Теорија електричних кола

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

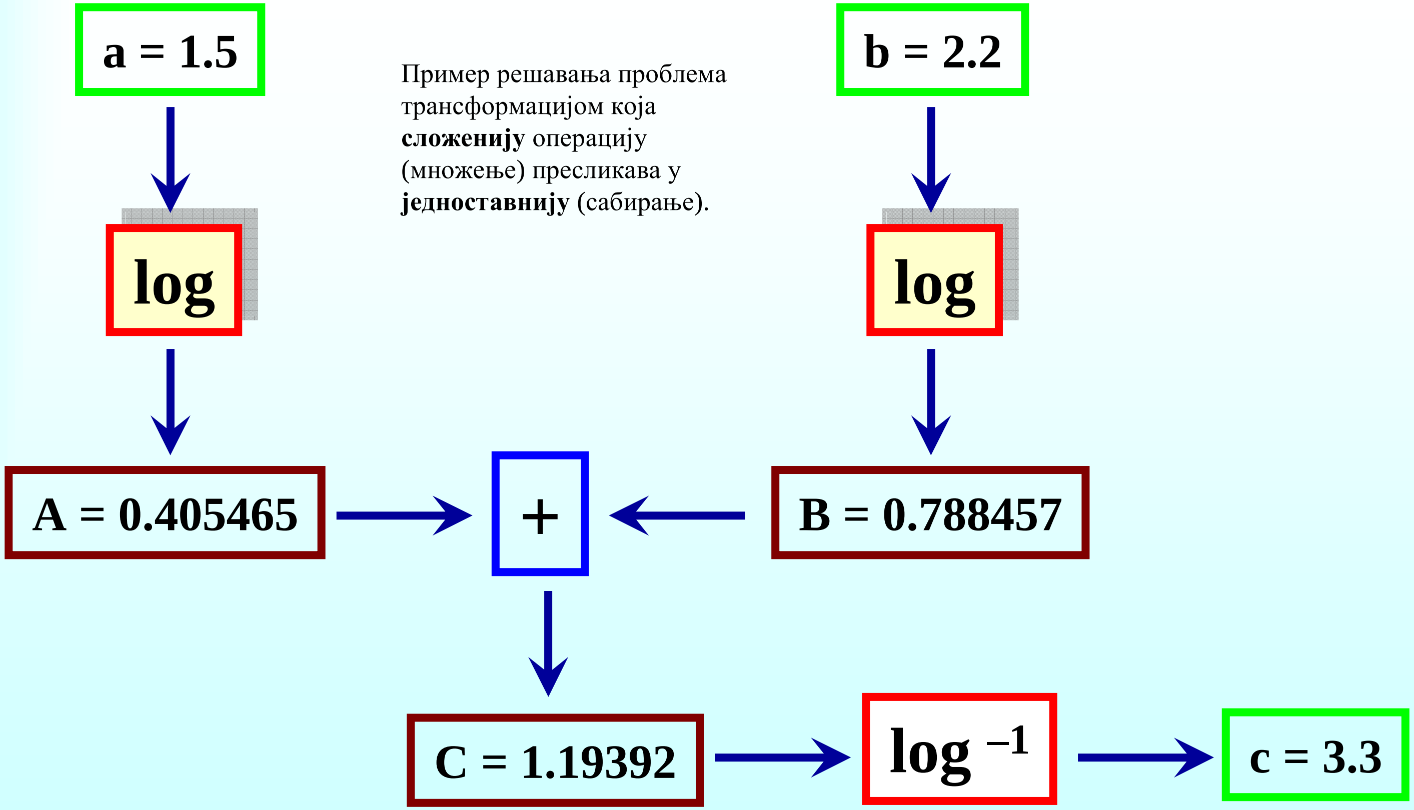
$$u(t) = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{\underline{s}t}\,\mathrm{d}s$$

$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-a\,t}$	$\frac{1}{a+s}$
$\sin(b\,t)$	$\frac{b}{b^2+s^2}$
$\cos(b\,t)$	$\frac{s}{b^2+s^2}$

Користите само материјале које вам достави и препоручи предметни наставник у текућој школској години.

Дејан Тошић

Како помножити два броја $c = a \cdot b$ коришћењем операције сабирања?



