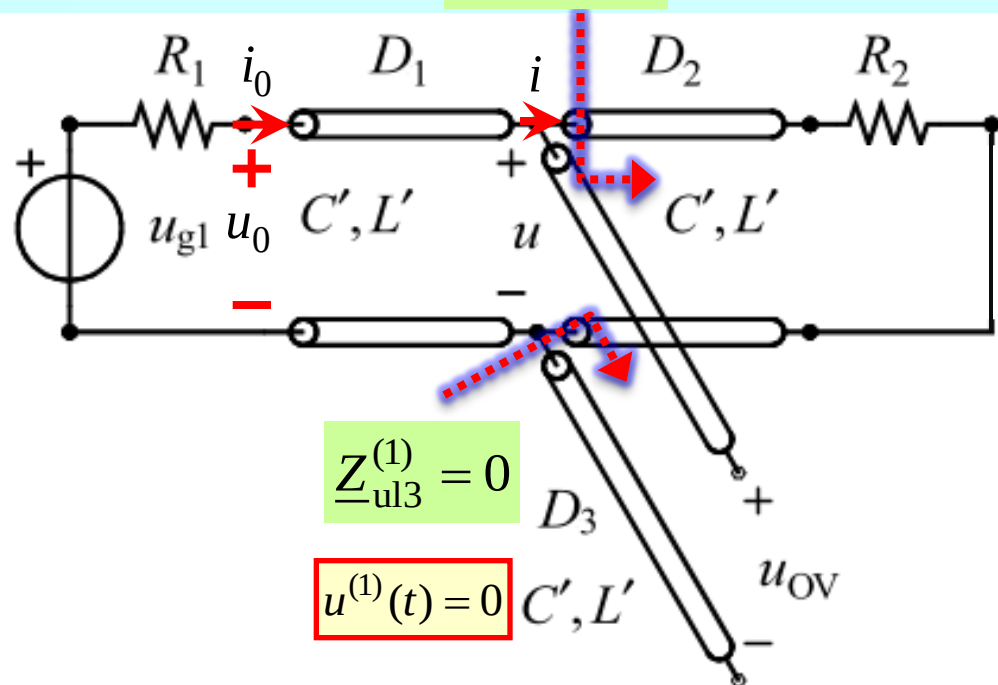
$$\underline{Z}_{ul3}^{(0)} \rightarrow \infty$$

$$\theta_3^{(1)} = \pi/2$$

$$\underline{Z}_{ul3}^{(1)} = 0$$

$$\theta_3^{(3)} = 3\pi/2$$

$$\underline{Z}_{ul3}^{(3)} = 0$$



$$u_{g1} \rightarrow \text{ON}, u_{g2} \rightarrow \text{OFF} (u_{g2} = 0)$$

$$\underline{s} = 0, u_{g1}^{(0)} = 2U$$

$$u^{(0)}(t) = \frac{1}{2} u_{g1}^{(0)}(t) = U$$

$$u_{ov}^{(0)}(t) = U$$

$$\underline{s} = j\omega, \theta_1^{(1)} = \beta_1^{(1)} d = \omega \sqrt{L'C'} \frac{\pi}{2\omega \sqrt{L'C'}} = \frac{\pi}{2},$$

$$u_{g1}^{(1)} = \sqrt{2}U \cos(\omega t)$$

$$\underline{U}_{g1}^{(1)} = jZ_c \underline{I}^{(1)} \Rightarrow \underline{I}^{(1)} = -j \frac{U_{g1}^{(1)}}{Z_c} = -j \frac{U}{Z_c}$$

$$\underline{I}^{(1)} = -j \frac{U}{Z_c}$$

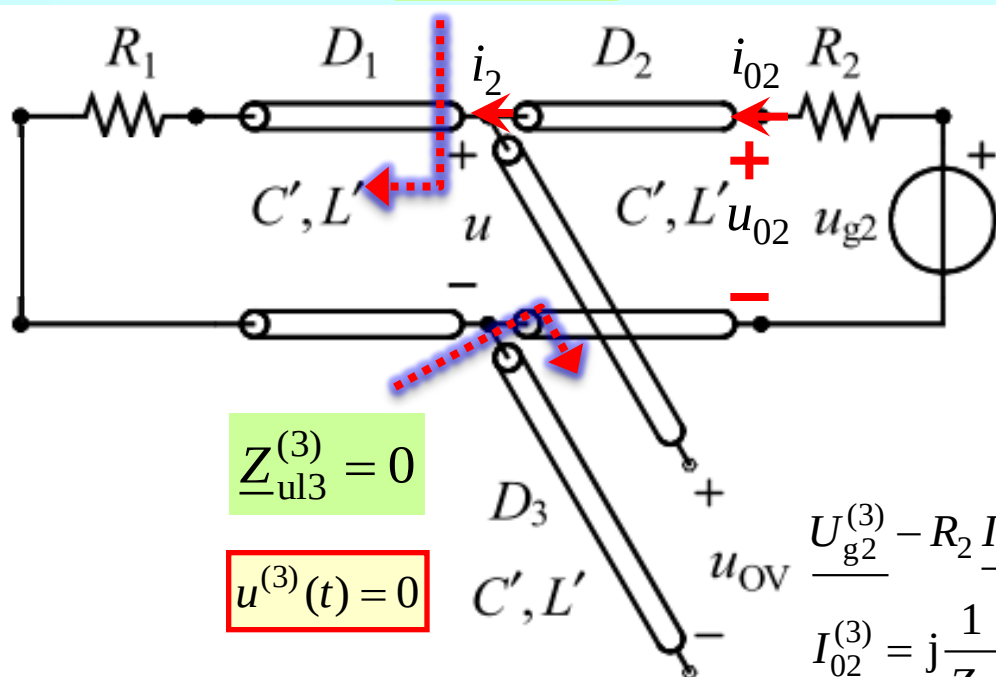
$$\underline{U}_{g1}^{(1)} - R_1 \underline{I}_0^{(1)} = \underline{U}_0^{(1)} = \cos(\theta_1^{(1)}) \cdot \underline{U}^{(1)} + jZ_c \sin(\theta_1^{(1)}) \cdot \underline{I}^{(1)} = jZ_c \underline{I}^{(1)}$$

$$\underline{I}_0^{(1)} = j \frac{1}{Z_c} \sin(\theta_1^{(1)}) \cdot \underline{U}^{(1)} + \cos(\theta_1^{(1)}) \cdot \underline{I}^{(1)} = 0$$

