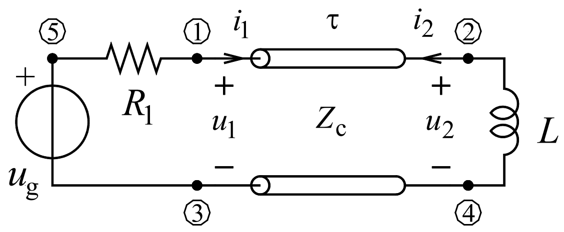
Задатак

Идеалан вод дужине D има примарне параметре C' и L'. Вод и калем су без почетне енергије, $R_1 = Z_c$, $u_g = U\,\vartheta(t)$, $U > 0$, L је познато.

Одредити карактеристичну импедансу вода Z_c, кашњење вода τ, напон калема $u_2(t)$, његов домен, улазну струју $i_1(t)$ и њен домен.
Нацртати график напон калема $u_2(t)$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Решење

Анализа помоћу унилатералне Лапласове трансформације је делотворан и учинковит поступак за решавање линеарних временски-непроменљивих електричних кола. Користићемо Лапласову трансформацију за одређивање одзива и функција кола.

Директна унилатерална Лапласова трансформација је дефинисана као
$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t)) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\, e^{-\underline{s}\,t}\, dt$, где је $\underline{s}$ Лапласова променљива, коју још називамо комплексна учестаност, а $(u(t), \underline{U}(\underline{s}))$ чини Лапласов трансформациони пар. Функција времена $u(t)$ је тренутна вредност (оригинал, напон/струја) и то је каузална функција времена. Комплексна функција $\underline{U}(\underline{s})$ је Лапласов трансформат (слика, комплексан напон/струја, комплексан представник, трансформат).

Сажети систем једначина електричног кола је

$$u_g(t) = R_1\, i_1(t) + u_1(t)$$

$$0 = L\,\frac{d i_2(t)}{dt} + u_2(t)$$

$$u_1(t) = Z_c\, i_1(t) + Z_c\, i_2(t-\tau) + u_2(t-\tau)$$

$$u_2(t) = Z_c\, i_2(t) + Z_c\, i_1(t-\tau) + u_1(t-\tau)$$

Последње две једначине су једначине идеалног вода.

Једначина калема је коришћена у једначини КЗН за излаз вода.

Нису увођени посебни симболи за напон извора, струју извора, струју отпорника, напон отпорника, струју калема и напон калема. За напон извора је коришћена побуда. За струју редне везе приступа је коришћена једна ознака. За напон паралелне везе приступа је коришћена једна ознака.

Карактеристична импеданса вода је $Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$, а кашњење вода је $\tau = D\sqrt{L'\,C'}$.

Применимо унилатералну Лапласову трансформацију и напишимо комплексне сажете једначине електричног кола.

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = Z_c\, \underline{I}_1(\underline{s}) + \underline{U}_1(\underline{s})$$

$$0 = L\,\underline{s}\,\underline{I}_2(\underline{s}) + \underline{U}_2(\underline{s})$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) = Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s}) + Z_c\,\underline{I}_2(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau} + \underline{U}_2(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau}$$
$$\underline{U}_2(\underline{s}) = Z_c\,\underline{I}_2(\underline{s}) + Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau} + \underline{U}_1(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau}$$

Из прве једначине можемо заменити $\underline{U}_1(\underline{s})$ а из друге $\underline{I}_2(\underline{s})$.

$$\underline{U}_g(\underline{s}) - Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s}) = Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s}) + Z_c\,\frac{-1}{L\,\underline{s}}\,\underline{U}_2(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau} + \underline{U}_2(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau}$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = Z_c\,\frac{-1}{L\,\underline{s}}\,\underline{U}_2(\underline{s}) + Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau} + \left(\underline{U}_g(\underline{s}) - Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s})\right)e^{-\underline{s}\,\tau}$$

Природни почетни услови се не појављују у једначинама зато што је електрично коло без почетне енергије. Природни почетни услови су једнаки нули.