Пример решавања проблема трансформацијом која **сложенију** операцију (множење) пресликава у **једноставнију** (сабирање).

x	log(x)
1.	0.
1.1	0.0953102
1.2	0.182322
1.3	0.262364
1.4	0.336472
1.5	**0.405465**
1.6	0.470004
1.7	0.530628
1.8	0.587787
1.9	0.641854
2.	0.693147
2.1	0.741937
2.2	**0.788457**
2.3	0.832909
2.4	0.875469
2.5	0.916291
2.6	0.955511
2.7	0.993252
2.8	1.02962
2.9	1.06471
3.	1.09861
3.1	1.1314
3.2	1.16315
3.3	**1.19392**
3.4	1.22378
3.5	1.25276
3.6	1.28093
3.7	1.30833
3.8	1.335
3.9	1.36098
4.	1.38629

Неопходна је логаритамска таблица парова (x, log(x)).

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

Лапласова трансформација

као алат за одређивање потпуног одзива временски непромењљивих линеарних електричних кола

David Vernon Widder, *The Laplace transform*, Princeton Mathematical Series, 1946.

Wilbur R. LePage, *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, McGraw-Hill, 1961.

Murray R. Spiegel, *Theory and Problems of Laplace Transforms*, McGraw-Hill, 1965.

M. G. Smith, *Laplace Transform Theory*, D. Van Nostrand, 1966.

Lokenath Debnath, Dambaru Bhatta, *Integral Transforms and Their Applicaions*, CRC Press Taylor & Francis, 2015.

Циљ, покретач (мотив), замисао (идеја)

- Одредити одзив на почетну енергију и побуду – одредити потпун одзив.
- Решавање диференцијалних једначина заменити решавањем алгебарских.
- Пронаћи једнозначно и линеарно преобликовање (трансформацију) које извод пресликава у множење константом.

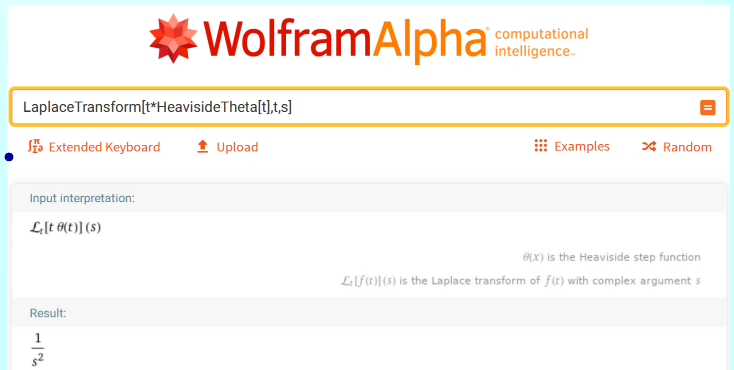
$$\cancel{\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{R_1}{L}+\frac{1}{CR_2}\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{1}{CL}+\frac{R_1}{CLR_2}\right)i_2=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{CLR_2}u_\mathrm{g}}$$

Тежња да се **избегне** решавање диференцијалних једначина и **прерачунавање** почетних услова условила је тражење нових, делотворнијих и учинковитијих, поступака одређивања потпуног одзива, као што је метод анализе електричних кола **Лапласовом трансформацијом**.

Примена Лапласове трансформације

- Теорија интегро-диференцијалних једначина.
- Решавање обичних диференцијалних једначина, парцијалних диференцијалних једначина, и интегралних једначина.
- Решавање практичних проблема у физици и техници (инжењерству).
- Решавање система алгебарско-диференцијалних једначина.
- Теорија линеарних оператора.

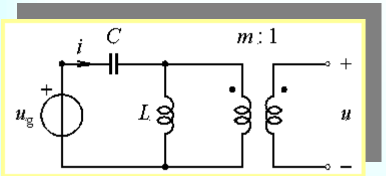
Initial value problems



Операторски метод

$$i(t) = \frac{t\,U\,\theta(t)\,\sin\left(\frac{t}{\sqrt{C\,L}}\right)}{2\,L}$$

Проблем: одређивање одзива електричног кола



Систем једначина (математички модел) проблема

Решење једначина

Резултат: одзив

Трансформација

Инверзна трансформација

Трансформисане једначине

Решење трансформисаних једначина

Peter Henrici, *Applied and computational complex analysis*, vol. 2, Special Functions – Integral Transforms – Asymptotics – Continued Fractions, John Wiley & Sons, 1977.