$$\underline{U}_{ov}^{(1)} = -U$$

$$u_{ov}^{(1)}(t) = -\sqrt{2}U \cos(\omega t)$$

$$\underline{I}^{(1)} = j \frac{1}{Z_c} \sin(\theta_3^{(1)}) \cdot \underline{U}_{ov}^{(1)} \Rightarrow -j \frac{U}{Z_c} = j \frac{1}{Z_c} \cdot \underline{U}_{ov}^{(1)} \Rightarrow \underline{U}_{ov}^{(1)} = -U$$



$$Z_{ul3}^{(3)} = 0$$

$$u^{(3)}(t) = 0$$

$$u_{g1} \rightarrow \text{OFF} (u_{g1} = 0), u_{g2} \rightarrow \text{ON}$$

$$\underline{s} = j3\omega,$$

$$\theta_2^{(3)} = \beta_2^{(3)} d = 3\omega \sqrt{L'C'} \frac{\pi}{2\omega \sqrt{L'C'}} = 3\frac{\pi}{2}$$

$$u_{g2}(t) = \sqrt{2}U \cos(3\omega t)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{g2}^{(3)} - R_2 \underline{I}_{O2}^{(3)} &= \underline{U}_{O2}^{(3)} = \cos(\theta_2^{(3)}) \cdot \underline{U}^{(3)} + jZ_c \sin(\theta_2^{(3)}) \cdot \underline{I}_2^{(3)} \\ \underline{I}_{O2}^{(3)} &= j \frac{1}{Z_c} \sin(\theta_2^{(3)}) \cdot \underline{U}^{(3)} + \cos(\theta_2^{(3)}) \cdot \underline{I}_2^{(3)} = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{ov}^{(3)} = -U$$

$$\underline{U}_{g2}^{(3)} = -jZ_c \cdot \underline{I}_2^{(3)} \rightarrow \underline{I}_2^{(3)} = j \frac{\underline{U}_{g2}^{(3)}}{Z_c} = j \frac{U}{Z_c} \quad \underline{I}_2^{(3)} = j \frac{U}{Z_c}$$

$$\underline{I}_2^{(3)} = j \frac{1}{Z_c} \sin(\theta_3^{(3)}) \cdot \underline{U}_{ov}^{(3)} = -j \frac{1}{Z_c} \cdot \underline{U}_{ov}^{(3)} \Rightarrow -j \frac{1}{Z_c} \cdot \underline{U}_{ov}^{(3)} = j \frac{U}{Z_c} \Rightarrow \underline{U}_{ov}^{(3)} = -U$$

$$u_{ov}(t) = u_{ov}^{(0)}(t) + u_{ov}^{(1)}(t) + u_{ov}^{(3)}(t) = U - \sqrt{2}U \cos(\omega t) - \sqrt{2}U \cos(3\omega t)$$

$$u_{ov}^{(3)}(t) = -\sqrt{2}U \cos(3\omega t)$$

$$u(t) = u^{(0)}(t) + u^{(1)}(t) + u^{(3)}(t) = U$$

Задатак (16)

Задатак 2

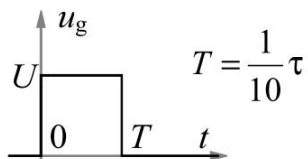
Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L' . Вод је без почетне енергије, $R_l = Z_c$, а побуда је позната.

Одредити

(7) Карактеристичну импедансу вода Z_c , кашњење вода τ , струју кратког споја $i(t)$, и њен домен, и

(5) улазни напон $u_1(t)$ и његов домен.

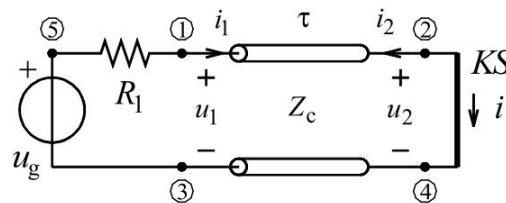
(3) Нацртати график улазног напона $u_1(t)$ за $-\tau < t < 3\tau$ ако је побуда дата на слици.



Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Карактеристична импеданса вода је

Кашњење вода је



$$\begin{cases} u_1(t) = Z_c i_1(t) + Z_c i_2(t - \tau) + u_2(t - \tau) \\ u_2(t) = Z_c i_2(t) + Z_c i_1(t - \tau) + u_1(t - \tau) \end{cases}$$

Струја кратког споја $i(t)$ и њен домен су

Улазни напон $u_1(t)$ и његов домен су

График улазног напона $u_1(t)$ за $-\tau < t < 3\tau$ и за дату побуду је

Погледати задатак број 6

Задатак (17)

Задатак 2

Водови са слике су без губитака и имају исте параметре: подужна капацитивност је $C' = c$ а подужна индуктивност је $L' = l$.

Одзив је устаљен. Побуда је

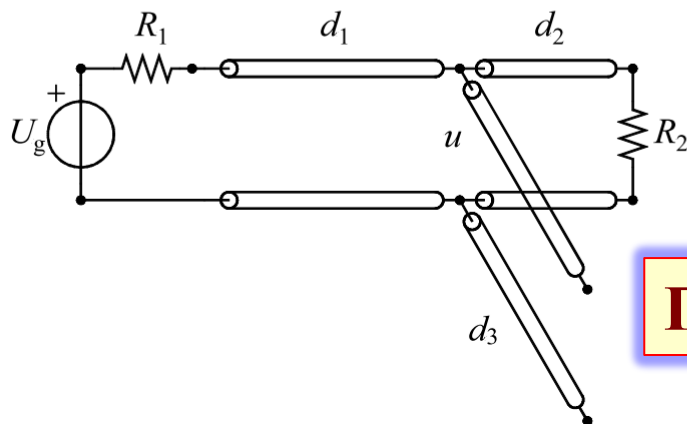
$$u_g = U_0 + \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t) + U_{m3} \cos(3\omega t).$$

Постоји веза параметара $2d_3\omega\sqrt{cl} = \pi$.

(7) Одредити тренутну вредност напона на месту споја водова.

(5) Одредити снагу отпорника R_2 .

(3) Нацртати граф кола.



