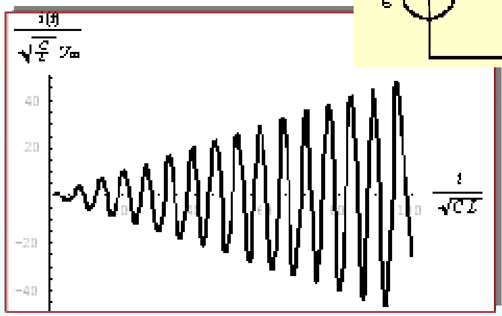
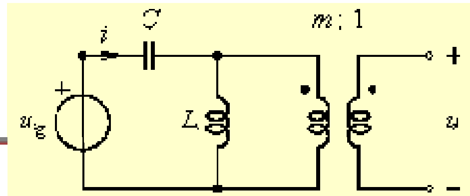
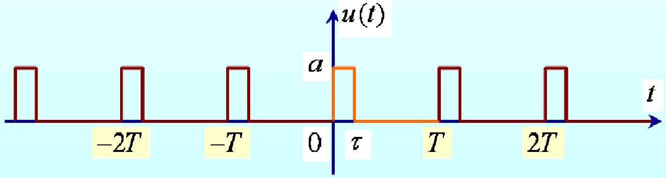
Теорија електричних кола



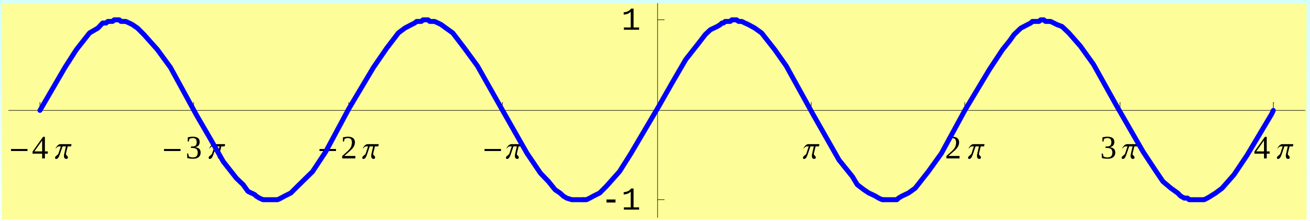


Користите само материјале које вам достави и препоручи предметни наставник у текућој школској години.



$$u(t)=\frac{a\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\sin(n\omega_1\tau)}{n\pi}\cos(n\omega_1 t)+\frac{2a\sin^2(n\omega_1\tau/2)}{n\pi}\sin(n\omega_1 t)\right)$$

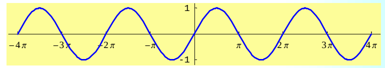
Дејан Тошић



Зашто је значајан устаљен простопериодичан одзив?

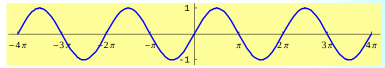
у практичној примени у електротехници

```
Plot[Sin[x], {x, -4*π, 4*π}, AspectRatio → 1/6,
  Ticks → {Table[{n*π, TraditionalForm[n*π]}, {n, -4, 4}], {{-1, -1}, {1, 1}}}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.005]},
  Background → RGBColor[0.99, 0.99, 0.6], PlotRange → {Automatic, {-1.2, 1.2}}];
```



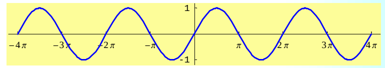
Значај синусоида (1)

- Синусоидалан напон се природно **производи** кружним кретањем турбина.
- Синусоидалан напон се природно **претвара** са једне вредности на другу индуктивним трансформатором.
- Синусоидалан напон се економично **преноси** на даљину далеководима.



Значај синусоида (2)

- Синусоидалан напон се природно **претвара** у механички рад.
- Синусоидална побуда може у линеарном временски непромењивом ел. колу остварити **синусоидалан устаљен** одзив.
- **Si Fi** (Sinusoidal Fidelity): Синусоидалан сигнал не мења облик при пролазу кроз линеаран временски непроменљ. систем.



Значај синусоида (3)

- Синусоидалан сигнал се користи за **пренос** порука електромаг. таласима.
- Периодичан сигнал се може представити простопериодичним сиг. (**Фуријеов** ред).
- Развијен је снажан **математички алат** за одређивања одзива на простопериодичне побуде (решавање ел. кола, УППО).

Несинусоидалан одзив (1)

- Простопериодичан одзив је идеалан случај коме се тежи у раду великог броја електроенергетских система, као и других система у електротехници.
- Употреба подсистема енергетске електронике, као што су исправљачи, конвертори и контролери ел. мотора, доводи до изобличења жељеног простопериодичног одзива.
- Појављују се периодични напони и струје који нису простопериодични.

Несинусоидалан одзив (2)

- Фазорски метод се не може применити непосредно на електрична кола са периодичном несинусоидалном побудом.
- Применом Фуријеове замисли периодичну побуду рашчлањујемо на збир сталне побуде и простопериодичних побуда.
- Примењујемо суперпозицију у решавању линеарних временски непромењивих кола.
- Користимо теорију развијену за одређивање устаљеног одзива (фазорску трансформацију).

Несинусоидалан одзив (3)

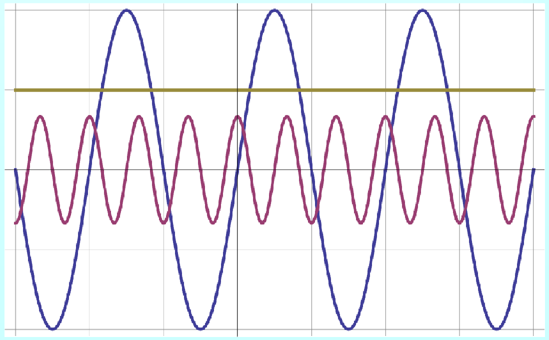
- Нелинеарности електротехничког система стварају несинусоидалан одзив.
- Магнетски материјали, као што је метално језгро трансформатора.
- Полупроводничке направе, као што су диоде и транзистори.
- Сензори, електромеханички системи, …
- Подсклопови за управљање и надзор.
- Напајања, прекидачи, сметње, …

Суперпозиција устаљеног одзива

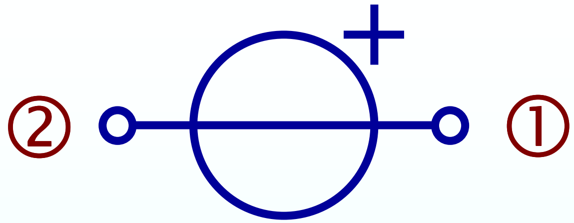
временски непромењивог линеарног ел. кола са више извора

Устаљен одзив кола са више извора

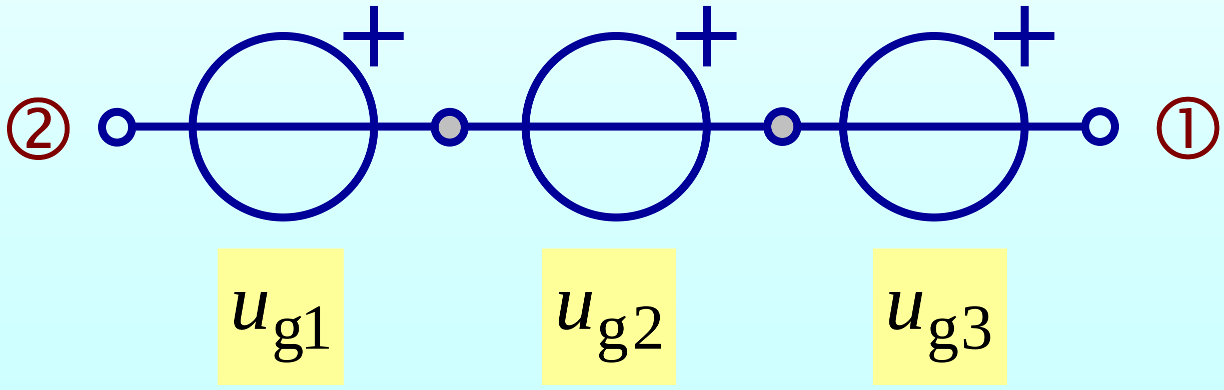
- Нека у колу постоји више извора **просто-периодичне** или **сталне** побуде.
- Нека су испуњени услови за постојање устаљеног одзива.
- Принцип суперпозиције: устаљен одзив је једнак збиру устаљених одзива када сваки извор делује понаособ.



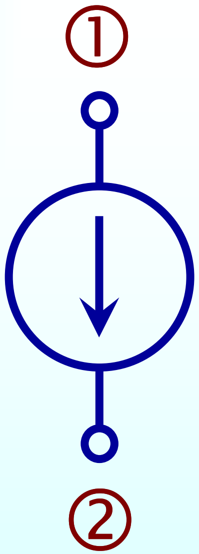
Заменски напонски извори сложених побуда



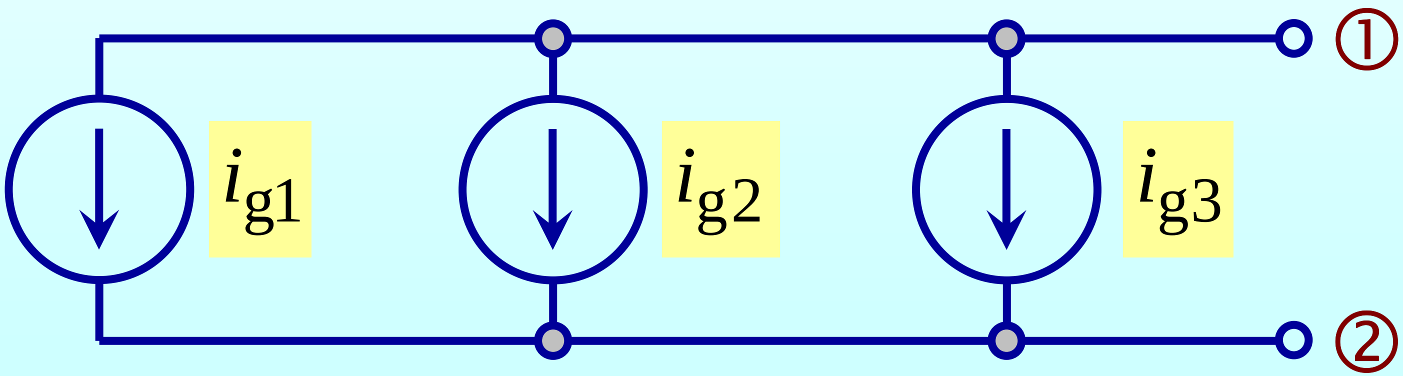
$$u_{\mathrm{g}} = u_{\mathrm{g}1} + u_{\mathrm{g}2} + u_{\mathrm{g}3}$$



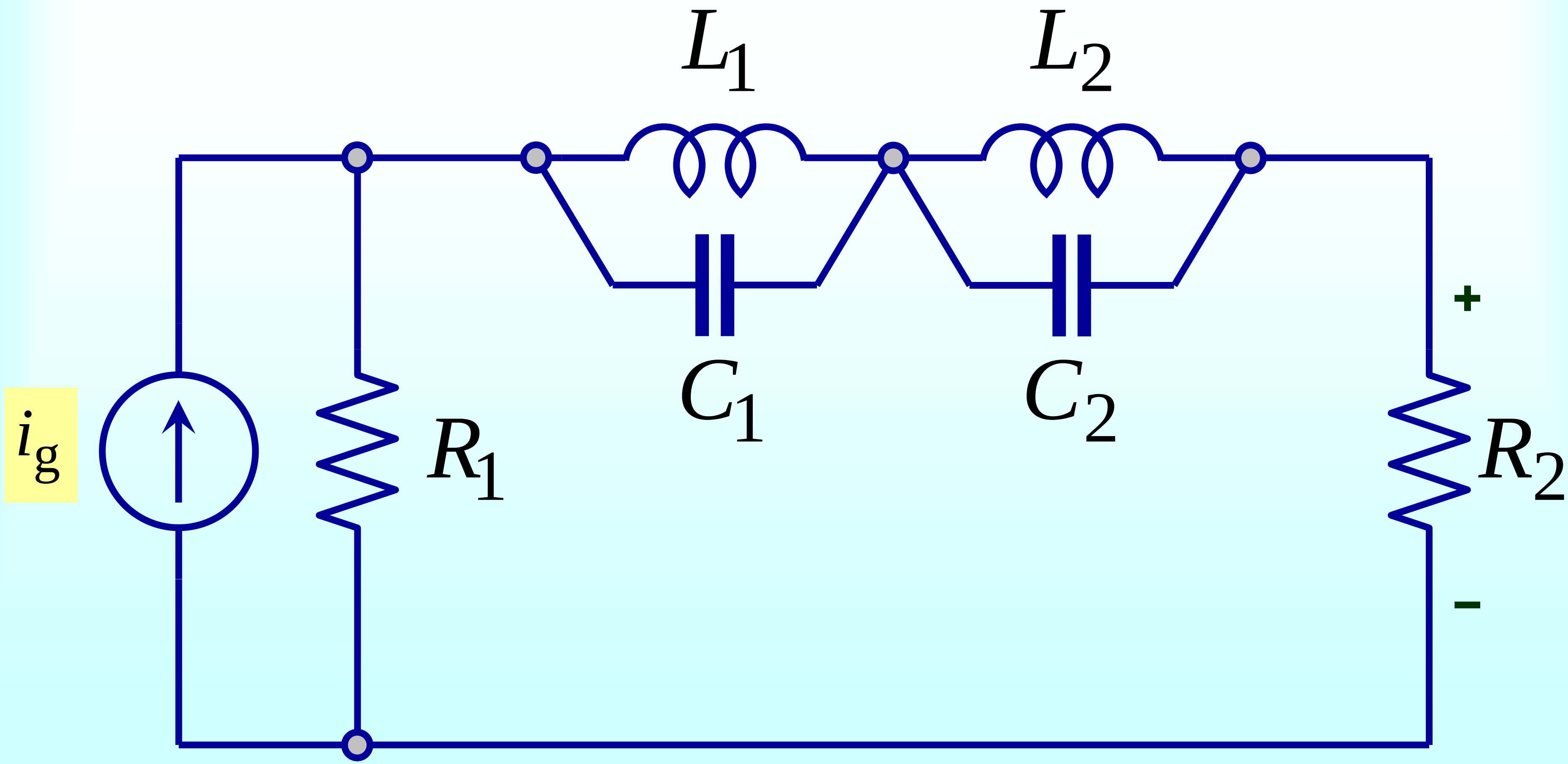
Заменски струјни извори сложених побуда



$$i_g = i_{g1} + i_{g2} + i_{g3}$$

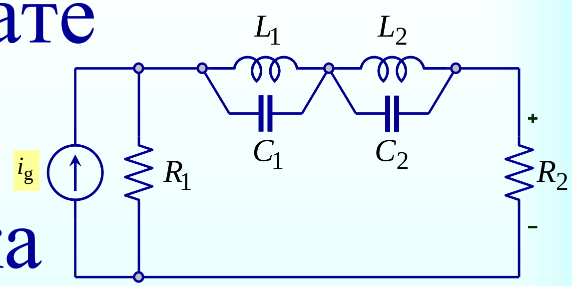


Пример суперпозиције устаљеног одзива



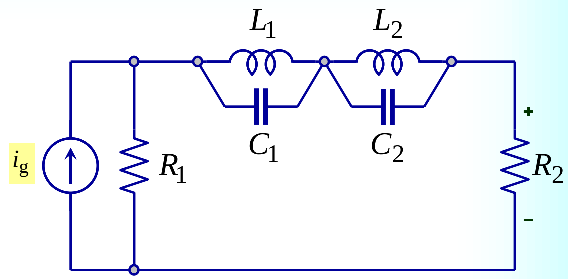
Одредити напон отпорника R_2

- Сматрати да је одзив устаљен
- Вредности елемената су познате
- Побуда је збир константе и два простопериодична сабирка
- Параметри побуде су познати



$$i_{\mathrm{g}} = I_{\mathrm{g}0} + \sqrt{2} I_{\mathrm{g}1} \cos(\omega_{\mathrm{g}1} t + \psi_{\mathrm{g}1}) + \sqrt{2} I_{\mathrm{g}2} \cos(\omega_{\mathrm{g}2} t + \psi_{\mathrm{g}2})$$