L. Berg,, Introduction to the Operational Calculus. North-Holland, Amsterdam, 1967.

J. G. Mikusinski, *Rachunek Operatorow*, Warsaw, 1953. English edition: *Operational Calculus*. Pergamon Press, London 1959.

Унилатерална (једнострана) Лапласова трансформација

$$u(t) = w(t)\,\vartheta(t)$$

***w*(*t*)** је **елементарна** функција као што су полиноми, експоненцијална функција, синусна функција, или косинусна функције.

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

$$\underline{s} = \sigma + \mathrm{j}\omega, \quad (\sigma, \omega \in \mathrm{R})$$

c је најмања реална вредност, која дефинише **Re($\underline{s}$)** > ***c*** област комплексне $\underline{S}$−равни, за коју трансформација постоји.

$$u(t) = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{\underline{s}t}\,\mathrm{d}\underline{s}$$

$$u(t) \leftrightarrow \underline{U}(\underline{s})$$

$$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$$

$$u(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}))$$

Лапласов трансформат, оригинал

- Функција времена $u(t)$ је тренутна вредност (оригинал, напон/струја, временски облик).
- Комплексна функција $\underline{U}(\underline{s})$ је Лапласов трансформат (слика, комплексан напон/струја, трансформат).
- $\mathrm{LT}(u(t))$ је директна Лапласова трансформација.
- $\mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}))$ је инверзна Лапласова трансформација.
- $\underline{s}$ је Лапласова промењљива (комплексна фреквенција).
- $u(t)$ и $\underline{U}(\underline{s})$ су Лапласов трансформациони пар. $u(t) \leftrightarrow \underline{U}(\underline{s})$
- Трансформација коју смо дефинисали је ***унилатерална Лапласова трансформација***.

Дефинише се и *билатерална Лапласова трансформација* али је од мањег интереса за Теорију електричних кола зато што **не узима у обзир природне почетне услове**.

Кључна својства унилатералне Лапласове трансформације

- **Једнозначност.** Ако су два оригинала једнака, једнаке су и њихове слике, и обрнуто.
- **Линеарност.** Трансформација збира се пресликава у збир трансформација и константа се може изнети пред оператор трансформације.
- **Претварање извода.** Извод у времену се пресликава у множење константом.
- Доња граница је **0^- нула-минус** да би се обухватили дисконтинуитети оригинала у нули.

Диракови делта-импулси су примери дисконтинуитета оригинала $u(t)$.

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

Кључна својства LT

Једнозначност

$$u_1(t) = u_2(t) \Leftrightarrow \underline{U}_1(\underline{s}) = \underline{U}_2(\underline{s})$$

$$a, b = \text{const}$$

Линеарност

$$\mathrm{LT}(a u_1(t) + b u_2(t)) = a\underline{U}_1(\underline{s}) + b\underline{U}_2(\underline{s})$$

Претварање извода

$$\mathrm{LT}\left(\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \underline{s}\,\underline{U}(\underline{s}) - u(0^-)$$

$$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u_1(t))$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u_2(t))$$

Једнозначност: функције на скупу мере 0

За напоне и струје који су од интереса за инжењерску праксу у Електротехници унилатерална Лапласова трансформација је једнозначна. Строго и формално теоријски, постоји класа функција чија је Лапласова трансформација једнака нули. То су функције дефинисане на *скупу мере нула*, на пример $\mathcal{N}(t)=0$ у свим тачкама реалне осе осим у коначно много тачака t_1, t_2, $\ldots, t_k, \ldots, t_N$, у којима је $\mathcal{N}(t_k)\neq 0$. Лапласова трансформација функција ове класе је једнака нули, $\mathrm{LT}(\mathcal{N}(t))=\int\limits_{0-}^{+\infty}\mathcal{N}(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t=0$.

Практична импликација ове теореме је да приликом дефинисања функција по интервалима није важно у који интервал укључујемо рубне тачке, Лапласова трансформација ће бити иста. На пример, функције $u_1(t)=\begin{cases}U, & t_1<t<t_2\\ 0, & t\le t_1 \vee t_2\le t\end{cases}$ и $u_2(t)=\begin{cases}U, & t_1\le t\le t_2\\ 0, & t<t_1 \vee t_2<t\end{cases}$ имају исту Лапласову трансформацију $\mathrm{LT}(u_1(t))=\mathrm{LT}(u_2(t))=\int\limits_{t_1}^{t_2}U\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t=U\dfrac{\mathrm{e}^{-\underline{s}t_1}-\mathrm{e}^{-\underline{s}t_2}}{\underline{s}}$ за $\forall \underline{s}\in \mathrm{C}\setminus\{0\}$.