Тренутна вредност напона на месту споја водова је

Снага отпорника R_2 је

Граф кола је

Погледати задатак број 13



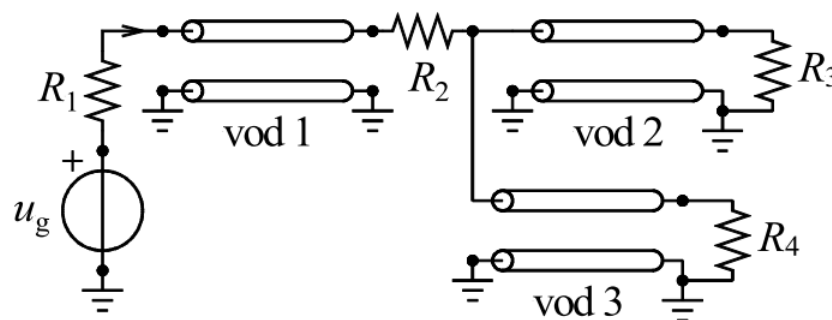
Задатак (18)

Задатак 1

Неоклопљена парица (Unshielded Twisted Pair, UTP) за повезивање рачунара у мрежу се може приближно представити као вод без губитака чија је карактеристична импеданса $Z_c = 100 \, \Omega$. Електрично коло чине три оваква вода и отпорници отпорности $R_1 = 2R_2 = R_3 = R_4 = Z_c$. Одзив је устаљен и простопериодичан, а побуда је u_g .

Одредити

- (5) струју извора,
- (5) коефицијент рефлексije на улазу првог вода, и
- (5) снаге отпорника R_3 и R_4 .



$$\text{Струја извора је } i = \frac{u_g}{2Z_c}.$$

Коефицијент рефлексije на улазу првог вода је једнак нули.

$$\text{Снаге отпорника су } p_{R_3} = p_{R_4} = \frac{u_g^2}{16Z_c}.$$

Задатак (18) нови

Задатак 1

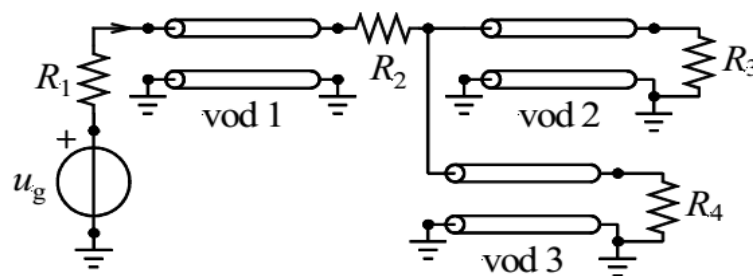
Неоклопљена парица (Unshielded Twisted Pair, UTP) Category 5 (cat 5) AWG-24 за повезивање рачунара у Ethernet мрежу се може идеализовано представити као вод без губитака примарних параметара

$L' = 500 \text{ nH/m}$, $C' = 50 \text{ pF/m}$. Електрично коло чине три оваква вода, дужине $D = 5 \text{ m}$, и отпорници отпорности $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = R_4 = 100 \Omega$. Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је $f = 20 \text{ MHz}$, $u_g(t) = \sqrt{2}U_g \sin(2\pi f t)$, $U_g = 4 \text{ V}$. Одредити

(5) тренутну струју извора (таласни облик) и коефицијент рефлексије на улазу првог вода

(5) фазну брзину и време простирања – време потребно да електромагнетски талас пређе пут једнак дужини вода

(5) тренутне снаге и средње (активне) снаге отпорника R_3 и R_4 .



Струја извора је $i = \frac{u_g}{2Z_c}$, $Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 100 \Omega$.

Коефицијент рефлексије је једнак нули.

Фазна брзина је $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Време је $\tau = \frac{D}{v} = D\sqrt{L'C'} = 25 \text{ ns}$.

Снаге отпорника су $p_{R_3} = p_{R_4} = \frac{u_g^2}{16Z_c}$,

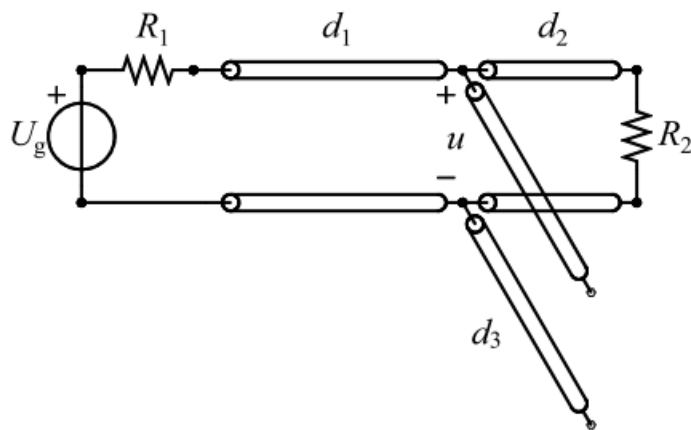
$P_{R_3} = P_{R_4} = \frac{U_g^2}{16Z_c} = 10 \text{ mW}$.

Задатак (19)

Задатак 1

Водови без губитака имају исте подужне параметре $C' = c$ и $L' = l$. Постоји веза параметара $R_1 = R_2 = \sqrt{l/c}$, $d_1 = 3d_3$, $2d_3\omega\sqrt{cl} = \pi$. Одзив је устаљен а побуда је $u_g = U + U \sin(\omega t) + \sqrt{2}U \cos(3\omega t)$. Одредити

- (5) тренутну вредност напона на месту споја
- (5) снагу отпорника R_2
- (5) ефективну вредност струје генератора.



Тренутна вредност напона u на месту споја водова је

$$u = \frac{U}{2}$$

Снага отпорника R_2 је

$$P = \frac{1}{4}U^2 \sqrt{\frac{c}{l}}$$

Ефективна вредност струје генератора је

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{2}U \sqrt{\frac{c}{l}}$$

Задатак (20)

Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

Водови су без губитака, истих подужних параметара, и имају исту електричну дужину $\Theta = \frac{\pi}{4}$ и карактеристичну импедансу Z_c .

Одзив је устаљен.

Побуда је простопериодична $u_g(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$.

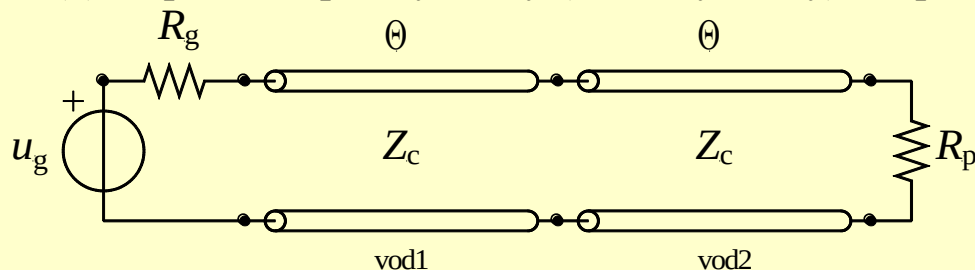
Коефицијент рефлексије на резистивном потрошачу је $\rho_p = \frac{1}{3}$.

Отпорност отпорника генератора R_g је $R_g = \frac{1}{2}Z_c$.