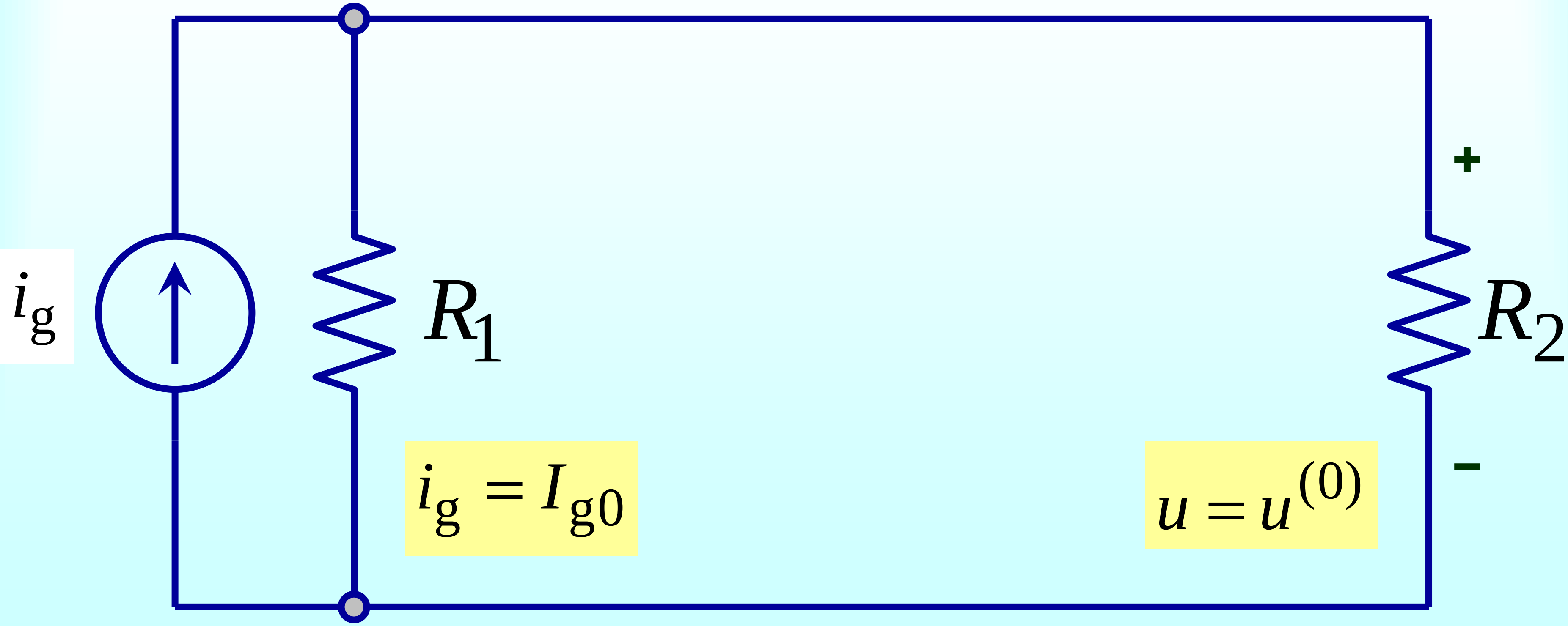
План рада



- Струјни извор са сложеном побудом заменимо паралелном везом једног струјног извора са сталном (константном) струјом и два струјна извора са простопериодичним струјама.
- Применимо суперпозицију и тражимо устаљен одзив када сваки од три струјна извора делује појединачно.

Устаљен сталан (константан) одзив

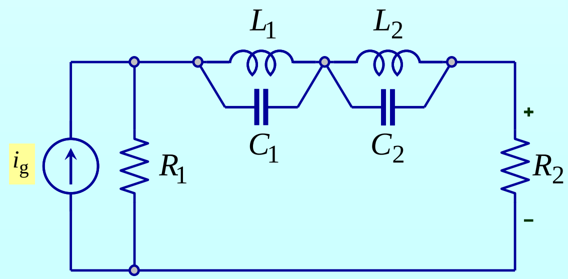
DC Analysis

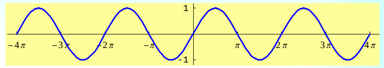


Напон устаљеног сталног (константног) одзива

DC Analysis (0)

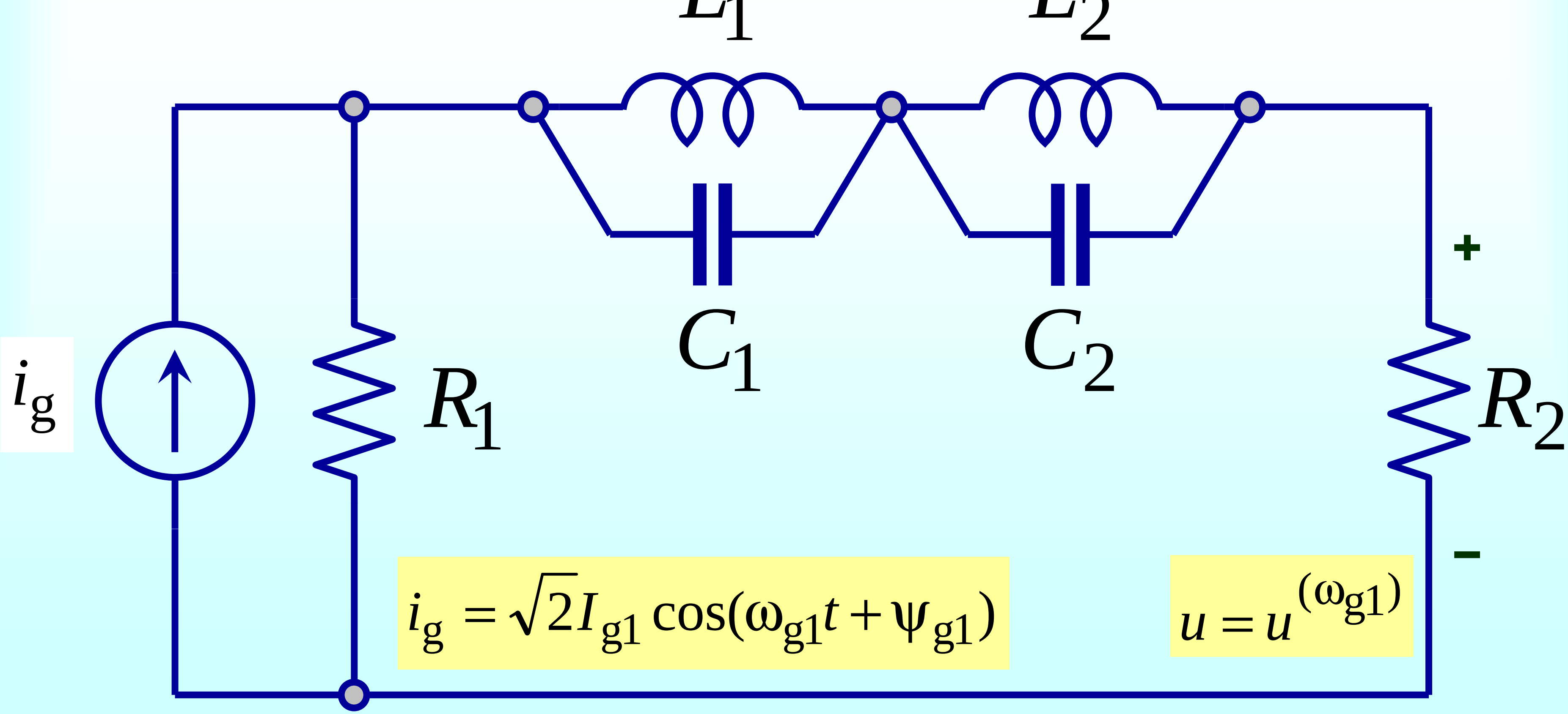
$$u^{(0)} = I_{g0}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$





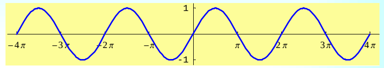
Устаљен простопериодичан одзив прве побуде

AC Analysis (1)



$$i_g = \sqrt{2} I_{g1} \cos(\omega_{g1} t + \psi_{g1})$$

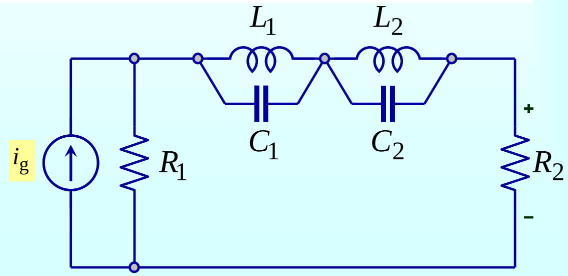
$$u = u^{(\omega_{g1})}$$



Напон УППО прве побуде

$$\underline{U}^{(\omega_{g1})} = \left(\underline{I}_g^{(\omega_{g1})} \left(\omega_{g1}{}^2 C_1 L_1 - 1\right) \left(\omega_{g1}{}^2 C_2 L_2 - 1\right) R_1 R_2\right) \Big/$$
$$\Big(\left(C_1 C_2 L_1 L_2 R_1 + C_1 C_2 L_1 L_2 R_2\right) \omega_{g1}{}^4 +$$
$$\left(-C_1 L_1 R_1 - C_2 L_2 R_1 - C_1 L_1 R_2 - C_2 L_2 R_2\right) \omega_{g1}{}^2 +$$
$$\mathrm{j}\left(\left(-C_1 L_1 L_2 - C_2 L_1 L_2\right) \omega_{g1}{}^3 + \left(L_1 + L_2\right) \omega_{g1}\right) + R_1 + R_2\Big)$$

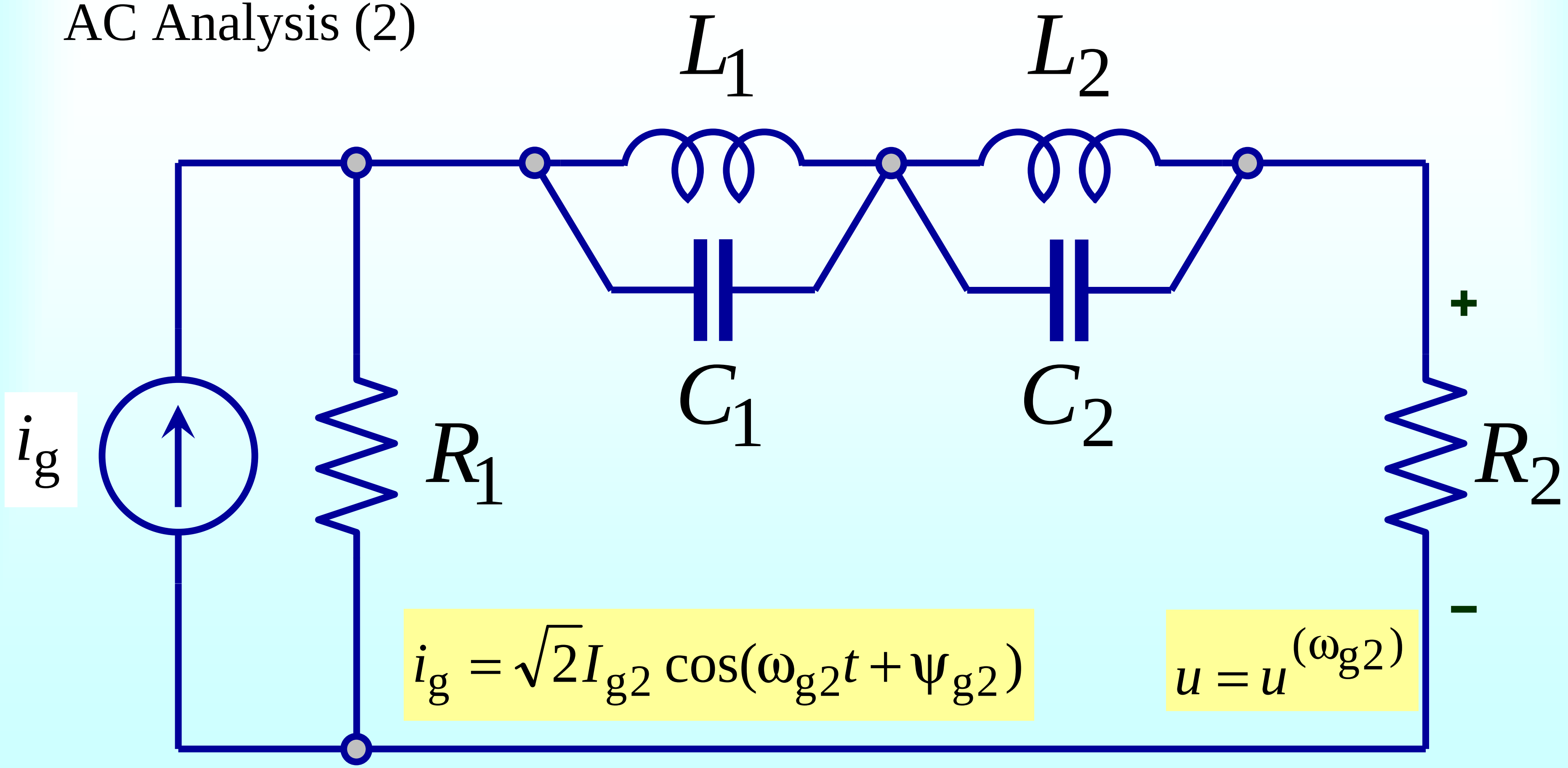
$$\underline{I}_g^{(\omega_{g1})} = I_{g1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{g1}}$$

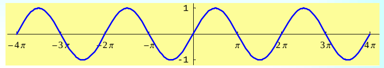


$$u^{(\omega_{g1})} = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\left(\underline{U}^{(\omega_{g1})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{g1} t}\right)$$

Устаљен простопериодичан одзив друге побуде

AC Analysis (2)

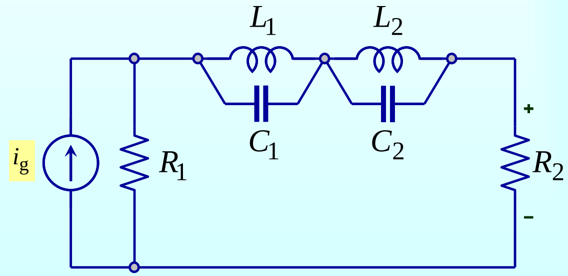




Напон УППО друге побуде

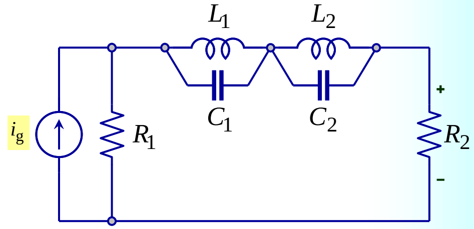
$$\underline{U}^{(\omega_{g2})} = \left(\underline{I}_g^{(\omega_{g2})} \left(\omega_{g2}{}^2 C_1 L_1 - 1\right) \left(\omega_{g2}{}^2 C_2 L_2 - 1\right) R_1 R_2\right) \Big/ \\ \left(\left(C_1 C_2 L_1 L_2 R_1 + C_1 C_2 L_1 L_2 R_2\right) \omega_{g2}{}^4 + \right. \\ \left(-C_1 L_1 R_1 - C_2 L_2 R_1 - C_1 L_1 R_2 - C_2 L_2 R_2\right) \omega_{g2}{}^2 + \\ \left. \mathrm{j}\left(\left(-C_1 L_1 L_2 - C_2 L_1 L_2\right) \omega_{g2}{}^3 + \left(L_1 + L_2\right) \omega_{g2}\right) + R_1 + R_2\right)$$

$$\underline{I}_g^{(\omega_{g2})} = I_{g2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{g2}}$$

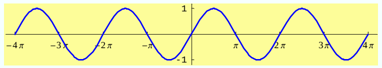


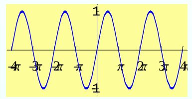
$$u^{(\omega_{g2})} = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\left(\underline{U}^{(\omega_{g2})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{g2} t}\right)$$

Устаљен напон



$$u = u^{(0)} + u^{(\omega_{g1})} + u^{(\omega_{g2})}$$





Обратити пажњу да **није могуће сабирати** фазоре (комплексне представнике) јер су они дефинисани за различите учестаности.