Дефиниција. Ако је $\mathcal{N}(t)$ функција од t таква да за свако $t>0$ важи $\int\limits_{0}^{t}\mathcal{N}(\tau)\mathrm{d}\tau=0$, онда је $\mathcal{N}(t)$ *нул-функција* (Null-function).

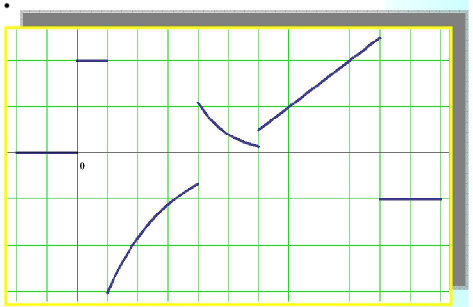
Генерално, свака функција која је нула у свим тачкама, осим у тачкама пребројивог скупа тачака (скуп тачака које могу бити у коресподенцији један-на-један са природним бројевима 1,2,3,…), је нул-функција.

Ово је повезано са чињеницом да је одређен интеграл, у Римановом смислу, идентички једнак нули ако је горња граница једнака доњој граници.

Део-по-део непрекидна функција

За практичне инжењерске потребе од користи су довољни услови постојања (егзистенције) унилатералне Лапласове трансформације, који се односе на класе функција времена најчешће коришћене у електротехници, индустрији и инжењерству.

Дефиниција. Функција $u(t)$ је део-по-део непрекидна (piecewise continuous, PWC) на $[a,b]$ ако постоји коначан број тачака $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots < t_n < b$ такав да је $u(t)$ непрекидна на свакомотвореном подинтервалу (a,t_1), (t_1,t_2), … (t_{k-1},t_k), … (t_n,b) и ако постоје све коначне граничне вредности $\lim\limits_{t\to a+} u(t)$, $\lim\limits_{t\to t_k-} u(t)$, $\lim\limits_{t\to t_k+} u(t)$, $\lim\limits_{t\to b-} u(t)$, $(k=1,2,\ldots n)$.



Функција $u(t)$ је део-по-део непрекидна на $[0,+\infty)$ ако је део-по-део непрекидна на сваком коначном интервалу $[0,b]$, $b \in \mathrm{R}_+$.

Део-по-део непрекидна функција времена на сваком коначном интервалу може имати само коначан број прекида прве врсте и ограничена је.

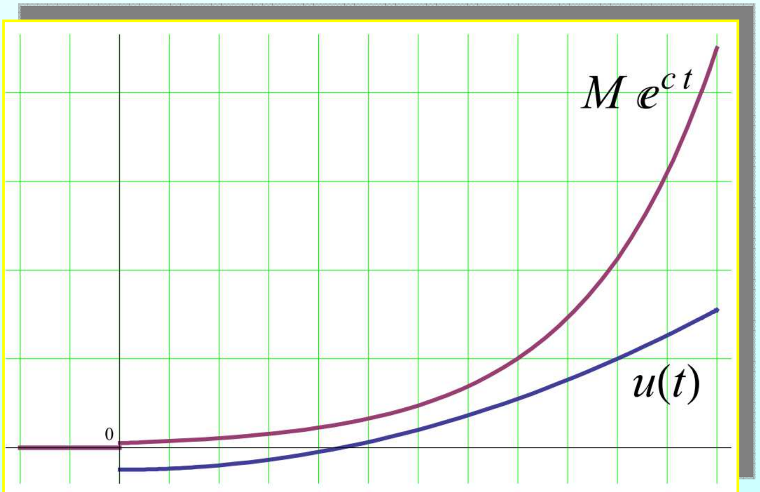
Ако је потпун одзив електричног кола део-по-део непрекидна функција времена, онда, по дефиницији, постоји коначна гранична вредност $u(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} u(t)$, али коначна гранична вредност $u(+\infty) = \lim\limits_{t\to +\infty} u(t)$ може, али не мора, постојати.

Функција експоненцијалног реда

Дефиниција. Функција $u(t)$ је функција експоненцијалног реда c ако постоје реалне константе $M>0$ и c такве да за неко $t>T$ важи следеће: $|u(t)|\leq M\,\mathrm{e}^{ct}$ за свако $t\geq T$.