(а) Одредити средњу (активну) снагу која се предаје другом воду.

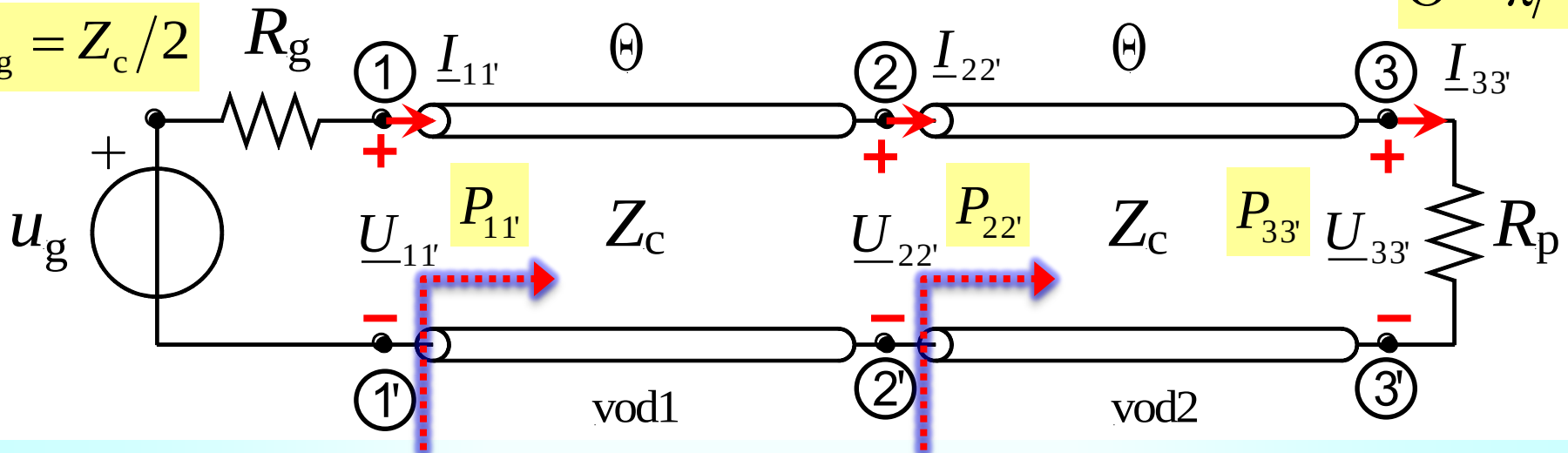
(б) Колики је коефицијент рефлексије на улазу првог вода?

(в) Одредити средњу снагу (активну снагу) потрошача.



$$u_g(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$$

$$\Theta = \pi/4$$



$$\underline{\rho}_{11'} = \underline{\rho}_{22'} e^{-2j\theta} = \underline{\rho}_p e^{-4j\theta} = -\frac{1}{3}$$

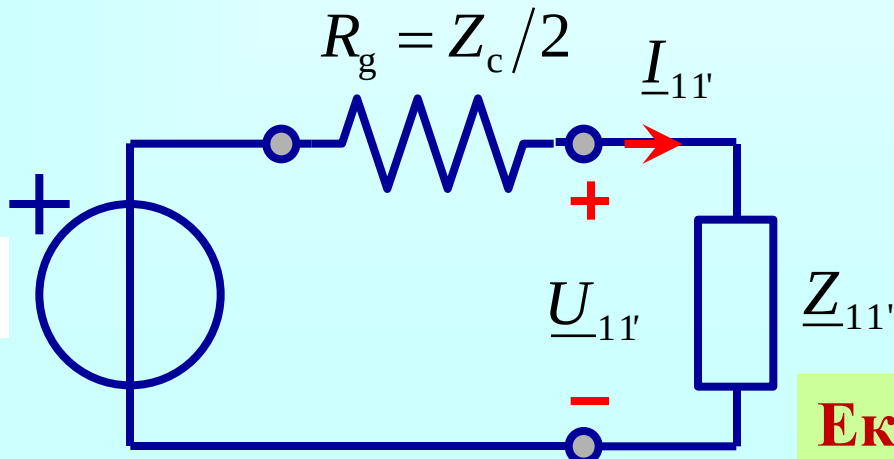
$$\underline{\rho}_{22'} = \underline{\rho}_p e^{-2j\theta}$$

$$\underline{\rho}_p = 1/3$$

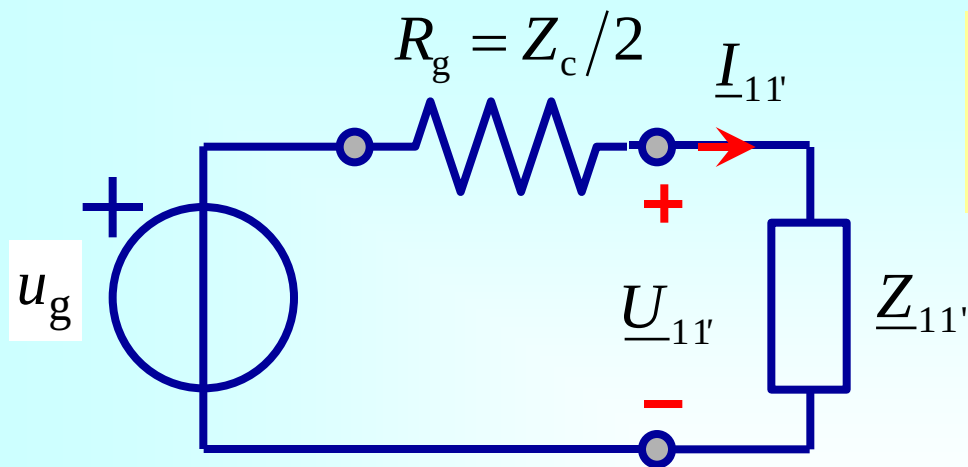
Коеф. рефлексije на ул. првог вода

Водови су без губитака

$$P_{11'} = P_{22'} = P_{33'} = P_{R_p}$$



Еквивалентно коло



$$\underline{\rho}_{11'} = \frac{\underline{Z}_{11'} - Z_c}{\underline{Z}_{11'} + Z_c} \Rightarrow \underline{Z}_{11'} = Z_c \frac{1 + \underline{\rho}_{11'}}{1 - \underline{\rho}_{11'}}$$

$$\underline{Z}_{11'} = Z_c \frac{1 - 1/3}{1 + 1/3} = \frac{Z_c}{2}$$

$$S_{11'} = \underline{U}_{11'} (\underline{I}_{11'})^* = \underline{U}_{11'} \left(\frac{\underline{U}_{11'}}{\underline{Z}_{11'}} \right)^* = \frac{U_{11'}^2}{Z_{11'}^*} = \frac{U^2}{2Z_c} = P_{11'}$$

$$\underline{U}_{11'} = \frac{1}{2} \underline{U}_g = \frac{1}{2} U e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow U_{11'} = \frac{1}{2} U$$

$$\underline{U}_g = U e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Водови су без губитака