Фазори су дефинисани за **косинусну** представу протопериодичне функције (напона или струје).

Модул фазора (комплексног представника) је једнак **ефективној вредности** простопериодичне величине.

Уопштен Фуријеов ред

Развој функције у Фуријеов ред
Теоријска основа

Добрило Ђ. Тошић, **Математика III**, Академска Мисао, Београд, 2002.
R. Beals, **Advanced Mathematical Analysis** *Periodic Functions and Distributions, Complex Analysis, Laplace Transform and Applications*, Springer-Verlag, 1973.
H. S. Carslaw, **Introduction to the theory of Fourier's Series and Integrals**, Macmillan, 1921.
H. Dym, H. P. McKean, **Fourier Series and Integrals**, Academic Press, 1972.
R. E. Edwards, **Fourier Series** *A modern introduction*, Springer-Verlag, vol 1, 1979, vol. 2, 1982.
D. Jackson, **Fourier Series and Orthogonal Polynomials**, MAA, 1941.
I. N. Sneddon, **Fourier Series**, Dover, 1961.
M. Spiegel, **Real variables Lebesque measure with applications to Fourier series**, McGraw-Hill, 1969.
G. P. Tolstov, **Fourier series**, Dover, 1962.
G. H. Hardy, W. W. Rogosinski, **Fourier Series**, Cambridge, 1946.

Скаларни производ, Норма

Дефиниција. Скаларни производ две функције $f(t)$ и $g(t)$ је одређен интеграл $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ и обележава се са (f,g) или $\langle f,g\rangle$. Скаларни производ се назива и унутрашњи производ.

На основу ове дефиниције и својстава одређеног интеграла доказује се да важи следеће:

$$\langle f,f\rangle \geq 0$$
$$\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$$
$$\langle Af,g\rangle = A\langle f,g\rangle$$
$$\langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$$
$$A = \mathrm{const}\,.$$

Дефиниција. Норма функције $f(t)$ је квадратни корен из скаларног производа

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\ .$$

Средњеквадратно одступање

Дефиниција. Средњеквадратно одступање функције $f(t)$ од функције $g(t)$ је број

$$\varepsilon(f,g)=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(t)-g(t))^2\,\mathrm{d}t}\,,\ \varepsilon(f,g)=\sqrt{\frac{\langle f-g, f-g\rangle}{b-a}}\,,\ \varepsilon(f,g)=\frac{\| f-g \|}{\sqrt{b-a}}\,.$$

На основу ове дефиниције и својстава одређеног интеграла доказује се да важи следеће:

$\varepsilon(f,g)\geq 0$

$\varepsilon(f,g)=0 \Leftrightarrow f=g$, само за непрекидне функције

$\varepsilon(f,g)=\varepsilon(g,f)$, својство симетрије

$\varepsilon(f,g)\leq\varepsilon(f,h)+\varepsilon(h,g)$, својство неједнакости троугла.

Ортогоналне функције

Дефиниција. Ортогоналне функције на сегментну $[a,b]$ су функције $f(t)$ и $g(t)$ за које је скаларни производ једнак нули: $\langle f, g \rangle = 0$.

Дефиниција. Ортогонални систем функција на сегментну $[a,b]$ је скуп функција $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t), \ldots\}$ за које је скаларни производ

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ K \neq 0, & k = l \end{cases}, \quad K = \text{const}.$$

Дефиниција. Ортогоналан и нормиран (ортонормиран) систем функција на сегменту $[a,b]$ је скуп функција $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t), \ldots\}$ за које је скаларни производ

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}.$$

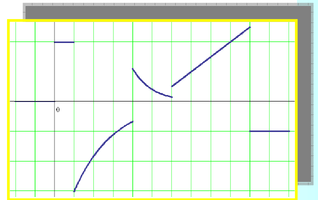
Кронекерова делта-функција, дефинисана као $(\delta_{kl} = 0 \text{ за } k \neq l) \vee (\delta_{kl} = 1 \text{ за } k = l)$, омогућава да се ортонормиран систем функција $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathrm{N}}$ дефинише помоћу једнакости $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \delta_{kl}$.

Део-по-део непрекидна функција

У решавању практичних проблема, од посебног интереса су функције времена део-по-део непрекидне на $[a,b]$. То су функције дефинисане на $[a,b]$ које су или непрекидне на интервалу $[a,b]$ или на њему имају коначан број прекида прве врсте.

Функција $f(t)$ има прекид прве врсте у тачки $t=c$ ако је дефинисана у тачки, ако постоје коначна лева и коначна десна гранична вредност, али није задовољена двојна једнакост

$$f(c^-) = f(c) = f(c^+)\,, \quad f(c^-) = f(c-0) = \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x)\,, \quad f(c^+) = f(c+0 = \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x)\,.$$



У електротехници је један од важних примера ортогоналних система функција скуп $\{A_0, A_1\cos(\omega t+\alpha_1), A_2\cos(2\,\omega t+\alpha_2), A_3\cos(3\,\omega t+\alpha_3),\ldots, A_k\cos(k\,\omega t+\alpha_k),\ldots\}$.

Уопштен (генералисан) Фуријеов (Fourier) ред

Дефиниција. Уопштен (генералисан) Фуријеов (*Fourier*) ред део-по-део непрекидне функције $f(t)$ на сегменту $[a,b]$, за систем ортогоналних функција $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots\}$ на $[a,b]$, је функционалан ред

$$S_f(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + C_3\varphi_3(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t) + \cdots$$

са коефицијентима C_n који се називају Фуријеови коефицијенти, $C_n = \dfrac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\| \varphi_n \|^2}$, $(n = 1,2,3,\ldots)$.

Парцијална сума Фуријеовог реда је збир првих n сабирака: $S_{f,n}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(t)$.

Са гледишта практичне примене од интереса је теорема која фаворизује уопштен Фуријеов ред у односу на редове са неким другим коефицијентима.

Теорема. Од свих линеарних комбинација $\sum_{k=1}^{n} K_k \varphi_k(t)$ најмање средњеквадратно одступање од функције $f(t)$ има парцијална сума Фуријеовог реда $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\| \varphi_k \|^2} \varphi_k(t)$.

Парсевалова једнакост

Беселова неједнакост мајоризује парцијану суму: $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \| \varphi_k(t) \|^2 \le \| f \|^2$.

У граничном процесу $n \to +\infty$, неједнакост остаје у важности и ред $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \| \varphi_k(t) \|^2$ конвергира, а то имплицира да општи члан реда тежи нули: $C_k^2 \| \varphi_k(t) \|^2 \to 0$.

Парсевалова једнакост. Уопштен Фуријеов ред део-по-део непрекидне функције $f(t)$ на сегменту $[a,b]$, за систем ортогоналних функција $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots\}$ на $[a,b]$, конвергира у средњем ка функцији $f(t)$ ако и само ако важи Парсевалова једнакост

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2 \| \varphi_n(t) \|^2 = \| f \|^2, \qquad C_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\| \varphi_n \|^2}, \qquad \| f(t) \|^2 = \int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t .$$

Каже се да низ $\{S_{f,1}(t), S_{f,2}(t), \ldots, S_{f,n}(t), \ldots\}$ конвергира у средњем ка функцији $f(t)$ ако је низ средњеквадратних одступања $\{\varepsilon(f, S_{f,1}), \varepsilon(f, S_{f,2}), \ldots, \varepsilon(f, S_{f,n}), \ldots\}$ нула низ, односно ако конвергира ка нули.

Тригонометријски интеграли

За практичну примену у решавању електричних кола треба одабрати ортогоналан систем функција којим се делотворно и учинковито налази одзив. Из претходних разматрања (предавања) смо видели да можемо увек одредити одзив који је устаљен, сталан у времену или простопериодичан. Интуитивно, очекујемо да је подесан ортогоналан систем функција онај који чине константе и простопериодичне функције времена. Узимамо у обзир неке тригонометријске интеграле са целим бројевима m и n.

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = 0\,,\quad \int_0^T \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = 0\quad \int_0^T \sin(n\omega t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = 0\,,\quad \int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t = 0 \wedge n \neq m$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t = 0 \wedge n \neq m\,,\quad \int_0^T \sin^2(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}T\,,\quad \int_0^T \cos^2(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}T\,,\ \omega = \frac{2\pi}{T}\,,\ T > 0$$

Тригонометријски ред

Дефиниција. Тригонометријски ред је функционалан ред облика

$$S_{\text{trig}}(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)\right).$$

Коефицијенти C_0, A_k, B_k и $\omega > 0$ не зависе од времена t.

Ако ред $S_{\text{trig}}(t)$ конвергира, онда је његова сума периодична функција времена са периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ако редови $\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k|$ конвергирају, онда ред $S_{\text{trig}}(t)$ конвергира униформно и апсолутно на скупу реалних бројева.

Фуријеов ред

Дефиниција. Фуријеов ред за функцију $f(t)$, за коју постоји $\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ као Риманов (Riemann) интеграл, је тригонометријски ред

$$S_{\mathrm{F}}(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t))$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad A_n = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,, \quad B_n = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Коефицијенти C_0, A_n, B_n, $T > 0$, τ и $\omega = \frac{2\pi}{T}$ не зависе од времена t. Бројеви C_0, A_n и B_n су Фуријеови коефицијенти. Ред се односи на интервал времена $[a,b]$ са $a = \tau$ и $b = \tau + T$.

Развој функције у Фуријеов ред аутоматски периодички продужава функцију изван интервала $[a,b]$.

Фуријеови коефицијенти се израчунавају независно један од другог.

Ако се Фуријеов ред прекине, добија се тригонометријски полином који апроксимира функцију са минималном средњеквадратном грешком.

Фуријеов ред у комплексном облику

Риман-Лебегова (Riemann-Lebesgue) Теорема. Ако је $f(t)$ интеграбилна на $[a,b]$, онда је

$$\lim_{\Omega\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\Omega t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad \lim_{\Omega\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\Omega t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Непосредна последица ове теореме је да Фуријеови коефицијенти теже нули када индекс тежи бесконачности: $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = 0$.

Фуријеов ред у комплексном облику се добија сменом $\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}$, $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}$, $x = n\omega t$.

$$S_{\mathrm{F}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}, \quad \underline{C}_n = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad \underline{C}_n = \frac{A_n - \mathrm{j}B_n}{2}, \quad \underline{C}_{-n} = \frac{A_n + \mathrm{j}B_n}{2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

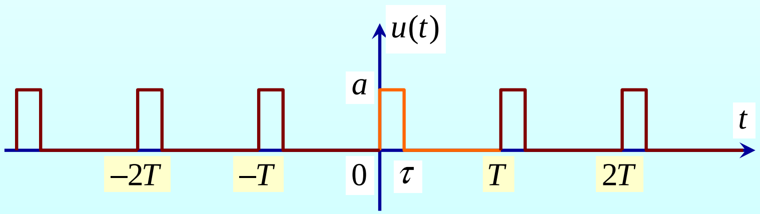
У Теорији електричних кола посматрамо напоне и струје који су реалне функције реалне промењиве t: Фуријеови коефицијенти A_n и B_n су реални и важи $\underline{C}_{-n} = \underline{C}_n^*$.

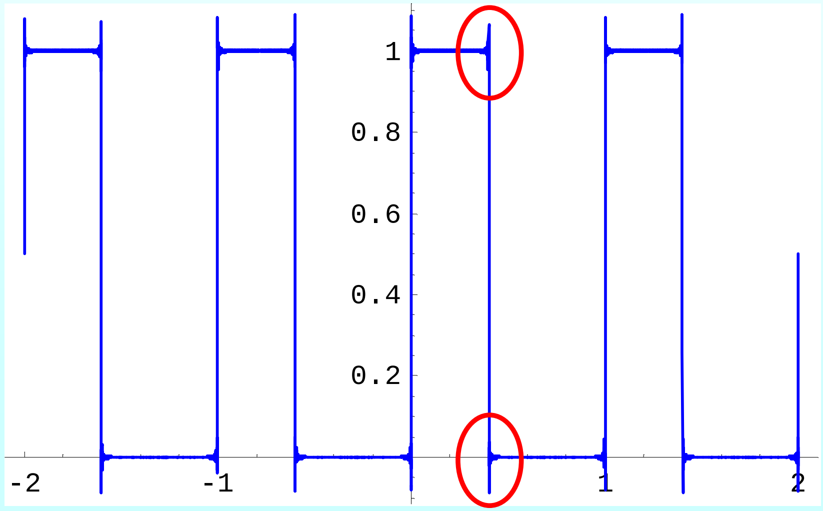
На основу Риман-Лебегова теореме је $\lim\limits_{n\to+\infty} |\underline{C}_n| = 0$.

Гибсов (Gibbs) ефекат

Теорема. Ако је функција $f(t)$ периодична и непрекидна, и има део по део непрекидне изводе, онда њен Фуријеов ред униформно конвергира ка $f(t)$.

Ако функција има прекиде, онда Фуријеов ред није униформно конвергентан, па се у околини тачака прекида појављују премашења која се називају Гибсов (Gibbs) ефекат.





$a = 1$

$T = 1$

$\tau = \dfrac{2}{5}$

Дирихлеова (Dirichlet) теорема

Дирихлеова (Dirichlet) теорема. Нека је функција $f(t)$ периодична са периодом T и
(а) део-по-део непрекидна, (б) има део-по-део непрекидан извод $f'(t)$,
(в) на интервалу дужине једне периоде постоји коначан број екстремума,
(г) на интервалу дужине једне периоде постоји коначан број прекида прве врсте.
Тада Фуријеов ред конвергира ка аритметичкој средини леве и десне граничне вредности $f(t)$ у неком тренутку t.

$$C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}, \quad f(t^-) = \lim_{\substack{x \to t \\ x < t}} f(x), \quad f(t^+) = \lim_{\substack{x \to t \\ x > t}} f(x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Ово су довољни услови конвергенције. Ако $f(t)$ задовољава Дирихлеове услове, онда $f(t)$ можемо изразити Фуријеовим редом. Међутим, постоје функције које не задовољавају Дирихлеове услове а могу да се изразе Фуријеовим редом. Питање потребних услова је још увек отворено, потребни услови још увек нису познати.

У тренуцима времена t у којима је функција $f(t)$ непрекидна збир Фуријеовог реда је једнак функцији $f(t)$.

Најбоља апроксимација

Парцијална сума Фуријеовог реда представља најбољу апроксимацију периодичне функције у смислу средњеквадратне грешке.

$$f(t) \approx C_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t))$$

У практичној примени, на пример у софтверу за симулацију електричних кола на рачунару, тежимо да узмемо што мањи број чланова реда да би се апроксимација рачунала што краће.

Систем ортогоналних функција Фуријеовог реда је скуп константе и простопериодичних функција $\{1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \cos(3\omega t), \sin(3\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), \ldots\}$.

Фуријеови коефицијенти се израчунавају из опште формуле: $C_0 = \dfrac{\langle f, 1\rangle}{\| 1 \|^2}$, $A_n = \dfrac{\langle f, \cos(n\omega t)\rangle}{\| \cos(n\omega t) \|^2}$,

$B_n = \dfrac{\langle f, \sin(n\omega t)\rangle}{\| \sin(n\omega t) \|^2}$, за интервал времена $[\tau, \tau + T]$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Одговарајући квадрати норми су

$\| 1 \|^2 = T$, $\| \cos(n\omega t) \|^2 = \dfrac{T}{2}$, $\| \sin(n\omega t) \|^2 = \dfrac{T}{2}$. Обично се усваја $\tau = 0$ или $\tau = \dfrac{-T}{2}$.