Еквивалентно, постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-ct}\,|u(t)|$.

Геометријски, график функције $u(t)$ на интервалу $(T,+\infty)$ не расте брже од графика експоненцијалне функције $M\,\mathrm{e}^{ct}$.



Довољни услови постојања LT

Теорема. **Довољни услови за постојање (егзистенцију)**. Ако је $u(t)$ део-по-део непрекидна на $[0,+\infty)$ и експоненцијалног реда c онда унилатерална Лапласова трансформација постоји за $\mathrm{Re}(\underline{s}) > c$. Под овим условима Лапласов интеграл апсолутно конвергира.

За део-по-део непрекидне функције експоненцијалног реда унилатерална Лапласова трансформација увек постоји. Наведени услови су довољни, а то значи да за неке друге класе функција, које нису део-по-део непрекидне функције експоненцијалног реда, унилатерална Лапласова трансформација може, али не мора, постојати.

Ако важе услови из претходне теореме, и $\underline{U}(\underline{s}) = \int\limits_{0-}^{+\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$, онда је $\lim\limits_{\mathrm{Re}(\underline{s})\to+\infty} \underline{U}(\underline{s}) = 0$.

Ако $\mathrm{LT}(u(t)) = \underline{U}(\underline{s})$ **не** тежи нули када $\underline{s} \to \infty$ (или $\mathrm{Re}(\underline{s}) \to +\infty$), онда $u(t)$ **не може** бити део-по-део непрекидна функције експоненцијалног реда. На пример, $\underline{U}_1(\underline{s}) = 1$ и

$\underline{U}_2(\underline{s}) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{s}+1}$ **нису** унилатералне Лапласове трансформације део-по-део непрекидних функција експоненцијалног реда.

Теореме о егзистенцији LT

Теорема. Ако је функција $u(t)$ ограничена за свако реално $t \geq 0$ онда Лапласов интеграл конвергира апсолутно за $\mathrm{Re}(\underline{s}) > 0$.

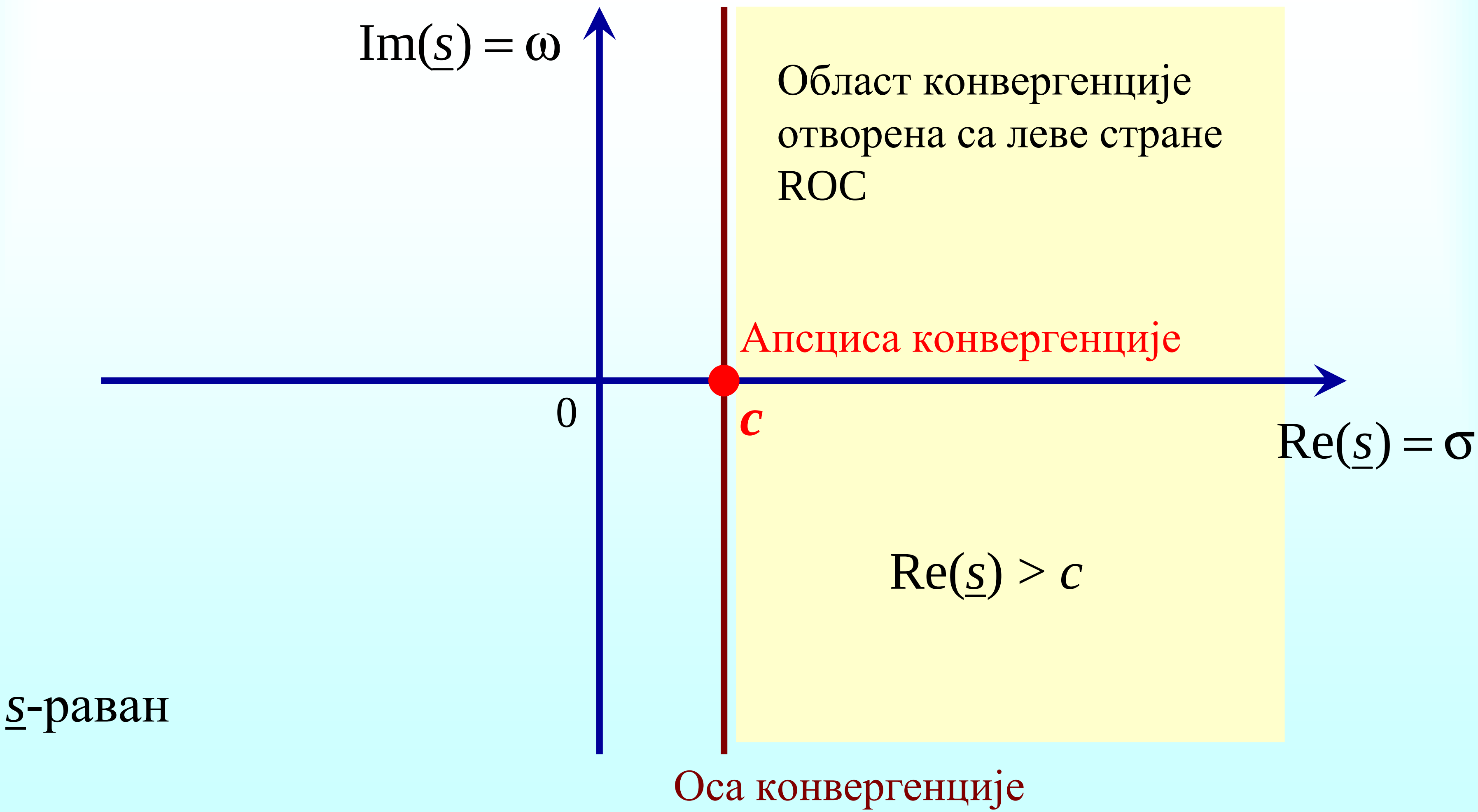
Теорема. Ако Лапласов интеграл конвергира за неко $\underline{s}_0 = \sigma_0 + \mathrm{j}\omega_0$ онда он конвергира за свако $\underline{s} = \sigma + \mathrm{j}\omega$ са $\sigma > \sigma_0$.