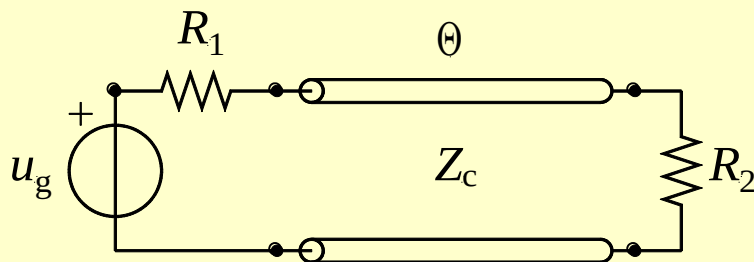
$$P_{11'} = P_{22'} = P_{33'} = P_{R_p} = \frac{U^2}{2Z_c}$$

Задатак (21)

Вод је без губитака. Одзив је устаљен. Побуда је простопериодична. R_1 и R_2 су познати. $u_g(t) = U_m \sin(\omega t)$. (а) Одредити електричну дужину вода Θ и карактеристичну импедансу вода Z_c тако да средња снага која се предаје воду буде највећа могућа.

(б) Одредити средњу снагу отпорника, којим је завршен вод, за одређену електричну дужину и карактеристичну импедансу.

(в) Колики је коефицијент рефлексije на улазу вода за одређену електричну дужину и карактеристичну импедансу?



Погледати задатак: Прилагођење по снази

Задатак (22)

Вод и краткоспојени огранак су без губитака.

Капацитивност кондензатора C и карактеристична импеданса Z_c су познати.

Одзив је устаљен.

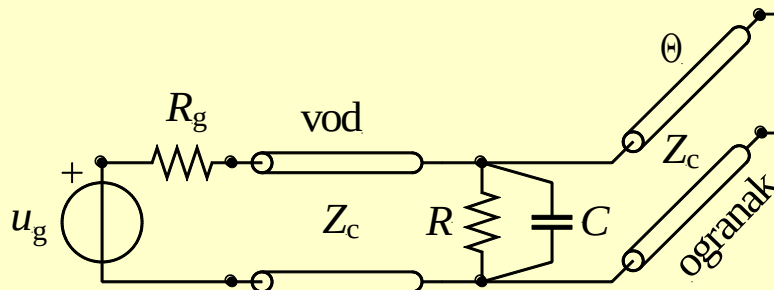
Побуда је простопериодична. $u_g(t) = U_m \cos(\omega t)$, $R_g = Z_c$.

(а) Одредити електричну дужину огранка Θ и отпорност потрошача R тако да средња снага потрошача буде највећа могућа.

(б) Одредити средњу снагу која се предаје воду за претходно одређену електричну дужину и отпорност.

(в) Колики је коефицијент рефлексије на улазу вода за претходно одређену електричну дужину и отпорност?

Нацртати граф овог електричног кола.



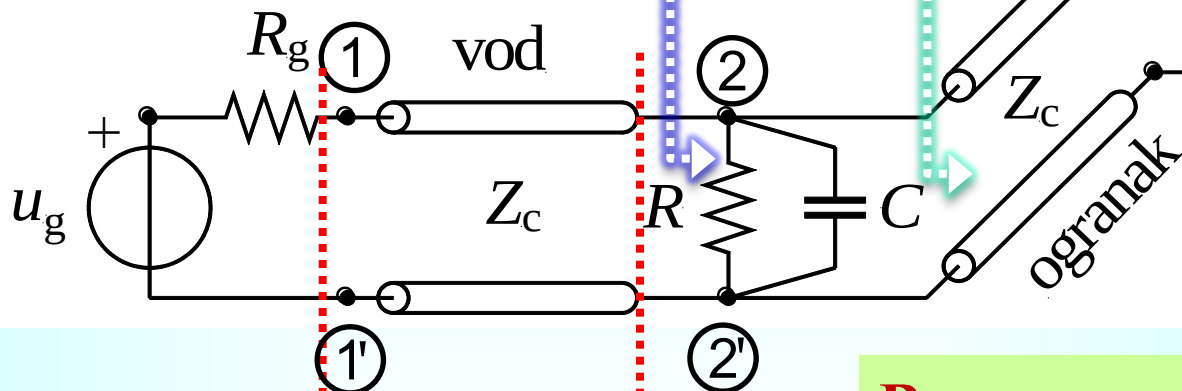
$$u_g(t) = U_m \cos(\omega t)$$

$$R_g = Z_c$$

$$Z_{22'}$$

$$Z_{ulogranka}$$

и факултет, 2019.