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = 2\,Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s}) + \left(Z_c\,\frac{-1}{L\,\underline{s}} + 1\right)\underline{U}_2(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau}$$

$$\left(1 + Z_c\,\frac{1}{L\,\underline{s}}\right)\underline{U}_2(\underline{s}) = \underline{U}_g(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau}$$

Из друге једначине се одређује комплексан напон калема $\underline{U}_2(\underline{s})$. На основу њега, из прве једначине, се одређује комплексна улазна струја вода $\underline{I}_1(\underline{s})$.

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = \frac{1}{1+Z_c\,\frac{1}{L\,\underline{s}}}\,\underline{U}_g(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau}$$

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = \mathrm{LT}\left(u_g(t)\right) = \mathrm{LT}(U\,\vartheta(t)) = U\,\frac{1}{\underline{s}}$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = \frac{1}{1+Z_c\,\frac{1}{L\,\underline{s}}}\,U\,\frac{1}{\underline{s}}\,e^{-\underline{s}\,\tau} = U\,\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}\,e^{-\underline{s}\,\tau}$$

Инверзну унилатералну Лапласову трансформацију одређујемо преко својстава, ставова (теорема), и табеле парова. У табели постоји Лапласов трансформациони пар

In[1]:=
```
1/(s + a) == LT[InverseLaplaceTransform[1/(s + a), s, t]] // TraditionalForm
```
Out[1]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{a+s} = \mathrm{LT}(e^{-a\,t})$$

Комплексан одзив преуређујемо на облик који одговара облику из табеле парова. Препознајемо коефицијенте из табеле. Овакав поступак се назива уклапање образаца (pattern matching).

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = \underline{V}(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau},\ \ \underline{V}(\underline{s}) = U\,\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}$$

Одзив (тренутну вредност, таласни облик, оригинал, струја/напон) као функцију у временском домену одређујемо из Лапласовог трансформационог пара заменом коефицијената конкретним вредностима. Користимо теорему $\left\{v(t-T),\ \underline{V}(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,T}\right\}$, $T = \mathrm{const}$.

$$u_2(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}_2(\underline{s})) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{V}(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau}) = v(t-\tau),$$
$$v(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{V}(\underline{s})) = \mathrm{LT}^{-1}\left(U\,\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}\right) = U\,e^{\frac{-Z_c}{L}\,t}\,\vartheta(t)$$

Додајемо генералисане функције и домен.

$$u_2(t) = U\,e^{\frac{-Z_c}{L}\,(t-\tau)}\,\vartheta(t-\tau)\,,\ \ -\infty < t < +\infty$$

Улазна струја вода $i_1(t)$ се одређује сличним поступком. Комплексан одзив преобликујемо на збир једноставних сабирака чију инверзну трансформацију можемо наћи у таблици парова или одредити применом својстава.

$$U\,\frac{1}{\underline{s}} = 2\,Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s}) + \left(Z_c\,\frac{-1}{L\,\underline{s}} + 1\right)\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}\,U\,e^{-\underline{s}\,\tau}\,e^{-\underline{s}\,\tau}$$

$$U\,\frac{1}{\underline{s}} = 2\,Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s}) + \left(Z_c\,\frac{-1}{L\,\underline{s}} + 1\right)\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}\,U\,e^{-2\,\underline{s}\,\tau}$$

$$\frac{U}{2\,Z_c}\,\frac{1}{\underline{s}} = \underline{I}_1(\underline{s}) + \left(\frac{-1}{2\,L\,\underline{s}} + \frac{1}{2\,Z_c}\right)\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}\,U\,e^{-2\,\underline{s}\,\tau}$$

$$\underline{I}_1(\underline{s}) = \frac{U}{2\,Z_c}\,\frac{1}{\underline{s}} + \left(\frac{1}{2\,L\,\underline{s}} - \frac{1}{2\,Z_c}\right)\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}\,U\,e^{-2\,\underline{s}\,\tau}$$

$$\underline{I}_1(\underline{s}) = \frac{U}{2\,Z_c}\,\frac{1}{\underline{s}} + \underline{I}_{11}(\underline{s})\,e^{-2\,\underline{s}\,\tau} - \underline{I}_{12}(\underline{s})\,e^{-2\,\underline{s}\,\tau}$$

$$\underline{I}_{11}(\underline{s}) = U\,\frac{1}{2\,L\,\underline{s}}\,\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}},\ \underline{I}_{12}(\underline{s}) = U\,\frac{1}{2\,Z_c}\,\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}$$