Област конвергенције (Region of Convergence, ROC, R.O.C.) је скуп свих тачака комплексне $\underline{s}$-равни у којима постоји унилатерална Лапласова трансформација. То је полураван коју чине тачке десно од праве $\underline{s} = \sigma_0$.

Дефиниција. Најмањи реалан број c, такав да унилатерална Лапласова трансформација конвергира за $\mathrm{Re}(\underline{s}) = \sigma > c$, зове се апсциса минималне конвергенције.

Лапласов интеграл је несвојствен и настаје као граничан процес $\lim\limits_{T \to +\infty} \int_{-\varepsilon}^{T} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$, $\varepsilon \to 0+$.

Област конвергенције LT



LT елементарних функција (1)

Одредимо неколико парова унилатералне Лапласове трансформације непосредним решавањем Лапласовог интеграла.

1. Каузална експоненцијална функција $u(t) = \mathrm{e}^{at}\vartheta(t)$

$$\mathrm{LT}(\mathrm{e}^{at}\vartheta(t)) = \int_{0-}^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{(a-\underline{s})t}}{a-\underline{s}}\right|_{0-}^{+\infty} = \frac{1}{\underline{s}-a}, \text{ за } \mathrm{Re}(\underline{s}) > a\,.$$

Ако је функција растућа, онда је $a > 0$ и имагинарна оса није у области конвергенције.

2. Хевисајдова одскочна функција $u(t) = \vartheta(t)$

Ово је посебан случај претходног, када је $a = 0$, $\mathrm{LT}(\vartheta(t)) = \dfrac{1}{\underline{s}}$, за $\mathrm{Re}(\underline{s}) > 0$.

3. Каузалне простопериодичне функције $u(t) = \sin(bt)\vartheta(t)$ и $u(t) = \cos(bt)\vartheta(t)$

Претпостављајући да је неодређен интеграл $\int \sin(bt)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t = (A\cos(bt) + B\sin(bt))\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}$,

Лапласов интеграл резултира у следећем:

$$\mathrm{LT}(\sin(bt)\vartheta(t)) = \frac{b}{\underline{s}^2 + b^2}, \text{ за } \mathrm{Re}(\underline{s}) > 0\,;\ \mathrm{LT}(\cos(bt)\vartheta(t)) = \frac{\underline{s}}{\underline{s}^2 + b^2}, \text{ за } \mathrm{Re}(\underline{s}) > 0\,.$$

LT елементарних функција (2)

4. Каузалне псеудопериодичне функције (пригушене простопериодичне функције)