Три облика Фуријеовог реда

Периодични напони и струје са којима се срећемо у Теорији електричних кола задовољавају Дирихлеове услове, тако да можемо развити такве функције времена у Фуријеов ред.

Бавићемо се само реалним функцијама реалне променљиве, што значи да ће у изразу $f(t)$ бити само реални бројеви и симболи које представљају реалне величине.

Користићемо сва три облика Фуријеовог реда сматрајући да је функција непрекидна у посматраном тренутку времена:

$$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t))\,,\; f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{+\infty}F_n\cos(n\omega t+\phi_n)\,,\; f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underline{C}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}\,,$$

$$F_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}\,,\; \phi_n=\arg(A_n-\mathrm{j}B_n)\,,\; \underline{C}_{-n}=\underline{C}_n^{*},\; C_0\in\mathrm{R}\,,\; A_n\in\mathrm{R}\,,\; B_n\in\mathrm{R}\,,\; \omega\in\mathrm{R}\,,\; t\in\mathrm{R}\,.$$

Тренутке времена у којима постоји прекид функције ћемо издвојено посматрати и посебно наглашавати.

Парсевалова теорема се своди на $\displaystyle\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T}f^2(t)\,\mathrm{d}t=C_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n^2+B_n^2}{2}=C_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{F_n^2}{2}\,.$

Хармонијске учестаности

Анализа устаљеног одзива који је простопериодичан, са којим смо се раније упознали, отвара питање анализе одзива који је периодичан и који има произвољан несинусоидалан облик на интервалу дужине једне периоде. Такав периодичан одзив ћемо звати сложенопериодичан одзив.

Периодична функција је функција која се понавља сваких T секунди и која када се помери лево или десно за T остаје иста. Формално, функција $f(t)$, дефинисана на $-\infty < t < +\infty$, је периодична ако је $f(t+nT) = f(t)$ за свако реално t и за сваки цео број n, при чему је $T > 0$ најмањи могући број означен као периода.

Угаона учестаност $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ се назива основна угаона учестаност (фундаментална кружна фрекценција) у (rad/s) и обележава се и са ω_0 или ω_1.

Реципрочна периода $\dfrac{1}{T}$ је основа учестаност (фундаментална фреквенција) у (Hz) и обележава се и са f_0 или f_1.

Целобројни умношци основне угаоне учестаности, 2ω, 3ω, $4\omega, \ldots, n\omega \ldots$, су хармонијске угаоне учестаности. Хармонијске учестаности су $2\dfrac{1}{T}$, $3\dfrac{1}{T}$, $4\dfrac{1}{T}, \ldots, n\dfrac{1}{T} \ldots$.

Ефективна вредност

Константан сабирак C_0 је средња вредност (једносмерна компонента, DC component).
Простопериодичан сабирак $A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = F_n \cos(n\omega t + \phi_n)$, је n ти хармоник (наизменичне компоненте, AC components).

Фуријеов ред рашчлањује периодичну функцију $f(t)$ на збир константе и бесконачног броја простопериодичних сабирака.

Део Фуријеовог реда, $C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t)$, је парна функција времена и такав развој имају парне функције, $f(-t) = f(t)$. Део Фуријеовог реда, $\sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(n\omega t)$, је непарна функција времена и такав развој имају непарне функције, $f(-t) = -f(t)$.

Ефективна вредност периодичне функције је квадратни корен из средње вредности квадрата функције на интервалу дужине једне периоде (rms, Root Mean Square value)

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n^2 + B_n^2}{2}} = \sqrt{C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{F_n^2}{2}}\,.$$

Зашто смо заинтересовани за (сложено)периодичне функције?

- Зато што практична електрична кола стварају периодичне напоне који су несинусоидални због несавршености или због циљне функционалности.
- На пример, циљ електроенергетског система је да испоручује електричну енергију преносом простопериодичног напона, најчешће, али у пракси овај напон одступа од синусоидалног.
- На матичним плочама рачунара је потребно остварити периодичну поворку правоугаоних импулса (clock) што по циљној функционлности јесте (сложено)периодична функција.
- Разни мерни уређаји користе тест генераторе периодичних тестерастих и других функција.

Развој периодичне функције у Фуријеов ред

Сажетак

Фуријеов тригонометријски ред

$$u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t) \right)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega_1 t)\, \mathrm{d}t$$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, \mathrm{d}t$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega_1 t)\, \mathrm{d}t$$

Хармоници

$$u^{(0)} = C_0 = U^{(0)}$$

Нулти хармоник, средња вредност, једносмерна компонента, DC компонента

$$u^{(1)} = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)$$
$$= \sqrt{2} U^{(1)} \cos(\omega_1 t + \theta^{(1)})$$

Први хармоник, основни хармоник, AC компонента

$$u^{(n)} = A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)$$
$$= \sqrt{2} U^{(n)} \cos(n\omega_1 t + \theta^{(n)})$$

Виши хармоници

$$n = 2,3,4,\ldots$$

Парсевалов и Риманов став

$$u(t) = U^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U^{(n)} \cos(n\omega_1 t + \theta^{(n)})$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{2} = (U^{(0)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(n)})^2$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} U^{(n)} = 0$$

Експоненцијални облик

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{C}_n \exp(\mathrm{j} n \omega_1 t)$$

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \exp(-\mathrm{j} n \omega_1 t)\, \mathrm{d}t$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Поступак одређивања Фуријеових коефицијената је Фуријеова анализа.

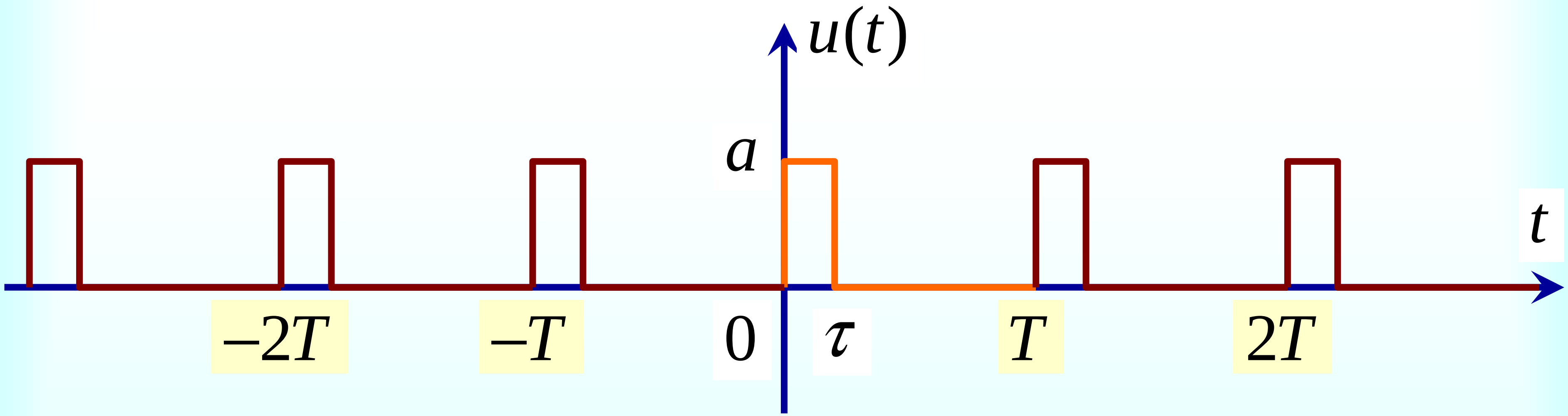
$$\underline{C}_n = \frac{A_n - \mathrm{j} B_n}{2}, \quad n \neq 0$$

Ефективна вредност

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |\,u(t)\,|^2 \, \mathrm{d}t} = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(n)})^2}$$

Ефективна вредност (RMS, rms, корен средње квадратне вредности, root-mean-square value) периодичне функције је квадратни корен средње вредности квадрата функције на интервалу дужине једне периоде. То је квадратни корен збира средњих вредности квадрата хармоника.

Пример развоја у Фуријеов ред



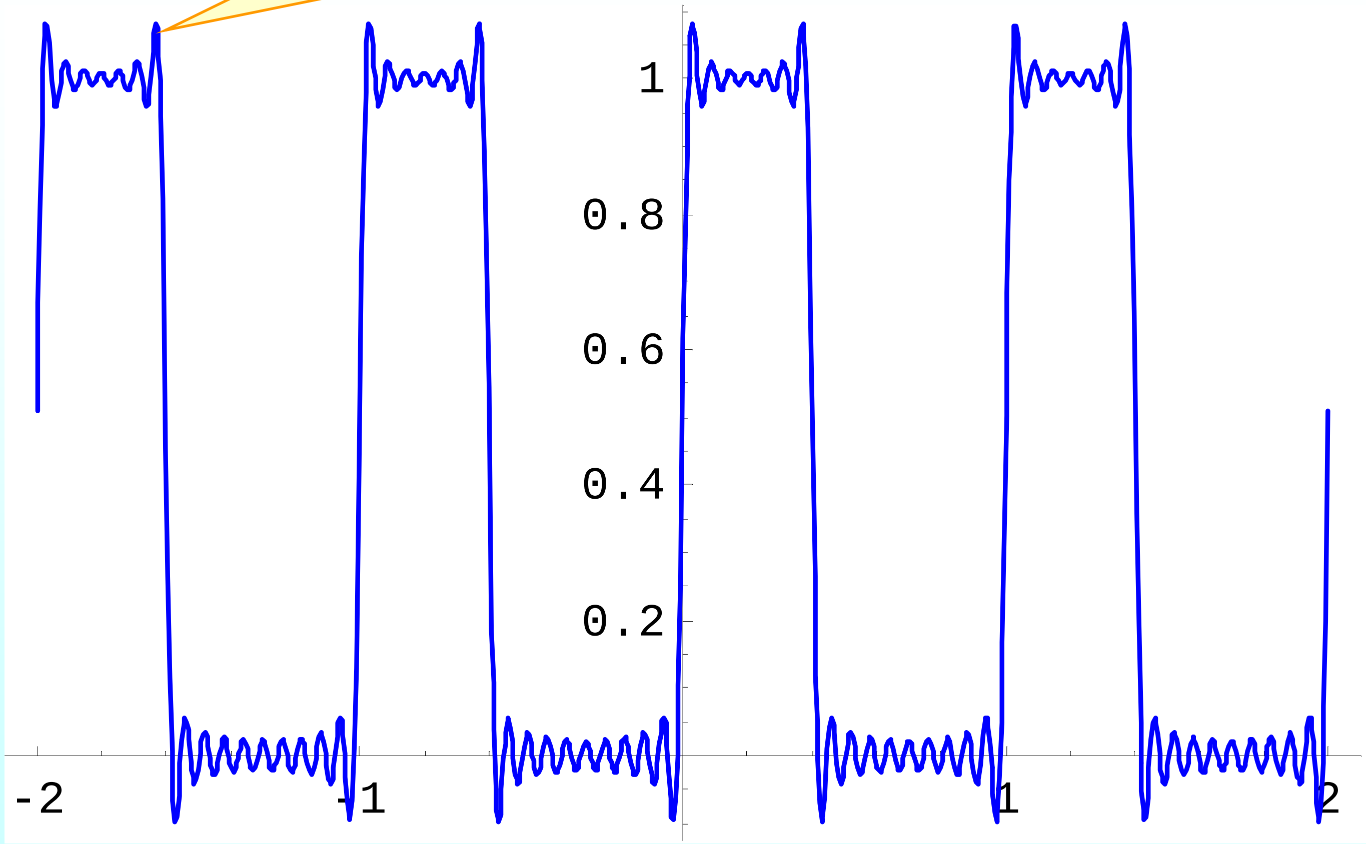
У тачкама прекида ред даје аритметичку средину левог и десног лимеса.

$$u(t) = \frac{a\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\sin(n\omega_1\tau)}{n\pi}\cos(n\omega_1 t) + \frac{2a\sin^2(n\omega_1\tau/2)}{n\pi}\sin(n\omega_1 t)\right)$$

У рачунарској примени горња граница суме је коначан број.