У табели постоји Лапласов трансформациони пар

In[2]:=
```
1/(s (s + a)) == LT[InverseLaplaceTransform[1/(s (s + a)), s, t]] // TraditionalForm
```

Out[2]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{s\,(a+s)} = \mathrm{LT}\left(\frac{1}{a} - \frac{e^{-a\,t}}{a}\right)$$

$$i_1(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{I}_1(\underline{s})) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{U}{2\,Z_c}\,\frac{1}{\underline{s}}\right) + \mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{I}_{11}(\underline{s})\,e^{-2\,\underline{s}\,\tau}\right) - \mathrm{LT}^{-1}\left(\underline{I}_{12}(\underline{s})\,e^{-2\,\underline{s}\,\tau}\right)$$

$$i_1(t) = \frac{U}{2\,Z_c}\,\vartheta(t) + i_{11}(t - 2\,\tau) - i_{12}(t - 2\,\tau)$$

$$i_{11}(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{I}_{11}(\underline{s})) = \mathrm{LT}^{-1}\left(U\,\frac{1}{2\,L\,\underline{s}}\,\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}\right) = \frac{U}{2\,L}\,\frac{1}{\frac{Z_c}{L}}\left(1 - e^{\frac{-Z_c}{L}\,t}\right)\vartheta(t)$$

$$i_{12}(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{I}_{12}(\underline{s})) = \mathrm{LT}^{-1}\left(U\,\frac{1}{2\,Z_c}\,\frac{1}{\underline{s}+\frac{Z_c}{L}}\right) = \frac{U}{2\,Z_c}\,e^{\frac{-Z_c}{L}\,t}\,\vartheta(t)$$

$$i_1(t) = \frac{U}{2\,Z_c}\,\vartheta(t) + \frac{U}{2\,Z_c}\left(1 - e^{\frac{-Z_c}{L}\,(t-2\,\tau)}\right)\vartheta(t - 2\,\tau) - \frac{U}{2\,Z_c}\,e^{\frac{-Z_c}{L}\,(t-2\,\tau)}\,\vartheta(t - 2\,\tau)$$

$$i_1(t) = \frac{U}{2\,Z_c}\,\vartheta(t) + \frac{U}{2\,Z_c}\left(1 - 2\,e^{\frac{-Z_c}{L}\,(t-2\,\tau)}\right)\vartheta(t - 2\,\tau),$$

$$-\infty < t < +\infty$$

Електрично коло је линеарно временски непромењиво, нема почетне енергије, почетни услови су једнаки нули, побуда је каузална (једнака нули за негативно време), тако да је добијени одзив кола одзив на побуду (екситацију, укључење генератора).

Побуда је (1) дефинисана за сваки тренутак времена, (2) каузална, и (3) једнака нули за негативно време. У изразу за побуду се појављује Хевисајдова одскочна функција.
Домен побуде (екситације) је сваки реалан тренутак времена $t \in \mathbb{R}$, $-\infty < t < +\infty$.

Познајемо предисторију кола, знамо да је одзив једнак нули до почетка деловања побуде (до тренутка када побуда постаје различита од нуле), тако да је област дефинисаности одзива (домен) сваки реалан тренутак времена $t \in \mathbb{R}$, $-\infty < t < +\infty$.

Одзив овог електричног кола је одзив на побуду и познат је за сваки тренутак времена. То је одзив на каузалну побуду и једнак је нули за негативно време.

У изразу за одзив на побуду се уз сваки сабирак увек појављује као множилац или (1) Хевисајдова одскочна функција, или (2) Диракова делта-функција, или (3) извод Диракове делта-функције.