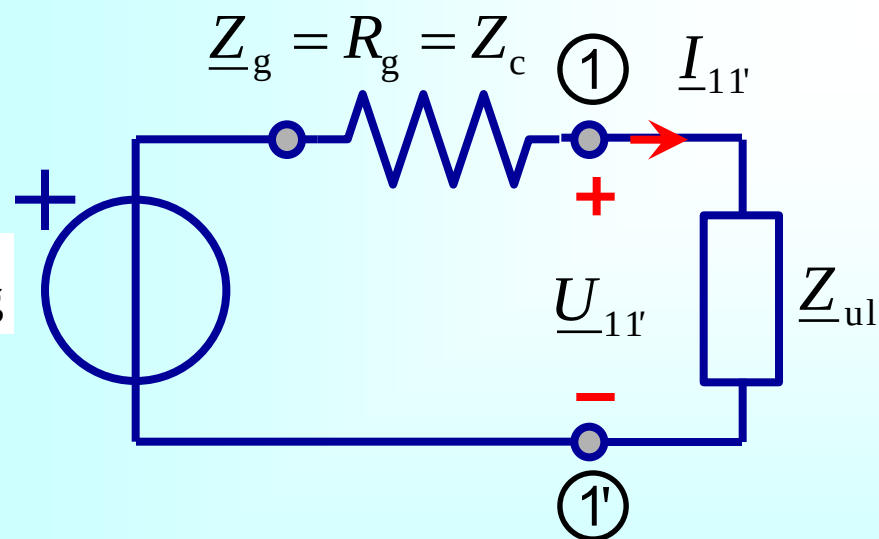


$$P_{11'}$$

$$P_{22'} = P_R$$

Водови су без губитака

$$P_{11'} = P_{22'} = P_R$$



$$P_R = P_{Rmax}$$

ако је

$$P_{11'} = P_{11'max} !!!$$

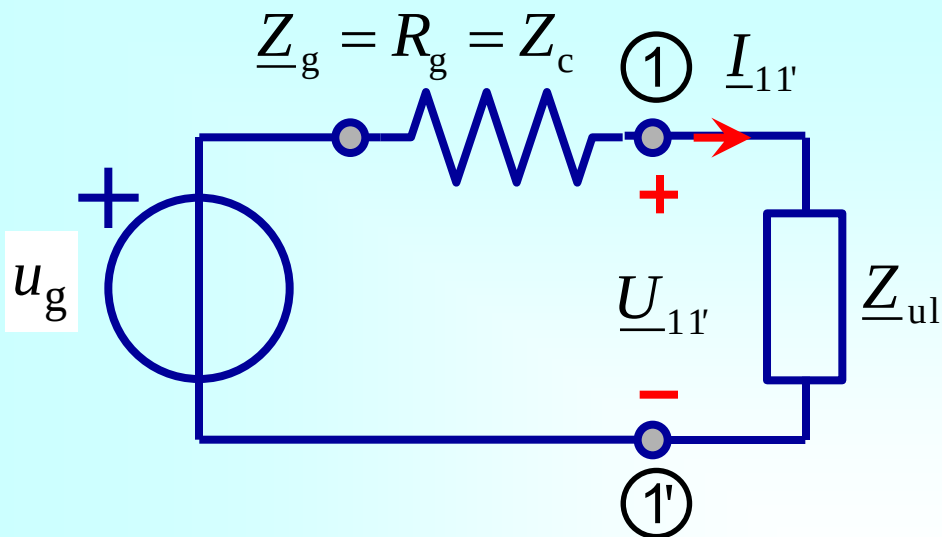
Посматра се прилагођење по снази у пресеку 1-1'

Прилагођење по снази

$$Z_{ul} = Z_g^*$$

ИЛИ

$$Z_{ul}^* = Z_g$$



$$\underline{Z}_{ul} = \underline{Z}_g^*$$



$$\underline{Z}_{ul} = R_g = Z_c$$



Вод је прилагођен, тј. затворен је својом карактеристичном импедансом.

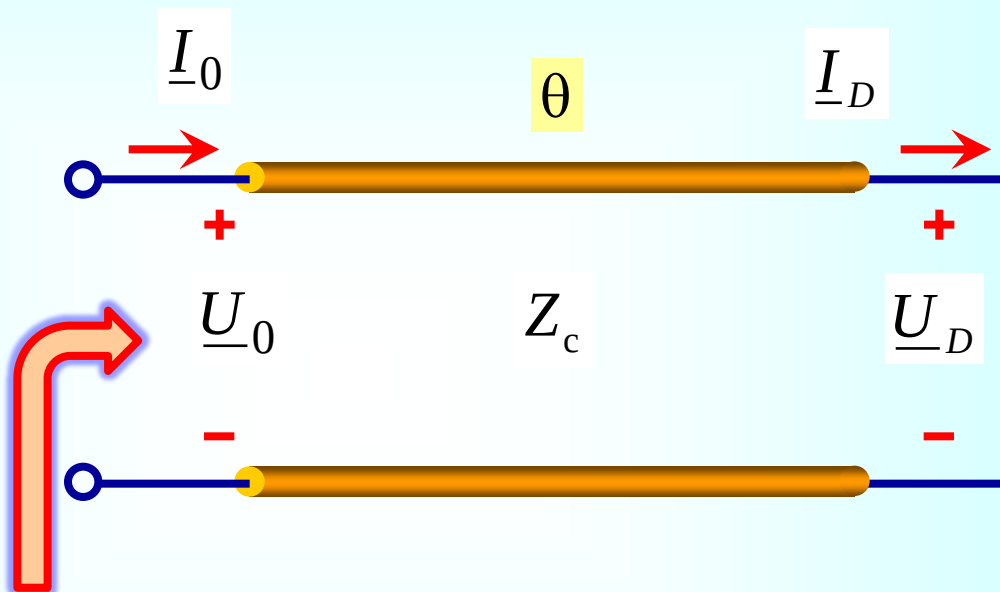


$$\underline{Z}_{22'} = Z_c$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{22'}} = \frac{1}{Z_c} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{\underline{Z}_{ulogranka}}$$

$$\underline{U}_0 = \cos(\Theta) \underline{U}_D + jZ_c \sin(\Theta) \underline{I}_D$$

$$\underline{I}_0 = jY_c \sin(\Theta) \underline{U}_D + \cos(\Theta) \underline{I}_D$$



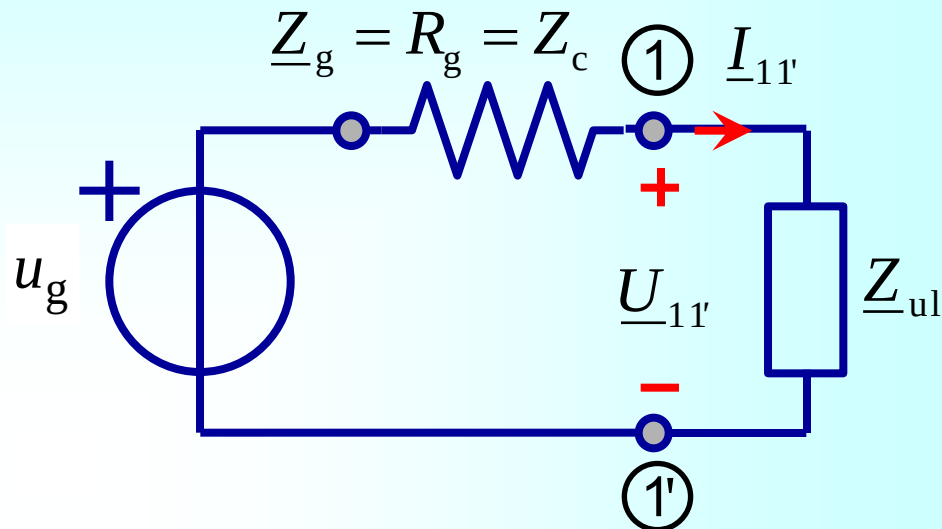
$$Z_{ulogranka} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \frac{\cos(\Theta) \overbrace{\underline{U}_D}^0 + jZ_c \sin(\Theta) \underline{I}_D}{jY_c \sin(\Theta) \underbrace{\underline{U}_D}_0 + \cos(\Theta) \underline{I}_D} = jZ_c \tan(\Theta)$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{22'}} = \frac{1}{Z_c} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{\underline{Z}_{ulogranka}}$$

$$\underline{Z}_{ulogranka} = jZ_c \tan(\Theta)$$

$$\frac{1}{Z_c} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{jZ_c \tan(\Theta)}$$

$$R = Z_c \quad \wedge \quad \tan(\Theta) = \frac{1}{Z_c \omega C}$$



$$\underline{S}_{11'} = \underline{U}_{11'} (\underline{I}_{11'})^* = \underline{U}_{11'} \left(\frac{\underline{U}_{11'}}{\underline{Z}_{ul}} \right)^* = \frac{U_{11'}^2}{Z_c} = \frac{U_m^2}{8Z_c}$$

$$\underline{U}_{11'} = \frac{1}{2} \underline{U}_g = \frac{1}{2} \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{U}_g = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$P_{11'} = \frac{U_m^2}{8Z_c}$$