Фуријеов збир са 16 чланова

Гибсов феномен

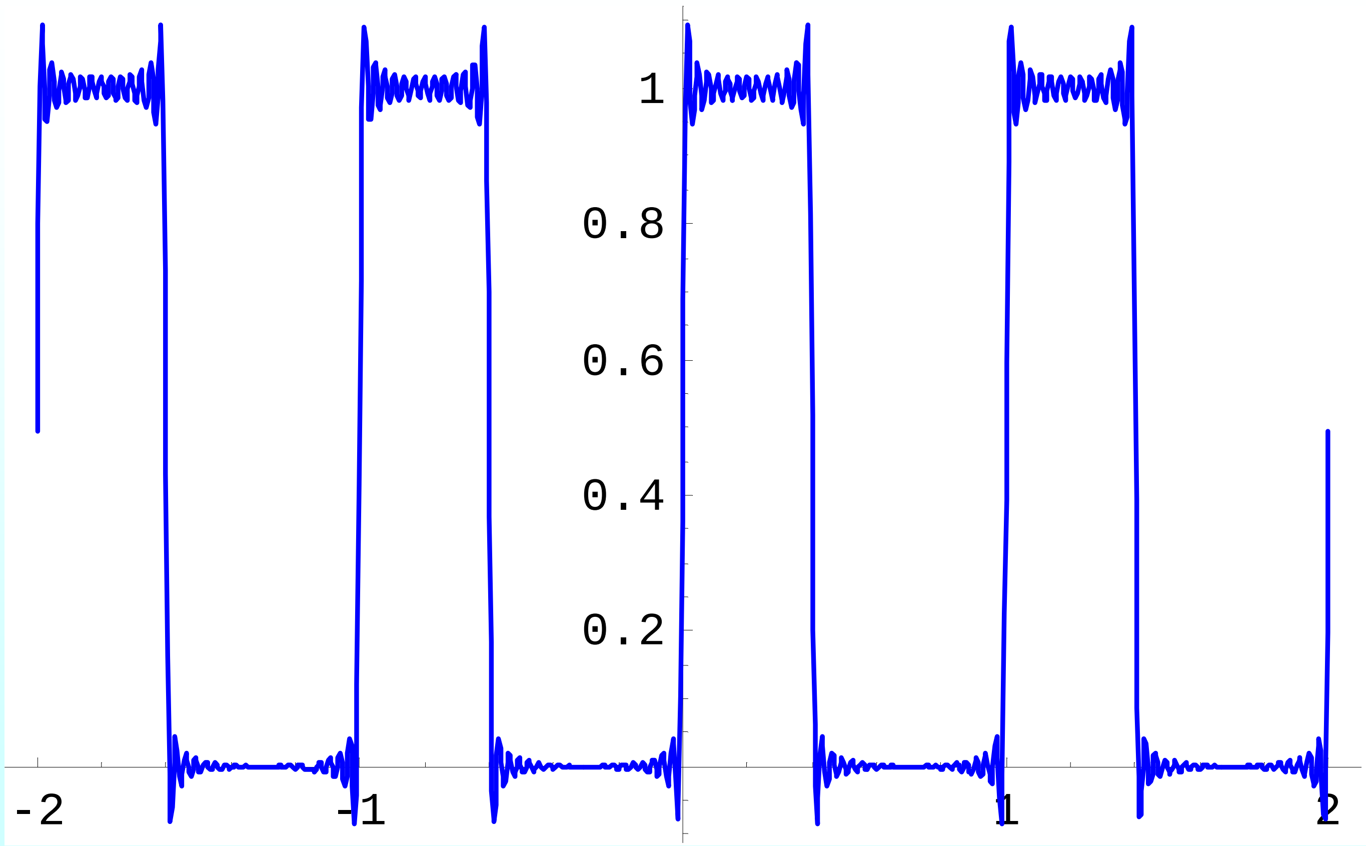


$a = 1$

$T = 1$

$\tau = \dfrac{2}{5}$

Фуријеов збир са 32 члана

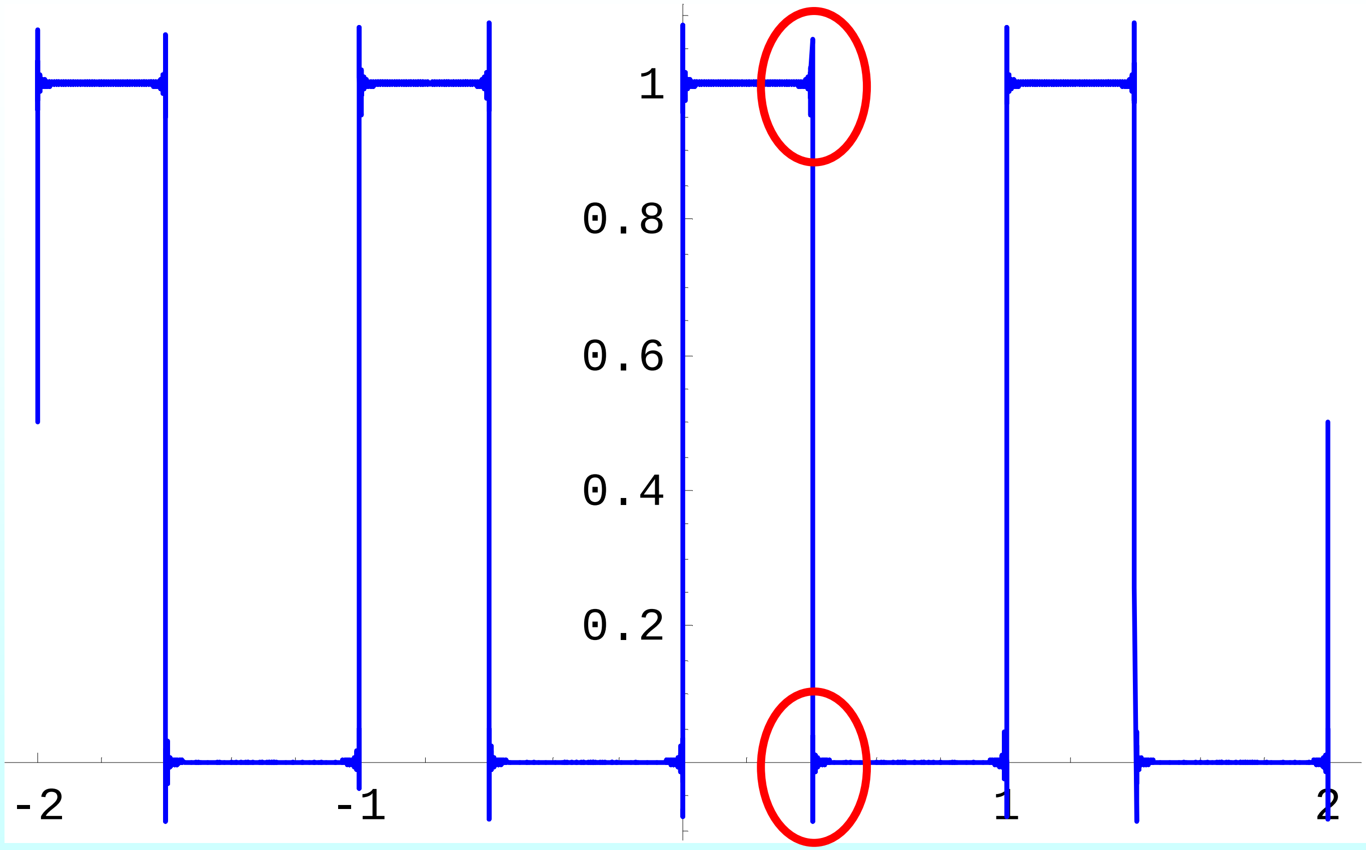


$$a = 1$$

$$T = 1$$

$$\tau = \frac{2}{5}$$

Фуријеов збир са 512 чланова



$$a = 1$$

$$T = 1$$

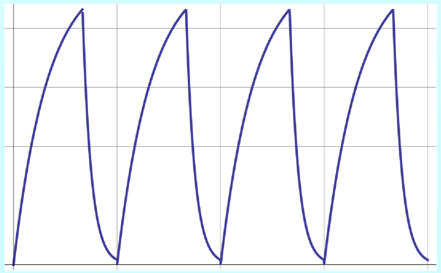
$$\tau = \frac{2}{5}$$

Устаљен сложенопериодичан одзив

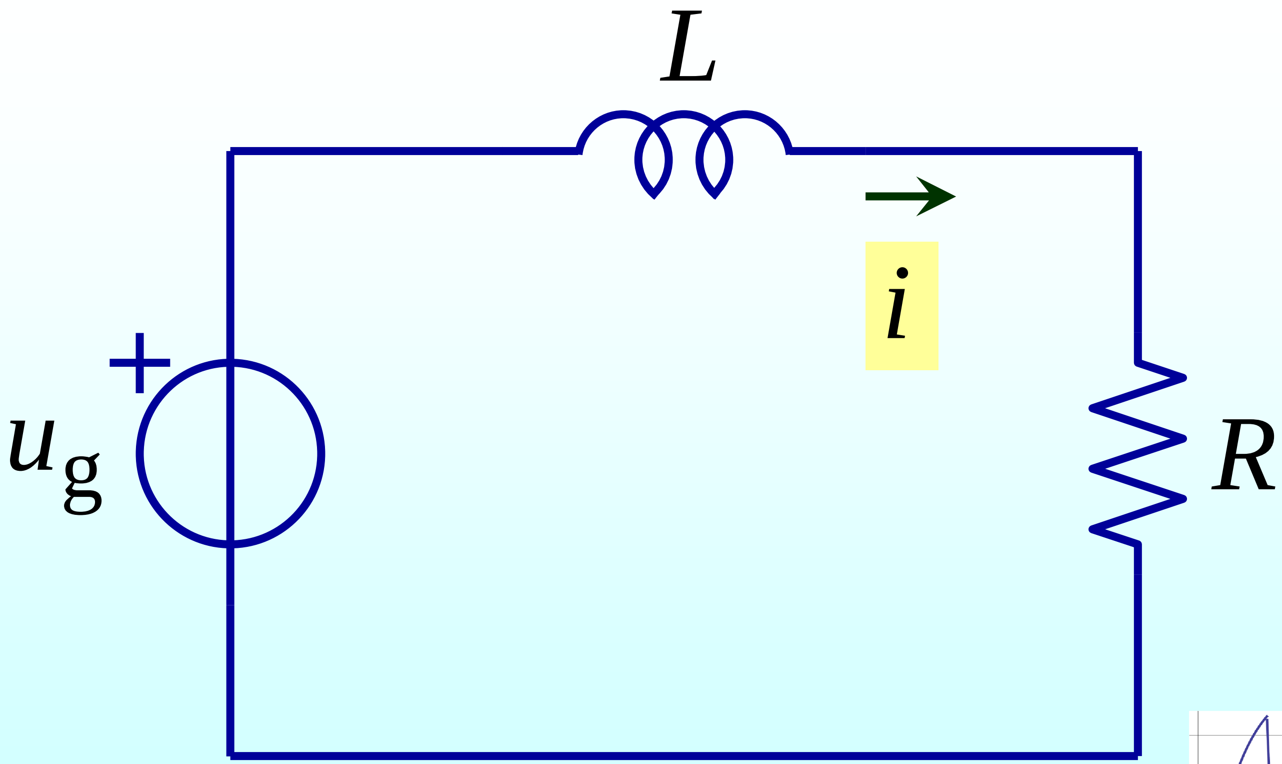
временски непромењивог линеарног електричног кола

Одређивање УСПО

- Претпоставимо да делује један извор и да је побуда (сложено)**периодична**.
- Побуду развијемо у **Фуријеов ред**.
- Нека су испуњени услови за устаљен одзив.
- Одзив одредимо **суперпозицијом**, као збир одзива на сваки од хармоника посматран понаособ.



Пример одређивања УСПО



Побуда је (сложено)периодична са периодом *T*.

1. корак: Побуду развијемо у Фуријеов ред

$$u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{g}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_{\mathrm{g}}^{(n)} \cos(n\omega_1 t + \theta_{\mathrm{g}}^{(n)})$$

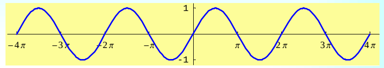
У теорији ред има бесконачно сабирака, док у практичном раду узимамо коначан број чланова који задовољава жељену тачност.

2. корак: Одредимо одзив на нулти хармоник

DC Analysis

$$i^{(0)} = I^{(0)} = \frac{1}{R} U_{\mathrm{g}}^{(0)}$$

Калемове замењујемо кратком везом, кондензаторе замењујемо отвореном везом, и решавамо заменску шему за устаљен сталан (константан) одзив.



3. корак: Одредимо одзив на *n*-ти хармоник

AC Analysis

$$u_{\mathrm{g}}^{(n)}(t)=\sqrt{2}U_{\mathrm{g}}^{(n)}\cos(n\omega_1 t+\theta_{\mathrm{g}}^{(n)})$$

n-ти хармоник побуде

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}^{(n)}=U_{\mathrm{g}}^{(n)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{g}}^{(n)}}$$

Фазор (комплексан представник) *n*-тог хармоника побуде

$$\underline{I}^{(n)}=\underline{U}_{\mathrm{g}}^{(n)}\frac{1}{R+\mathrm{j}n\omega_1 L}$$

Фазор (комплексан представник) *n*-тог хармоника одзива

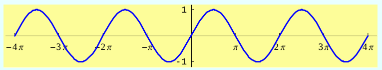
$$i^{(n)}=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\underline{I}^{(n)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t})$$

n-ти хармоник одзива

$$\boxed{\omega=n\omega_1}$$

4. корак: Одредимо одзив као збир свих хармоника одзива

$$i(t) = i^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} i^{(n)}$$



Обратитити пажњу да **није могуће сабирати** фазоре (комплексне представнике) јер су они дефинисани за различите учестаности.

Комплексна снага, средња снага, реактивна снага

$$\underline{S}^{(n)} = \underline{U}^{(n)} \left(\underline{I}^{(n)}\right)^*$$

Комплексна снага *n*-тог хармоника

$$P^{(n)} = \mathrm{Re}\left(\underline{S}^{(n)}\right)$$

Средња снага *n*-тог хармоника

$$Q^{(n)} = \mathrm{Im}\left(\underline{S}^{(n)}\right)$$

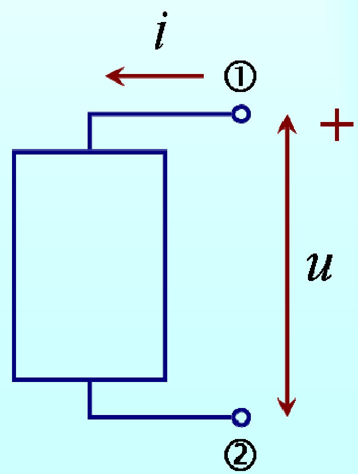
Реактивна снага *n*-тог хармоника

Средња (активна) снага

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = P^{(0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} P^{(n)}$$

Реактивна снага

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q^{(n)}$$



Привидна снага и снага дисторзије

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t} = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(U^{(n)})^2}$$

$$S = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

Привидна снага (Apparent power)

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

Снага изобличења (дисторзије)
(Distortion power)

$$Q_{\text{tot}} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

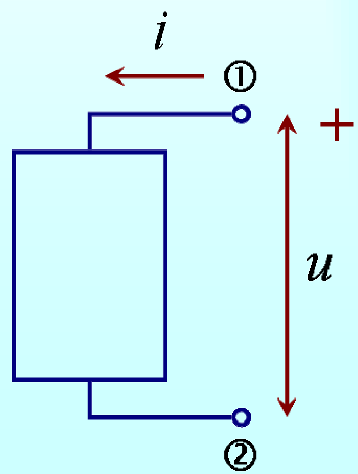
Неактивна снага

$$k_P = PF = \frac{P}{S}$$

Фактор снаге
(Power factor)

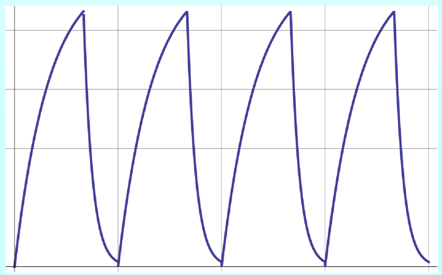
$$p(t) = u(t)i(t)$$

Тренутна снага



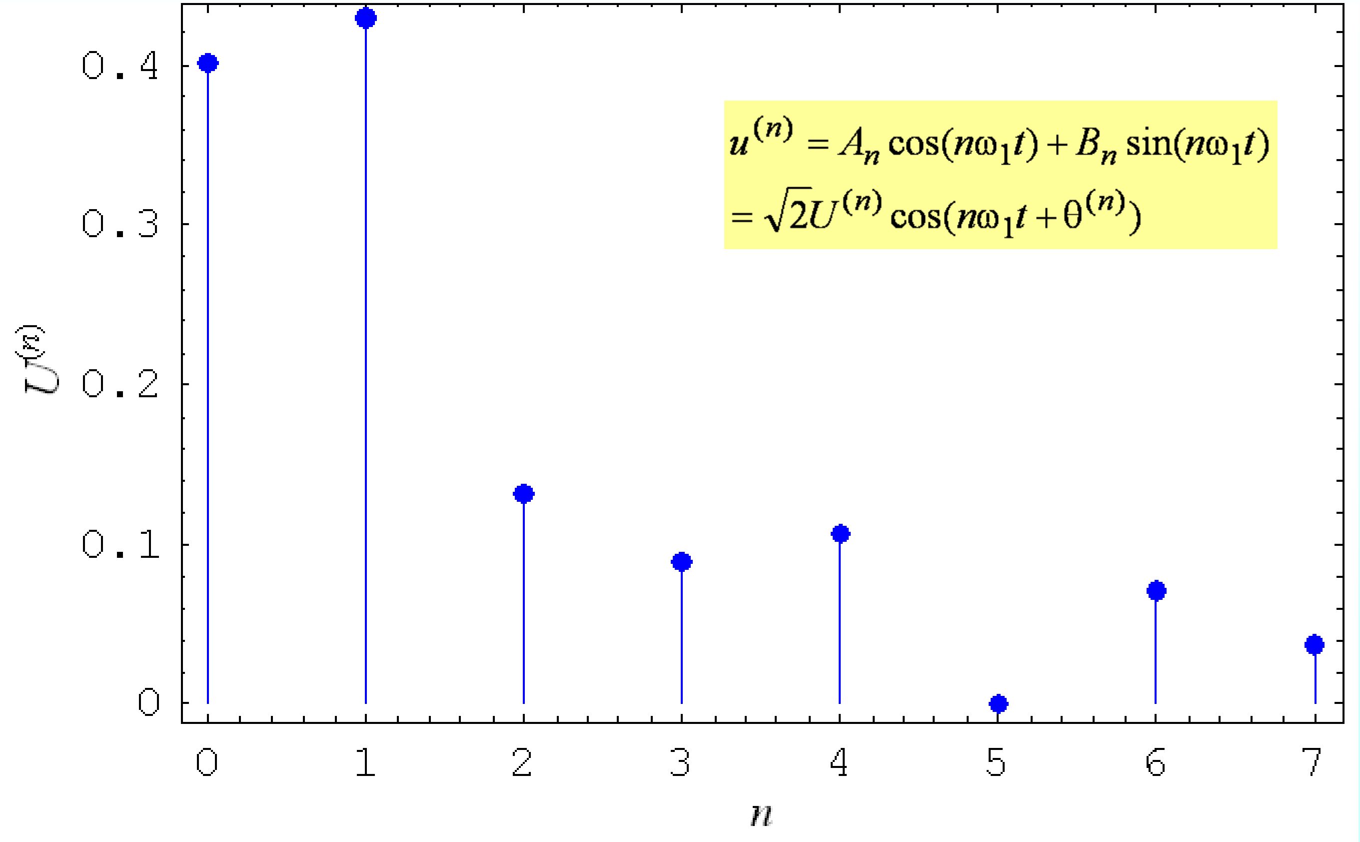
Како препознајемо УСПО?