Аутоматизована симболичка рачунарска анализа

```
In[3]:= $Assumptions = {L > 0, Zc > 0, t ∈ Reals, τ > 0}
Out[3]= {L > 0, Zc > 0, t ∈ ℝ, τ > 0}

In[4]:= okvir[x_] := x // Style[#, 24] & // Framed[#, FrameStyle → Cyan] & // TraditionalForm

In[5]:= okvirY[x_] := x // Style[#, 24] & // Framed[#, FrameStyle → Yellow] & // TraditionalForm

In[6]:= sZapis = {τ → Style["τ", Italic], Rule → Equal, s → Style["s", {Italic, Underlined}],
          Ug → Subscript[Style["U", {Underlined, Italic}], "g"][Style[s, Underlined]],
          U1 → Subscript[Style["U", {Underlined, Italic}], 1][Style[s, Underlined]],
          U2 → Subscript[Style["U", {Underlined, Italic}], 2][Style[s, Underlined]],
          I1 → Subscript[Style["I", {Underlined, Italic}], 1][Style[s, Underlined]],
          I2 → Subscript[Style["I", {Underlined, Italic}], 2][Style[s, Underlined]],
          Zc → Subscript[Style["Z", Italic], "c"]}
```

Out[6]= $\{\tau \to \tau, \text{Rule} \to \text{Equal}, s \to \underline{s}, \text{Ug} \to \underline{U}_g[\underline{s}], \text{U1} \to \underline{U}_1[\underline{s}], \text{U2} \to \underline{U}_2[\underline{s}], \text{I1} \to \underline{I}_1[\underline{s}], \text{I2} \to \underline{I}_2[\underline{s}], \text{Zc} \to Z_c\}$

```
In[7]:= zamena = {R1 → Zc}
Out[7]= {R1 → Zc}
```

Анализа помоћу унилатералне Лапласове трансформације

```
In[8]:= jednacine = {Ug == R1 I1 + U1, 0 == L s I2 + U2, U1 == Zc I1 + Zc I2 Exp[-s τ] + U2 Exp[-s τ],
           U2 == Zc I2 + Zc I1 Exp[-s τ] + U1 Exp[-s τ]} /. zamena
```

Out[8]= $\{\text{Ug} == \text{U1} + \text{I1 Zc}, 0 == \text{I2 L s} + \text{U2}, \text{U1} == e^{-s\tau}\,\text{U2} + \text{I1 Zc} + e^{-s\tau}\,\text{I2 Zc}, \text{U2} == e^{-s\tau}\,\text{U1} + e^{-s\tau}\,\text{I1 Zc} + \text{I2 Zc}\}$

```
In[9]:= Column[jednacine] /. sZapis // okvirY
```

Out[9]//TraditionalForm=

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{U}_g(\underline{s}) = Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s}) + \underline{U}_1(\underline{s}) \\ 0 = L\,\underline{s}\,\underline{I}_2(\underline{s}) + \underline{U}_2(\underline{s}) \\ \underline{U}_1(\underline{s}) = Z_c\,\underline{I}_2(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau} + Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s}) + e^{-\underline{s}\,\tau}\,\underline{U}_2(\underline{s}) \\ \underline{U}_2(\underline{s}) = Z_c\,\underline{I}_1(\underline{s})\,e^{-\underline{s}\,\tau} + Z_c\,\underline{I}_2(\underline{s}) + e^{-\underline{s}\,\tau}\,\underline{U}_1(\underline{s}) \end{array}}$$

In[10]:=
```
odziv =
 Solve[jednacine /. Ug → LaplaceTransform[U HeavisideTheta[t], t, s], {I1, I2, U1, U2}]
```

Out[10]=
$$\left\{\left\{I1 \to \frac{e^{-2 s \tau} U \left(-L s + e^{2 s \tau} L s + Zc + e^{2 s \tau} Zc\right)}{2 s Zc (L s + Zc)}, I2 \to -\frac{e^{-s \tau} U}{s (L s + Zc)}, U1 \to \frac{e^{-2 s \tau} U \left(L s + e^{2 s \tau} L s - Zc + e^{2 s \tau} Zc\right)}{2 s (L s + Zc)}, U2 \to \frac{e^{-s \tau} L U}{L s + Zc}\right\}\right\}$$