**средња снага
која се предаје воду**

$$\underline{\rho}_{11} = 0$$

**коэффициент рефлексии
на улазу вода**

Задатак (23)

Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

Подужна капацитивност водова је $C'=c$ а подужна индуктивност је $L'=l$.

$$R_1 = 0.2R, R_2 = R, R_3 = R,$$

$$l = 4R^2c, d_1 = 2d_2, d_1\omega\sqrt{cl} = \pi,$$

$$u_g = \sqrt{2}U \sin(\omega t).$$

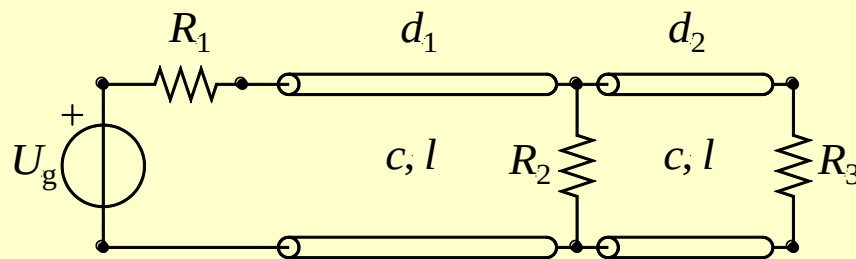
Водови су без губитака.

Одзив је устаљен.

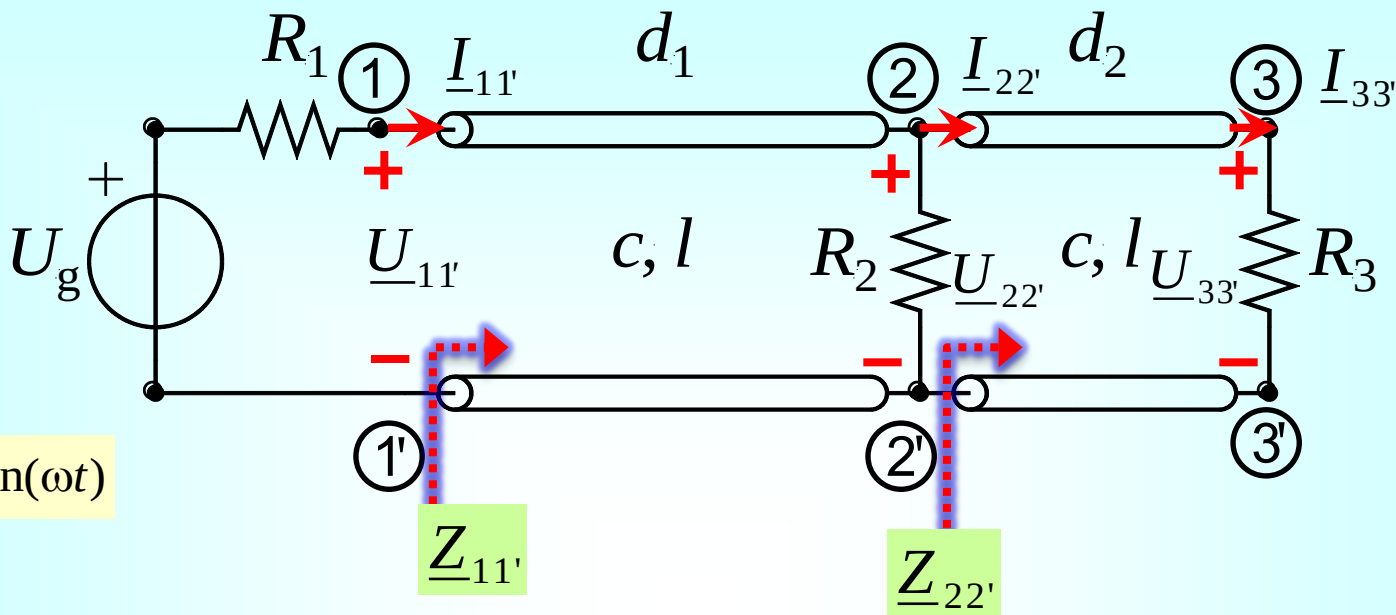
(а) Одредити тренутну вредност струје напонског извора.

(б) Одредити средњу снагу коју напонски извор (напонски генератор) предаје остатку електричног кола.

(б) Колики је коефицијент рефлексије на улазу првог вода?



$$\begin{aligned} C' &= c \\ L' &= l \\ R_1 &= 0.2R \\ R_2 &= R \\ R_3 &= R \\ l &= 4R^2c \\ d_1 &= 2d_2 \\ d_1\omega\sqrt{cl} &= \pi \\ u_g &= \sqrt{2}U \sin(\omega t) \end{aligned}$$