- Нека у електричном колу има више извора са **периодичним** побудама.
- Нека су испуњени услови за настанак устаљеног одзива.
- Када ће устаљени одзив бити **периодичан**?
- Устаљени одзив ће бити периодичан ако су учестаности побуда **целобројни умношци** једне учестаности.

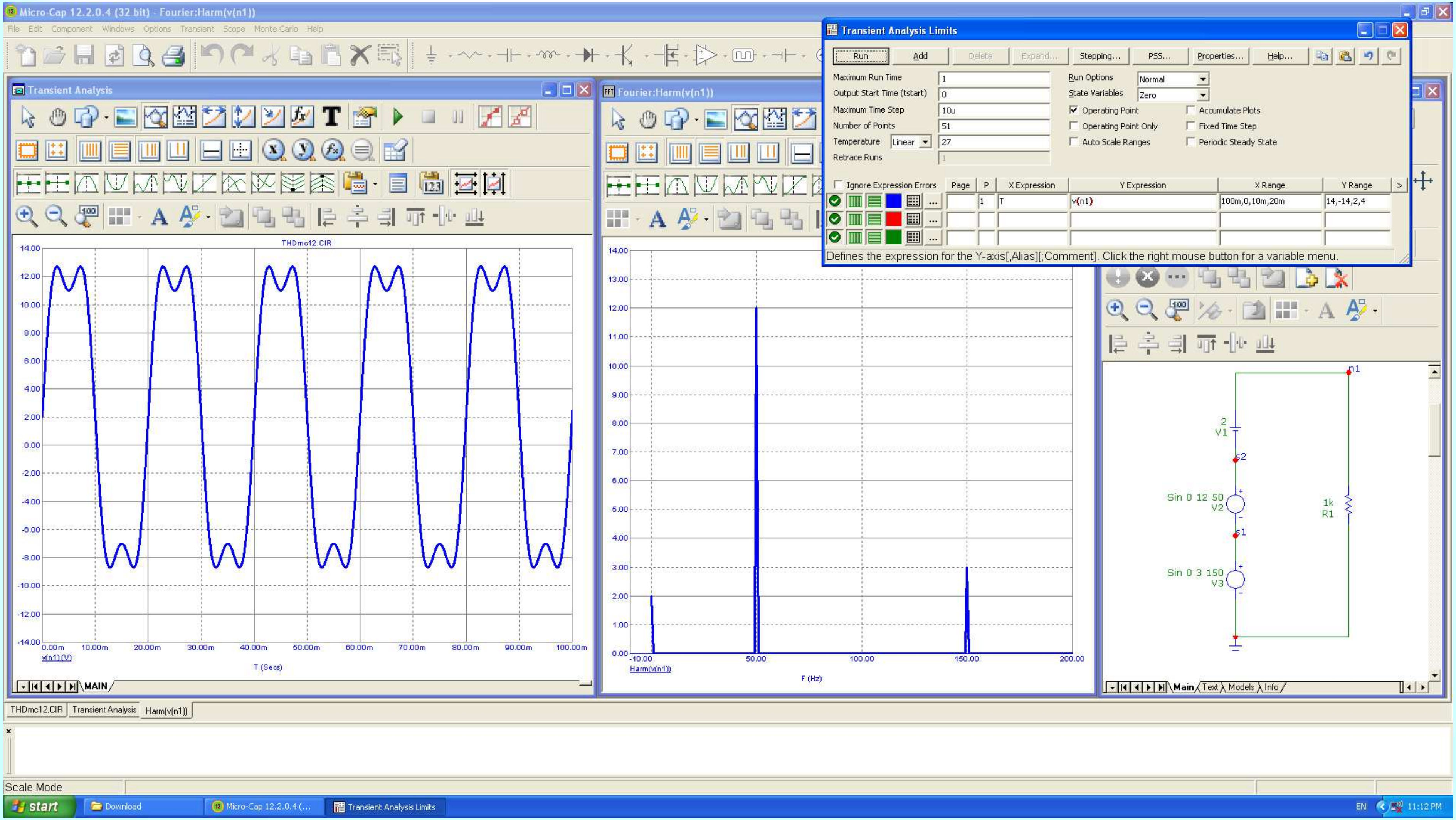


Шта је спектар УСПО?

Спектар УСПО је сликовна представа амплитуда и фаза хармоника као функција редног броја хармоника или учестаности хармоника.



Micro-CAP 12 free: Fourier



Практични узроци хармоника

- Конструкција електроенергетских машина и њихових намотаја и језгара.
- Нелинеарности потрошача.
- Електронске компоненте, диоде, транзистори, тиристори, микроталасне цеви.
- Калемови и трансформатори са гвозденим језгром.
- Појачавачи снаге, исправљачи, …

Фактори УСПО

$$K_{\mathrm{hd}} = \frac{U^{(n)}}{U^{(1)}}$$

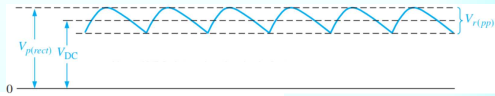
Фактор индивидуалне хармонијске дисторзије

Количник ефективне вредности хармоника
и ефективне вредности основног хармоника.

$$K_{\mathrm{d}} = \frac{U^{(1)}}{U_{\mathrm{eff}}}$$

Фактор изобличења (дисторзије) (Distortion factor)

За простопериодичан одзив, фактор изобличења је једнак 1.



$$K_{\mathrm{r}} = \frac{U_{\mathrm{eff,AC}}}{U_{\mathrm{DC}}} = \frac{1}{U^{(0)}}\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(U^{(n)}\right)^2}$$

Фактор таласности (Ripple factor)

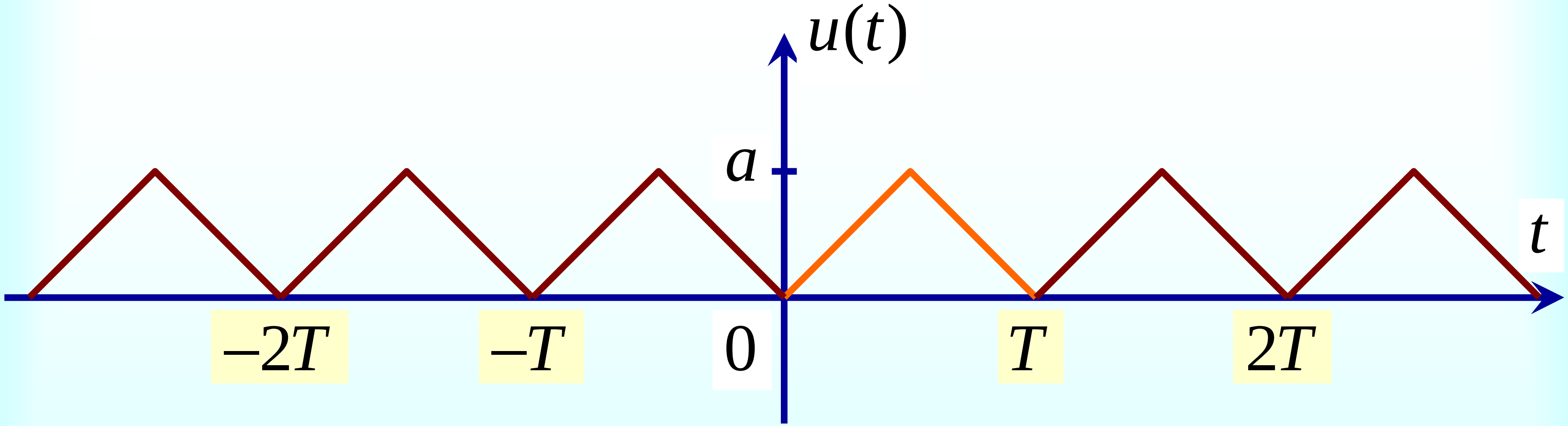
Количник ефективне вредности
простопериодичних сабирака
и нултог хармоника (DC компоненте).

$$K_{\mathrm{thh}} = \frac{U_{\mathrm{eff,AC>1}}}{U^{(1)}} = \frac{1}{U^{(1)}}\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(U^{(n)}\right)^2}$$

Фактор виших хармоника
(High-harmonics’ factor,
Total Harmonic Distortion)

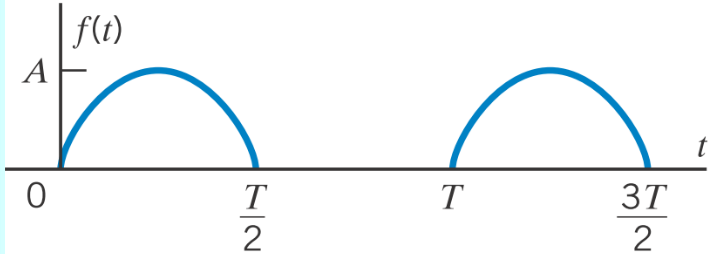
Количник ефективне вредности виших хармоника и првог хармоника (фундаментала).

Тестерасти напон (сигнал)

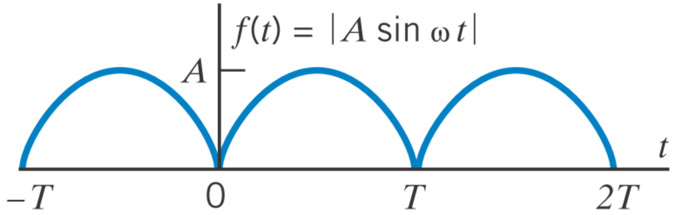


Нацртати апроксимацију функције Фуријеовим збиром са 10, 100 и 500 сабирака. Да ли се уочава Гибсов феномен?

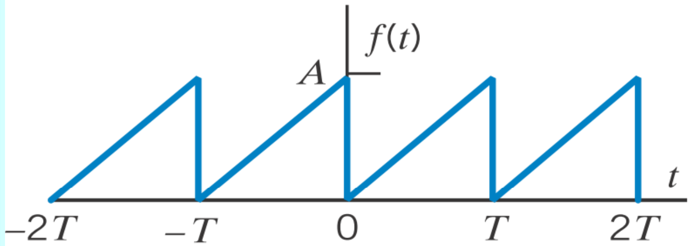
Примери развоја у Фуријеов ред



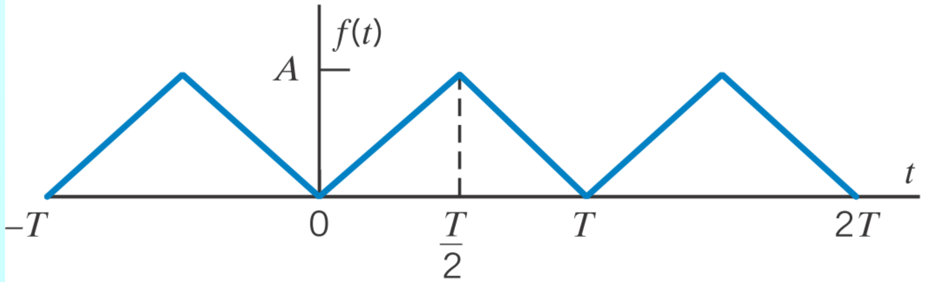
$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin\omega t - \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2-1}$$



$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\omega t)}{4n^2-1}$$



$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega t)}{n}$$

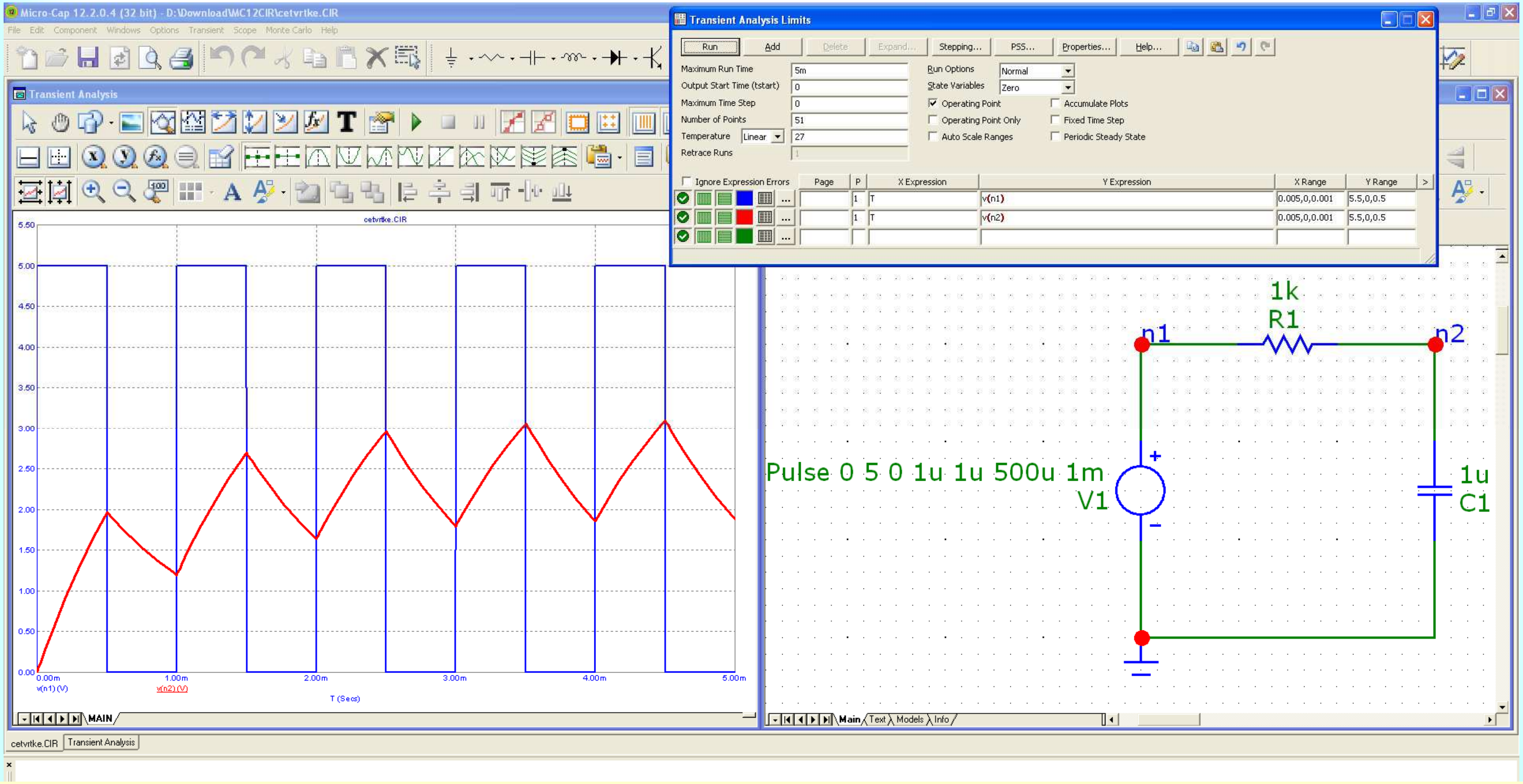


$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\omega t)}{(2n-1)^2}$$

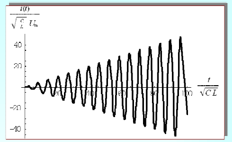
Примена Фуријеовог реда

- Решавање електричних кола са (сложено)периодичном побудом.
- Анализа својстава одзива.
- Спектрална анализа мерних података.
- Анализа квалитета електронских уређаја, као што су генератори сигнала и аудио опрема.
- Оцена квалитета у електроенергетским системима, филтрирање, анализатори мрежа …
- Обрада сигнала у комуникационим системима и системима аутоматског управљања.