In[11]:=
```
Column[odziv // First] /. sZapis // okvirY
```

Out[11]//TraditionalForm=
$$\underline{I}_1(\underline{s}) = \frac{U e^{-2 \underline{s} \tau} \left(Z_c e^{2 \underline{s} \tau} + Z_c + L \underline{s} e^{2 \underline{s} \tau} - L \underline{s}\right)}{2 \underline{s} Z_c (Z_c + L \underline{s})}$$
$$\underline{I}_2(\underline{s}) = -\frac{U e^{-\underline{s} \tau}}{\underline{s} (Z_c + L \underline{s})}$$
$$\underline{U}_1(\underline{s}) = \frac{U e^{-2 \underline{s} \tau} \left(Z_c e^{2 \underline{s} \tau} - Z_c + L \underline{s} e^{2 \underline{s} \tau} + L \underline{s}\right)}{2 \underline{s} (Z_c + L \underline{s})}$$
$$\underline{U}_2(\underline{s}) = \frac{L U e^{-\underline{s} \tau}}{Z_c + L \underline{s}}$$

In[12]:=
```
U2s = U2 /. odziv // First
```

Out[12]=
$$\frac{e^{-s \tau} L U}{L s + Zc}$$

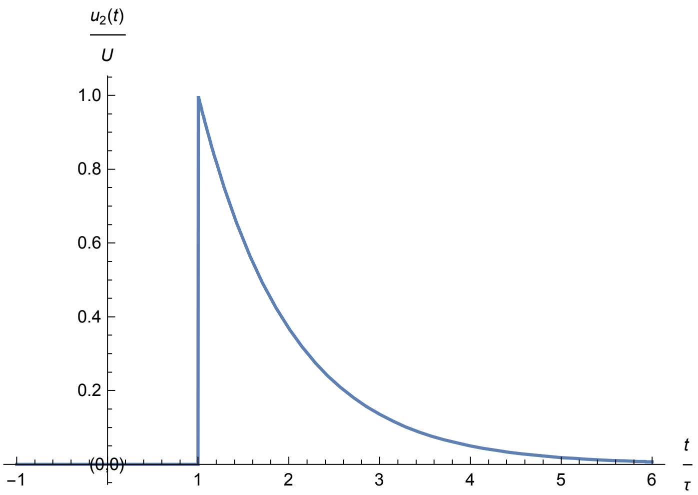
In[13]:=
```
u2t = InverseLaplaceTransform[U2s, s, t]
```

Out[13]=
$$e^{-\frac{Zc (t-\tau)}{L}} U \text{HeavisideTheta}[t - \tau]$$

In[14]:=
```
Row[{u2[t] == u2t /. Zc → Z"c", ",     ", -∞ < t < ∞}] // okvir
```

Out[14]//TraditionalForm=
$$u_2(t) = U\, \theta(t-\tau)\, e^{-\frac{Z_c (t-\tau)}{L}}, \quad -\infty < t < \infty$$

In[15]:=
```
Plot[(u2t/U /. t → x τ /. L → Zc τ) // Simplify, {x, -1, 6},
 AxesLabel → {t / τ, u2[t] / U}, PlotRange → All, Epilog → Text["(0,0)"]]
```

Out[15]=


In[16]:=
```
I1s = I1 /. odziv // First
```

Out[16]=
$$\frac{e^{-2 s \tau} U \left(-L s + e^{2 s \tau} L s + Zc + e^{2 s \tau} Zc\right)}{2 s Zc (L s + Zc)}$$

In[17]:=
```
i1t = InverseLaplaceTransform[I1s, s, t] // Expand
```

Out[17]=
$$\frac{U}{2 Zc} + \frac{U \, \text{HeavisideTheta}[t - 2 \tau]}{2 Zc} - \frac{e^{-\frac{Zc (t-2\tau)}{L}} U \, \text{HeavisideTheta}[t - 2 \tau]}{Zc}$$

In[18]:=
```
Row[{i1[t] == HeavisideTheta[t] First[i1t] + Rest[i1t] /. Zc → Z"c",
   ",    ", -∞ < t < ∞}] // okvir
```

Out[18]//TraditionalForm=
$$\boxed{i_1(t) = -\frac{U\,\theta(t-2\tau)\,e^{-\frac{Z_c (t-2\tau)}{L}}}{Z_c} + \frac{U\,\theta(t-2\tau)}{2 Z_c} + \frac{U\,\theta(t)}{2 Z_c} \quad , \quad -\infty < t < \infty}$$

Mathematica

In[19]:=
```
$Version
```

Out[19]= 11.2.0 for Microsoft Windows (64-bit) (September 11, 2017)

In[20]:=
```
DateString[]
```

Out[20]= Sun 5 Jan 2020 23:35:39