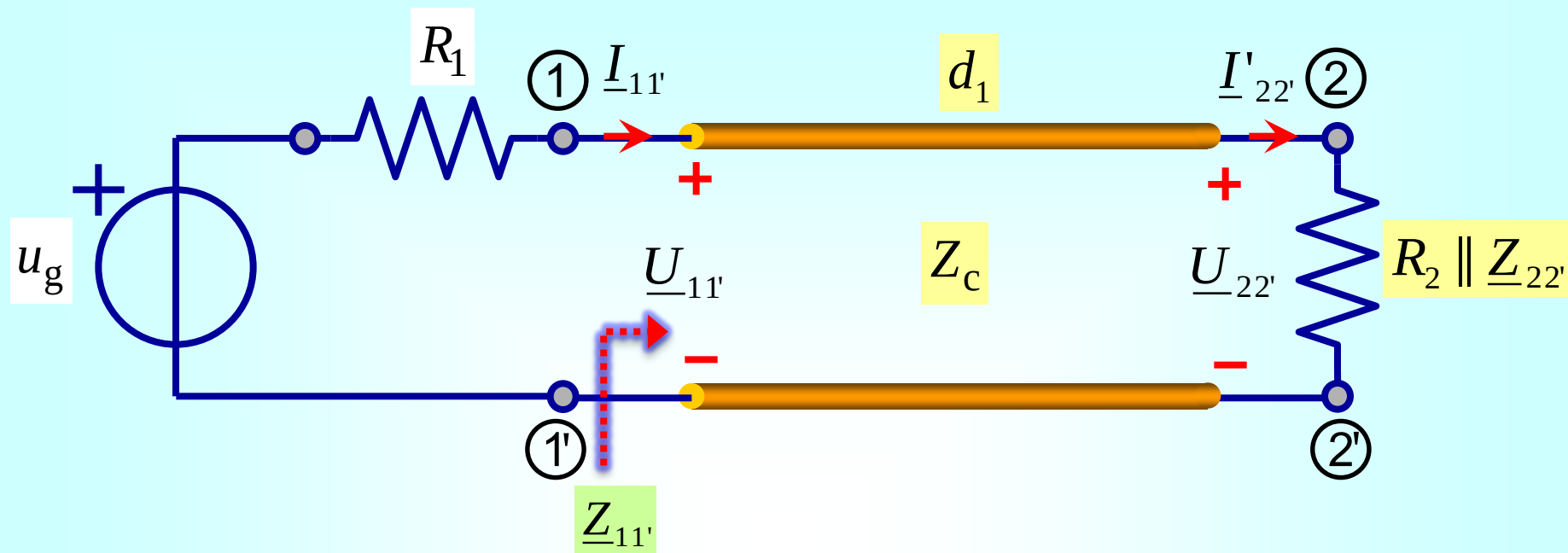
$$\Theta_2 = \beta_2 d_2 = \omega\sqrt{L'C'} \frac{\pi}{2\omega\sqrt{L'C'}} = \frac{\pi}{2}$$

$$Z_{C_1} = Z_{C_2} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 2R = Z_C$$

$$\underline{U}_{22'} = \cos(\Theta_2)\underline{U}_{33'} + jZ_c \sin(\Theta_2)\underline{I}_{33'}$$

$$\underline{I}_{22'} = jY_c \sin(\Theta_2)\underline{U}_{33'} + \cos(\Theta_2)\underline{I}_{33'}$$

$$\underline{Z}_{22'} = \frac{\underline{U}_{22'}}{\underline{I}_{22'}} = Z_c^2 \frac{\underline{I}_{33'}}{\underline{U}_{33'}} = \frac{Z_c^2}{R_3} = 4R$$

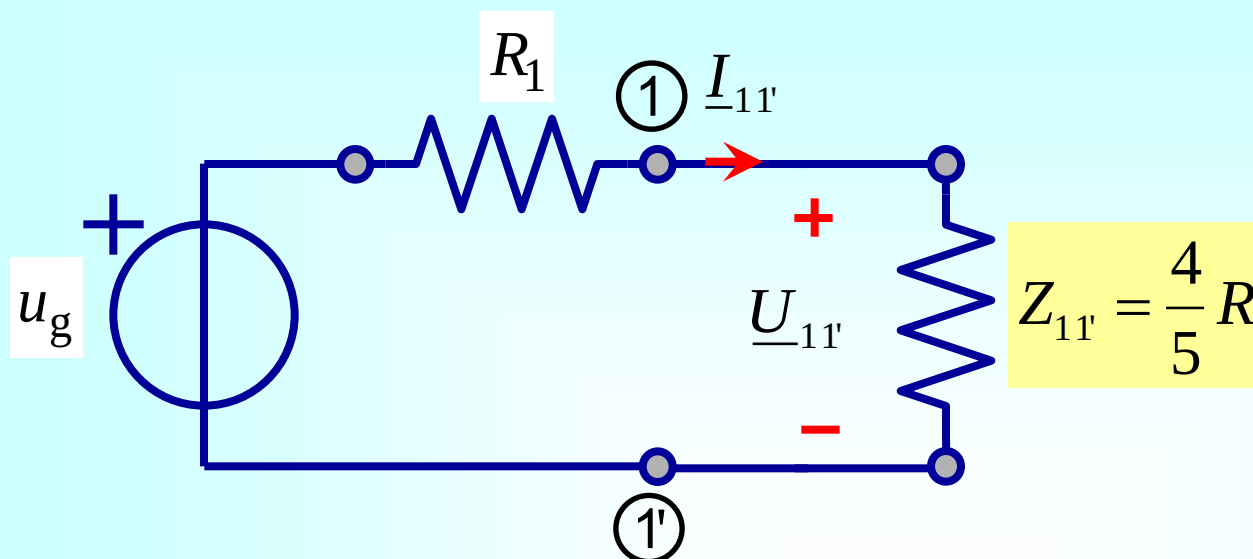


$$\Theta_1 = \beta_1 d_1 = \omega \sqrt{L' C'} \frac{\pi}{\omega \sqrt{L' C'}} = \pi$$

$$\underline{U}_{11'} = \cos(\Theta_1) \underline{U}_{22'} + j Z_c \sin(\Theta_1) \underline{I}'_{22'}$$

$$\underline{I}_{11'} = j Y_c \sin(\Theta_1) \underline{U}_{22'} + \cos(\Theta_1) \underline{I}'_{22'}$$

$$\underline{Z}_{11'} = \frac{\underline{U}_{11'}}{\underline{I}_{11'}} = \frac{\underline{U}_{22'}}{\underline{I}'_{22'}} = R_2 \parallel \underline{Z}_{22'} = R \parallel 4R = \frac{4}{5} R$$



$$\underline{I}_{11'} = \frac{\underline{U}_g}{R_1 + \underline{Z}_{11'}} = \frac{\underline{U}_g}{R}$$

$$i_{11'}(t) = \frac{\sqrt{2}U}{R} \sin(\omega t)$$

**тренутна вредност
струје напонског извора**

$$\underline{S}_g = \underline{U}_g (\underline{I}_{11'})^* = \underline{U}_g \left(\frac{\underline{U}_g}{R} \right)^* = \frac{U_g^2}{R} = \frac{U^2}{R} = P_g$$

**средња снага коју
напонски извор
предаје остатку ел. кола**

$$\underline{\rho}_{11'} = \frac{\underline{Z}_{11'} - Z_c}{\underline{Z}_{11'} + Z_c} = \frac{\frac{4}{5}R - 2R}{\frac{4}{5}R + 2R} = -\frac{3}{7}$$

**коэффициент рефлексии
на улазу првог вода**