Micro-CAP 12 free: Transient

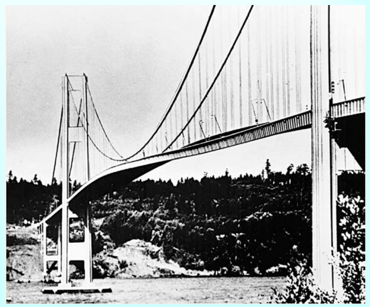


После неколико периода периодичне побуде **одзив постаје устаљен.**

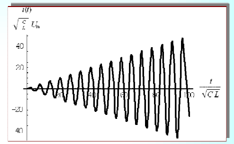


Резонанција

Временски непромењивог линеарног електричног кола

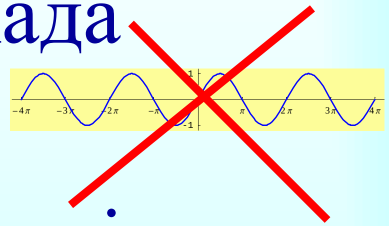


Tacoma Narrows Bridge, 7. Nov. 1940.

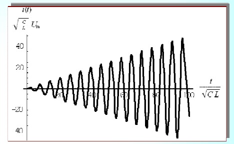


Шта је резонанција?

- ***Резонанција*** је појава у колу са периодичном побудом која настаје када постоји одређена веза између вредности елемената и параметара побуде, а када **не** постоји устаљен одзив.

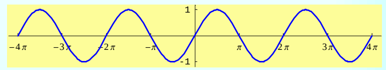


- ***Резонантан одзив*** је одзив који настаје када не постоје услови за успостављање устаљеног одзива.

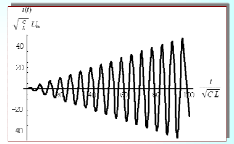


Кола са зенемарљивим губицима

- У пракси постоје кола са **малим** губицима које можемо занемарити.
- Постојање малих губитака значи да ће бити **испуњен** услов за настанак устаљеног одзива.

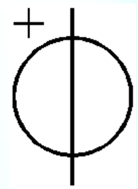


- Занемаривање губитака значи да посматрамо кола (мреже) која могу имати **само** динамичке елементе.

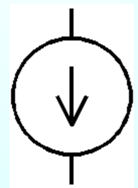


Резонантне учестаности

- ***Резонантне учестаности*** су полови комплексне функције ел. кола када је извор **напонски**.



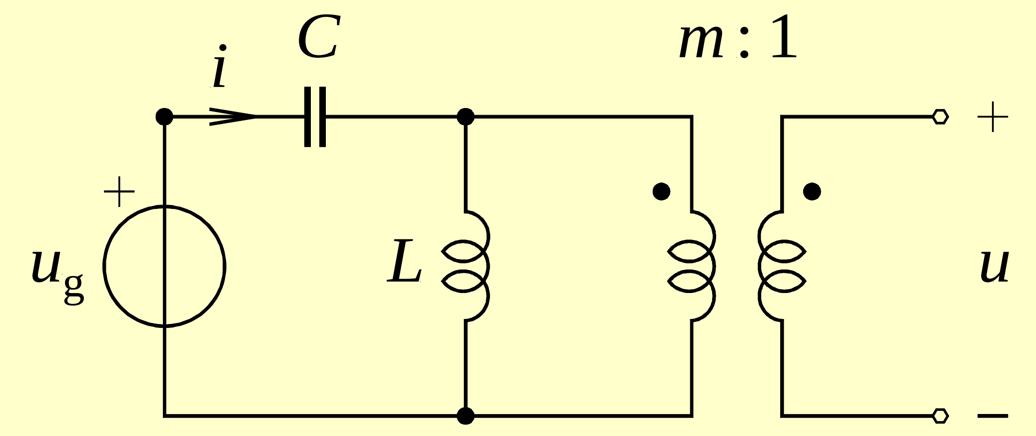
- ***Антирезонантне учестаности*** су полови комплексне функције ел. кола када је извор **струјни**.

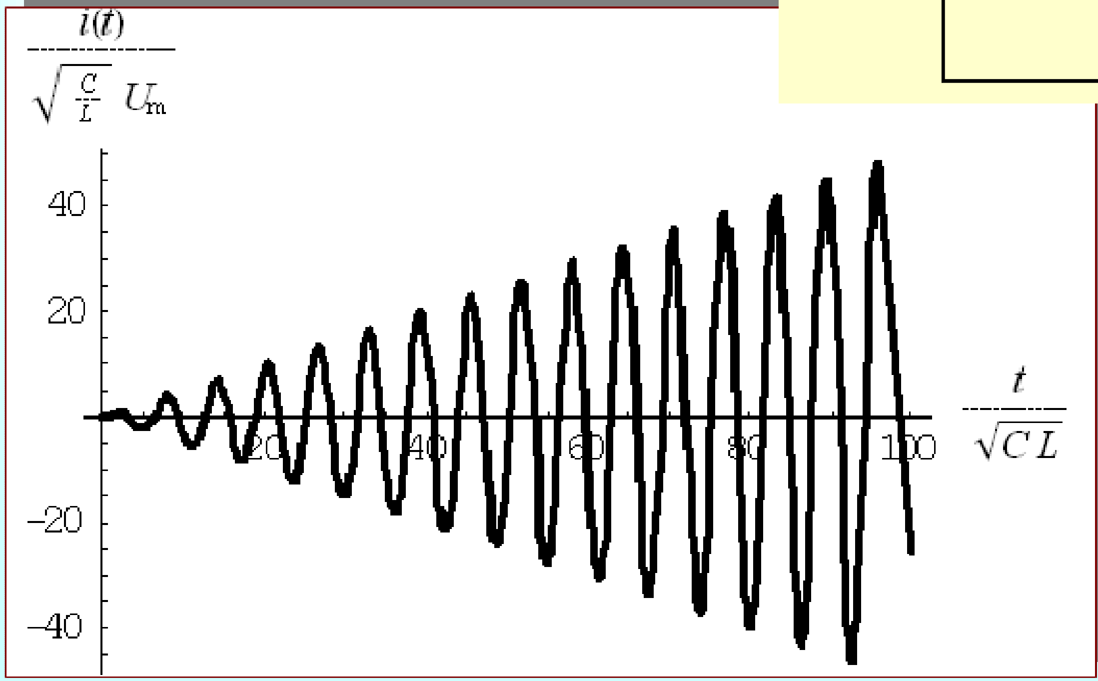


- Резонантне и антирезонантне учестаности су **комплексни** бројеви.

Пример резонанције

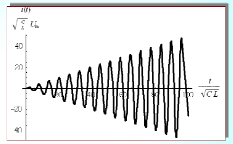
$$i(t) = \frac{1}{2} U_{\mathrm{m}} \frac{t}{L} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}} t\right) \vartheta(t)$$





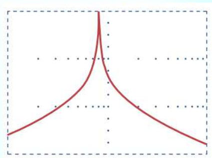
$$u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{m}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}} t\right) \vartheta(t)$$

$$\underline{s} = \mathrm{j}\omega = \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{CL}}$$

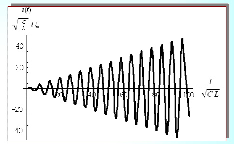


Амплитудска резонанција

- ***Учестаности амплитудске резонанције*** су учестаности за које је амплитудска карактеристика максимална.



- ***Учестаности фазне резонанције*** су учестаности за које је фазна карактеристика једнака нули.
- Резонанцију дефинишемо за напонску побуду, а антирезонанцију за струјну.



Резонанција кола без губитака

- Нека у ел. колу **без губитака** делује извор простопериодичне побуде.
- Резонанција (антирезонанција) настаје када комплексна учестаност извора постане **једнака** сопственој учестаности.
- Резонантан одзив је **растућа** функција времена.

Питања (1)

- Исказати принцип суперпозиције за устаљен одзив.
- Шта су заменски извори сложених побуда?
- Шта је Фуријеов тригонометријски ред? Која је његова примена?
- Шта су Фуријеови коефицијенти?
- Шта су хармоници?
- Шта је експонецијалан Фуријеовог ред?
- Исказати Парсевалов и Риманов став.

Питања (2)

- Шта је ефективна вредност периодичне функције?
- Шта је Гибсов феномен?
- Шта је устаљен сложенопериодичан одзив?
  Како се он одређује?
- Шта је снага приступа УСПО? Које снаге знате?
- Шта је привидна снага УСПО? Шта је фактор снаге?
- Шта је снага дисторзије УСПО?
- Како препознајемо УСПО?
- Шта је спектар УСПО?
- Које факторе УСПО знате? Шта је фактор изобличења?

Питања (3)

- Шта је резонанција?
- Шта су (анти)резонантне учестаности?
- Шта је амплитудска резонанција?
- Шта је фазна резонанција?
- Шта је резонантан одзив?
- Када настаје резонанција у колу без губитака? Какав је тада одзив?
- Зашто је значајан устаљен просто-периодичан одзив? Зашто су важне “синусоиде”?

Питања (4)

(5) У линеарном временски непромењљивом електричном колу делује један извор простопериодичног напона. Резонантни одзив ће се успоставити ако је комплексна учестаност извора	(а) различита од сопствених учестаности кола, (б) једнака реалном делу једне од сопствених учестаности кола, (в) једнака сопственој учестаности кола, (г) у отвореној левој комплексној полуравни?

(5) Одредити ефективну вредност устаљеног одзива

$$u = U + U\sin(\omega t) - \sqrt{2}U\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}U\sin(2\omega t)$$

(5) У линеарном временски непромењљивом електричном колу делује један извор простопериодичне струје. Устаљени одзив ће моћи да се успоставити ако је комплексна учестаност извора	(а) различита од сопствених учестаности кола, (б) једнака реалном делу једне од сопствених учестаности кола, (в) једнака сопственој учестаности кола, (г) у отвореној левој комплексној полуравни?

Питања (5)

(5) У временски непроменљивом линеарном електричном колу са концентрисаним елементима делују извори са простопериодичним побудама различитих учестаности. У општем случају, устаљени одзив	а) неће моћи да се успостави, б) ће се успоставити ако су сопствене учестаности у отвореној десној комплексној полуравни, в) ће се успоставити ако су сопствене учестаности у отвореној левој комплексној полуравни, г) ће се успоставити ако су сопствене учестаности на имагинарној оси?

(5) У временски непроменљивом линеарном електричном колу делује један извор простопериодичне струје. Устаљени одзив ће моћи да се успоставити ако је комплексна учестаност извора	а) различита од сопствених учестаности кола, б) једнака реалном делу једне од сопствених учестаности кола, в) једнака сопственој учестаности кола, г) у отвореној левој комплексној полуравни?

Питања (6)

(5) Шта је фактор таласности (Ripple factor)?

(5) Одредити ефективну вредност устаљеног одзива, $U > 0$,

$$u = 2U + \sqrt{2}U\sin(\omega t) - 2U\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}U\sin(2\omega t)$$

(5) Шта је фактор изобличења (дисторзије) (Distortion factor)?

Дати појмовно одређење, написати одговарајући израз и објаснити величине које се у њему појављују.

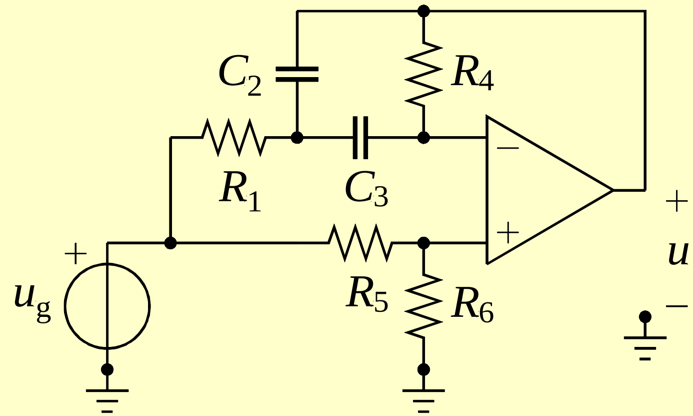
Задатак

Капацитивности кондензатора електричног кола су C, а отпорности отпорника су $R_5 = 2R,\ R_1 = R_4 = R_6 = R$.

(5) Одредити трансфер функцију (уопштену комплексну функцију мреже, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_\mathrm{g}(\underline{s})}$.

(5) Одредити нуле и полове трансфер функције.

(5) Колика је ефективна вредност напона u у случају да је одзив устаљен а побуда $u_\mathrm{g}(t) = U + U\sin(t/(3CR)) + U\cos(t/(CR))$?



SymPy Live - Mozilla Firefox

http://live.sympy.org/

```
>>> var('C2, C3, R1, R4, R5, R6', positive=True)
... var('s, Ug, V1, V2, V3, V4')
... jednacine = [
... Eq( (V1 - Ug)/R1 + (V1 - V2)*C2*s + (V1 - V3)*C3*s, 0),
... Eq( V3 - V4, 0),
... Eq( (V3 - V1)*C3*s + (V3 - V2)/R4 + 0, 0),
... Eq( (V4 - Ug)/R5 + (V4 - 0)/R6 + 0, 0)
... ]
... promenljive = [V1, V2, V3, V4]
... odziv = solve(jednacine, promenljive)
... Hs = (V2/Ug).subs(odziv);
... Hs.collect(s)
```

$$\frac{C_2 C_3 R_1 R_4 R_6 s^2 + R_6 + s\left(C_2 R_1 R_6 + C_3 R_1 R_6 - C_3 R_4 R_5\right)}{R_5 + R_6 + s^2\left(C_2 C_3 R_1 R_4 R_5 + C_2 C_3 R_1 R_4 R_6\right) + s\left(C_2 R_1 R_5 + C_2 R_1 R_6 + C_3 R_1 R_5 + C_3 R_1 R_6\right)}$$

```
>>>
```

Evaluate | Clear | LaTeX | Shift-Enter submits | Ctrl-Up/Down for history

About

This is just a regular Python shell, with the following command executed by default:

SymPy Live - Mozilla Firefox

File Edit View History Bookmarks Tools Help

http://live.sympy.org/

Most Visited Getting Started Latest Headlines

SymPy Live

SymPy Online Shell running on the Google App Engine. log in

```
... promenljive = [V1, V2, V3, V4]
... odziv = solve(jednacine, promenljive)
... Hs = (V2/Ug).subs(odziv);
... Hs.collect(s)
```

$$\frac{C_2C_3R_1R_4R_6s^2+R_6+s\left(C_2R_1R_6+C_3R_1R_6-C_3R_4R_5\right)}{R_5+R_6+s^2\left(C_2C_3R_1R_4R_5+C_2C_3R_1R_4R_6\right)+s\left(C_2R_1R_5+C_2R_1R_6+C_3R_1R_5+C_3R_1R_6\right)}$$

```
>>> var('C, R, w', positive=True)
... vrednosti = {C2:C, C3:C, R1:R, R4:R, R5:2*R, R6:R}
... Hsv = (Hs.subs(vrednosti)).cancel()
... Hsv
```

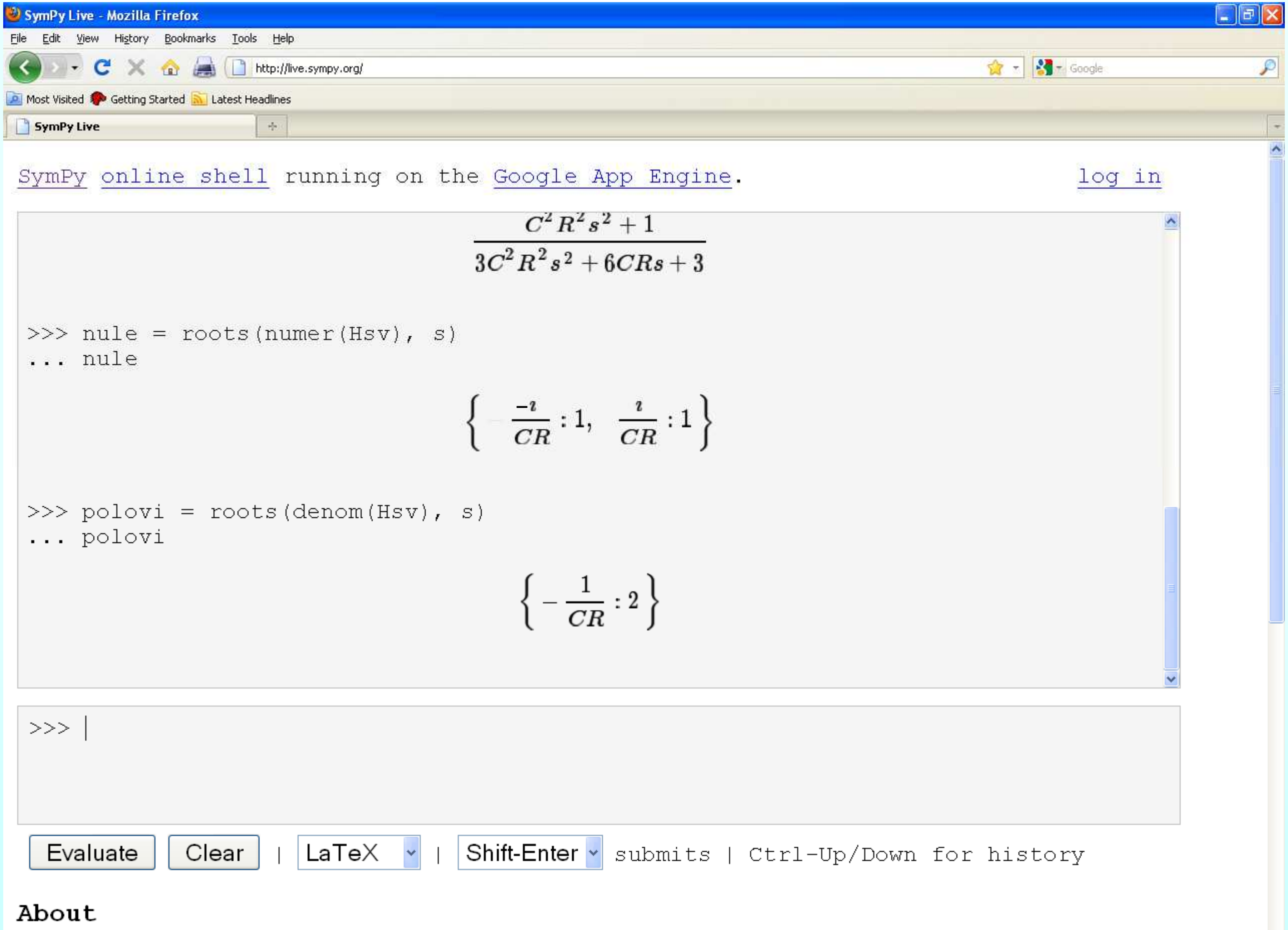
$$\frac{C^2R^2s^2+1}{3C^2R^2s^2+6CRs+3}$$

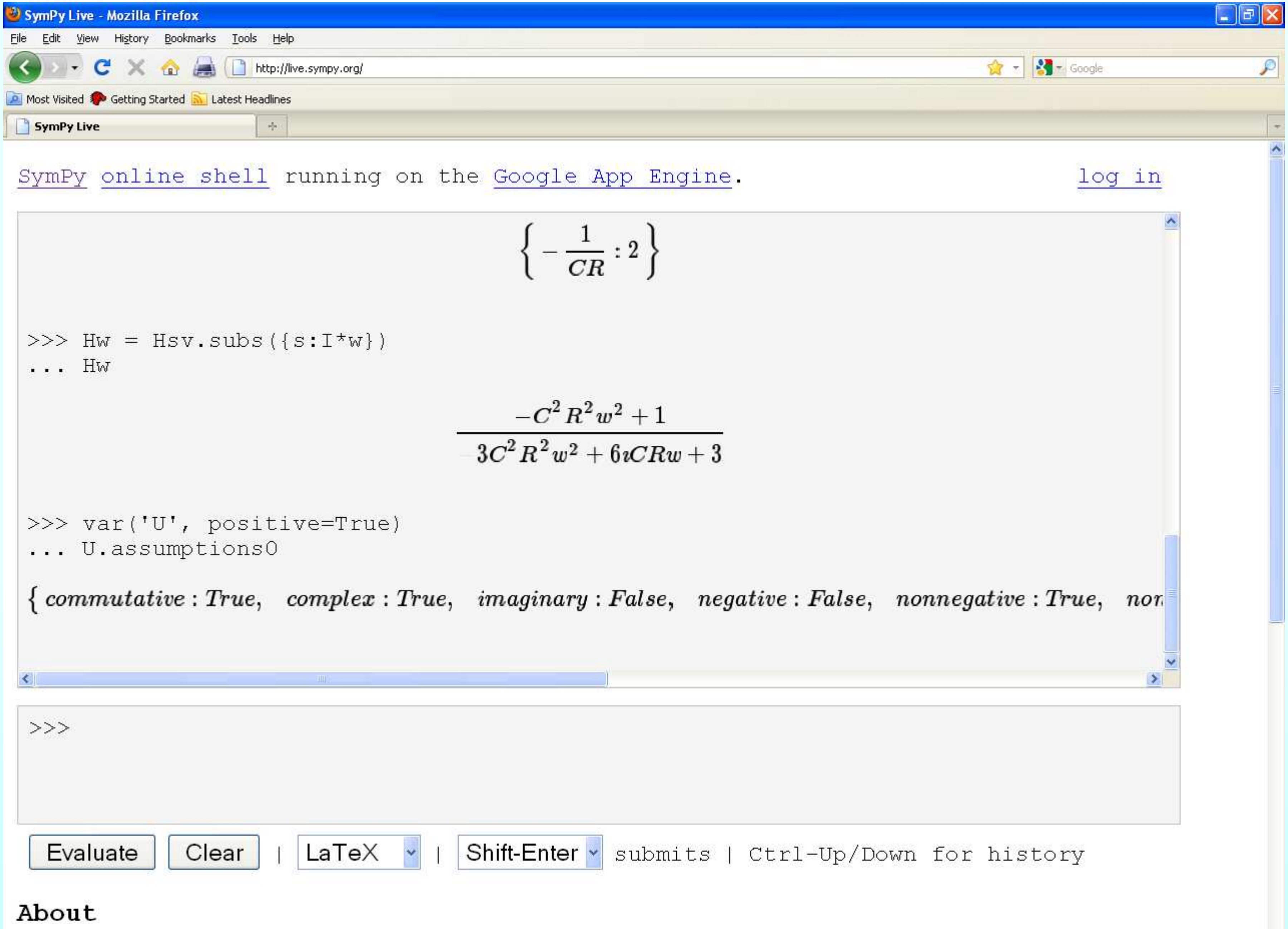
```
>>> |
```

Evaluate | Clear | LaTeX | Shift-Enter submits | Ctrl-Up/Down for history

About

This is just a regular Python shell, with the following command executed by default:


SymPy Live - Mozilla Firefox
File Edit View History Bookmarks Tools Help
http://live.sympy.org/
Most Visited Getting Started Latest Headlines
SymPy Live
SymPy online shell running on the Google App Engine.
log in
$\frac{C^2R^2s^2+1}{3C^2R^2s^2+6CRs+3}$
>>> nule = roots(numer(Hsv), s)
... nule
$\left\{-\frac{i}{CR}:1,\ \frac{i}{CR}:1\right\}$
>>> polovi = roots(denom(Hsv), s)
... polovi
$\left\{-\frac{1}{CR}:2\right\}$
>>>
Evaluate
Clear
LaTeX
Shift-Enter
submits | Ctrl-Up/Down for history
About


SymPy Live - Mozilla Firefox
File Edit View History Bookmarks Tools Help
http://live.sympy.org/
Most Visited Getting Started Latest Headlines
SymPy Live
SymPy online shell running on the Google App Engine.
log in
$\left\{-\frac{1}{CR} : 2\right\}$
>>> Hw = Hsv.subs({s:I*w})
... Hw
$\frac{-C^2R^2w^2+1}{3C^2R^2w^2+6\imath CRw+3}$
>>> var('U', positive=True)
... U.assumptions0
$\{$ commutative : True, complex : True, imaginary : False, negative : False, nonnegative : True, non
>>>
Evaluate
Clear
LaTeX
Shift-Enter
submits | Ctrl-Up/Down for history
About

SymPy Live - Mozilla Firefox

File Edit View History Bookmarks Tools Help

http://live.sympy.org/

Most Visited Getting Started Latest Headlines

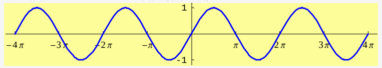
SymPy Live

SymPy online shell running on the Google App Engine. log in

```
>>> U20 = abs(U*Hsv.subs(s,0))
... U20
```

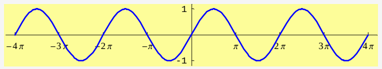
$$\frac{1}{3}U$$

```
>>> U21 = abs((U/sqrt(2))*cancel(Hsv.subs(s,I/(3*C*R))))
... U21
```



$$2\left|\frac{\sqrt{2}U}{12+9\imath}\right|$$

```
>>> U22 = abs((U/sqrt(2))*cancel(Hsv.subs(s,I/(C*R))))
... U22
```

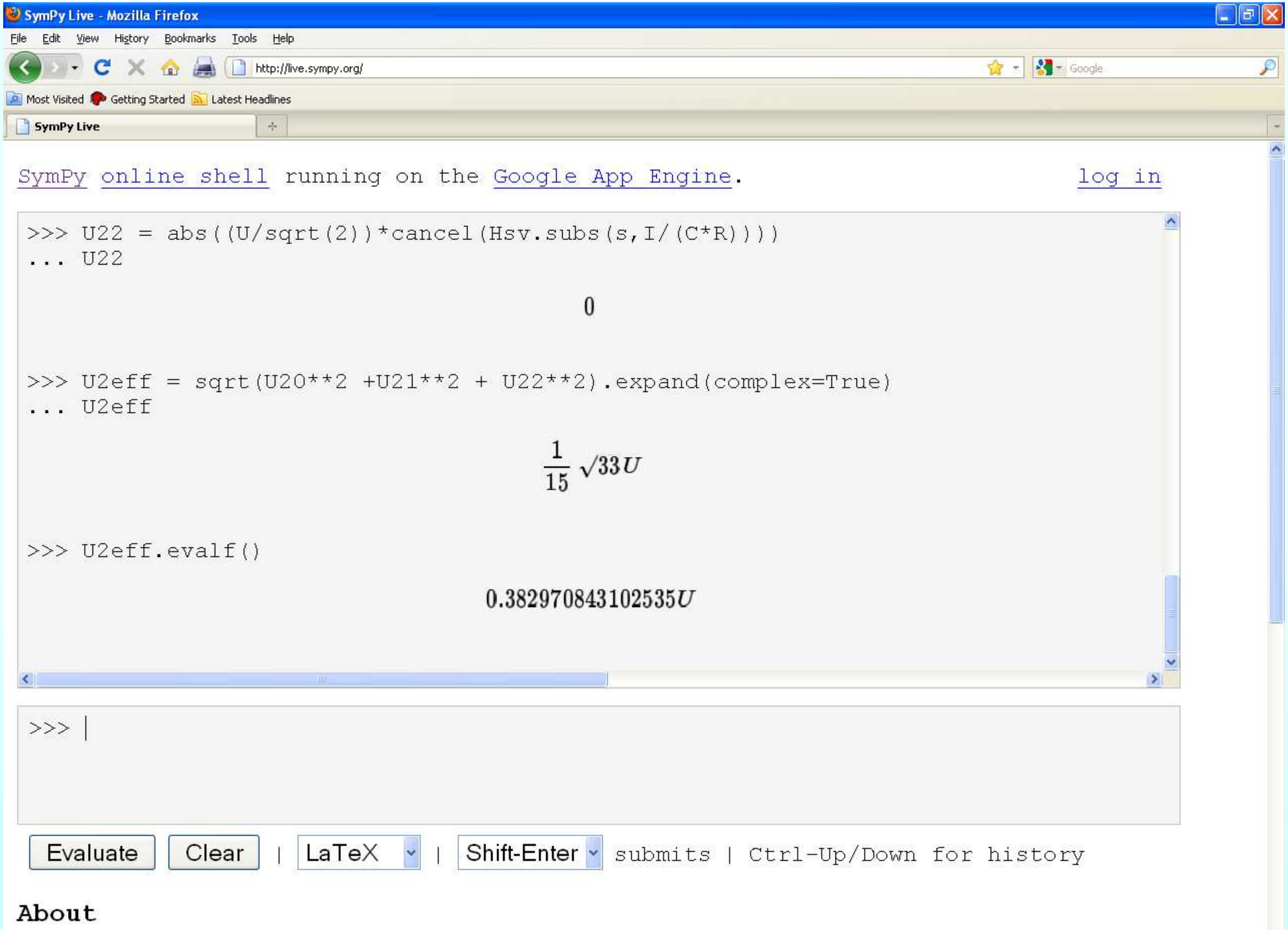


$$0$$

```
>>>
```

Evaluate | Clear | LaTeX | Shift-Enter submits | Ctrl-Up/Down for history

About


SymPy Live - Mozilla Firefox
File Edit View History Bookmarks Tools Help
http://live.sympy.org/
Most Visited Getting Started Latest Headlines
SymPy Live
SymPy online shell running on the Google App Engine.
log in
>>> U22 = abs((U/sqrt(2))*cancel(Hsv.subs(s,I/(C*R))))
... U22
0
>>> U2eff = sqrt(U20**2 +U21**2 + U22**2).expand(complex=True)
... U2eff
$\frac{1}{15}\sqrt{33}U$
>>> U2eff.evalf()
$0.382970843102535U$
>>>
Evaluate
Clear
LaTeX
Shift-Enter
submits | Ctrl-Up/Down for history
About

Jean Baptiste Joseph Fourier 1768–1830

J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris: Firmin Didot Père et Fils, 1822.

Фуриjеово име је исписано на Ајфеловој кули.

Математичар и физичар. Докторирао код *Joseph Lagrange*. Био је ментор за докторат *Gustav Dirichlet*. Био је редовни професор на *École Polytechnique*. Измислио је представљање функције редом простопериодичних сабирака. Рођен у Auxerre, Француска.

https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Fourier/Fourier_oeuvre.htm


INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Membres de l'Académie des sciences depuis sa création

Joseph Fourier

21 mars 1768 à Auxerre - 16 mai 1830 à Paris

Élu académicien libre le 27 mai 1816. Le 29 mai, l'Académie est avisée que le roi Louis XVIII n'approuve pas cette élection.
Une nouvelle élection le 12 mai 1817 (pour la section de physique générale) est confirmée par le roi le 23 mai 1817.
Élu Secrétaire perpétuel pour les sciences mathématiques le 18 novembre 1822
Il fut élu Membre de l'Académie française le 14 décembre 1826

Mathématicien, Joseph Fourier est l'auteur de travaux fondamentaux sur la théorie de la chaleur. Il est l'un des initiateurs de la théorie mathématique des phénomènes physiques.

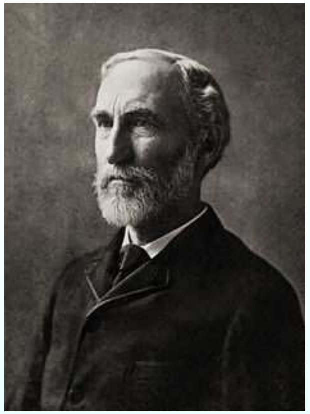
Joseph Fourier consacra ses premiers travaux à l'étude de théorèmes généraux relatifs à la résolution d'équations algébriques. Il présenta un mémoire sur ce sujet devant l'Académie des sciences le 9 décembre 1789.
En 1794, il est nommé élève à l'École normale, puis répétiteur à l'École polytechnique, poste qu'il occupa jusqu'en 1797. Recruté par Gaspard Monge, il partit en 1798 avec les scientifiques de l'expédition d'Égypte. Bonaparte créa l'Institut d'Égypte selon un plan inspiré de celui de Paris et le désigna pour en être le Secrétaire perpétuel. Joseph Fourier séjourna en Égypte

Ci-contre Portrait de Joseph Fourier

Retour vers la liste des fonds d'archives

Conservateur : Florence Greffe - Académie des sciences - 23, quai de Conti - 75006 PARIS - © Académie des sciences

Josiah Willard Gibbs 1839–1903



Математичар и физичар. Докторирао на Yale University. Уочио премашења у Фуријеовом реду. Рођен у New Haven, Connecticut, САД.