$u(t) = \mathrm{e}^{at}\sin(bt)\vartheta(t)$ и $u(t) = \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\vartheta(t)$

Трансформат се изводи из случаја **3.** тако што се $-\underline{s}$ замени разликом $(a-\underline{s})$.

$$\mathrm{LT}(\mathrm{e}^{at}\sin(bt)\vartheta(t)) = \frac{b}{(\underline{s}-a)^2+b^2}, \text{ за } \mathrm{Re}(\underline{s}) > a; \ \mathrm{LT}(\mathrm{e}^{at}\cos(bt)\vartheta(t)) = \frac{\underline{s}-a}{(\underline{s}-a)^2+b^2}, \text{ за } \mathrm{Re}(\underline{s}) > a.$$

5. Каузална степена функција $u(t) = t^n\vartheta(t)$ са $n = 0,1,2,3,\ldots$

Парцијалном интеграцијом се добија рекурзивна формула $\mathrm{LT}(t^n\vartheta(t)) = \dfrac{n}{\underline{s}}\mathrm{LT}(t^{n-1}\vartheta(t))$, за

$\mathrm{Re}(\underline{s}) > 0$, при чему је из **2.** познато $\mathrm{LT}(t^0\vartheta(t)) = \mathrm{LT}(\vartheta(t)) = \dfrac{1}{\underline{s}}$. Из ње следује трансформат

$\mathrm{LT}(t^n\vartheta(t)) = \dfrac{n!}{\underline{s}^{n+1}}$ за $\mathrm{Re}(\underline{s}) > 0$.

Скоро део-по-део непрекидна функција

In[1]:=

```
LaplaceTransform[1/Sqrt[t] HeavisideTheta[t], t, s]
```

Out[1]=

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

6. Каузалан реципрочан квадратни корен $u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\vartheta(t)$

Ова функција **није** део-по-део непрекидна зато што има **сингуларитет** у нули. Она припада класи скоро део-по-део непрекидних функција. Функција $u(t)$ је скоро део-по-део непрекидна на неком коначном интервалу ако постоји коначан број тачака $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_N$ такав да у околини сваке од њих важи $|u(t)| < \dfrac{M}{|t-t_k|^n}$ за $n<1$ и неку реалну константу M.

Ако је функција скоро део-по-део непрекидна на сваком коначном интервалу онда се она назива *скоро део-по-део непрекидна* (almost piecewise continuous, APC). Доказује се да унилатерална Лапласова трансформација **постоји** (егзистира) за овакве функције.

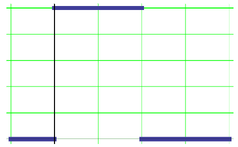
$$\mathrm{LT}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\vartheta(t)\right) = \int_{0-}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t\text{, сменом } \underline{s}t = \tau^2 \text{ је , } \mathrm{LT}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\vartheta(t)\right) = \frac{2}{\sqrt{\underline{s}}}\int_{0-}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

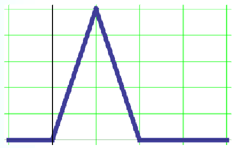
На основу идентитета $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}\,\mathrm{d}x = 1$, следује $\mathrm{LT}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\vartheta(t)\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\underline{s}}}$ за $\mathrm{Re}(\underline{s}) > 0$.

У *Теорији електричних кола* ми **нећемо** сусретати овакве функције.

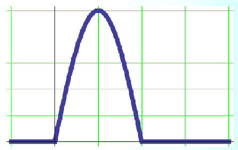
Импулси коначног трајања

7. Каузални импулси коначног трајања, правоугаони $u_1(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T\\ 0 & t\le 0\vee T\le t\end{cases}$,





троугаони, $u_2(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{T}t, & 0<t\le\dfrac{T}{2}\\ 2-\dfrac{2}{T}t, & \dfrac{T}{2}<t<T\\ 0, & t\le 0\vee T\le t\end{cases}$, синусоидални $u_3(t)=\begin{cases}\sin(bt), & 0<t<\dfrac{\pi}{b}\\ 0 & t\le 0\vee\dfrac{\pi}{b}\le t\end{cases}$



$$\mathrm{LT}(u_1(t))=\int_0^T \mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t=\frac{1-\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}{\underline{s}},\quad \mathrm{LT}(u_2(t))=\int_0^{\frac{1}{2}T}\frac{2}{T}t\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}T}^{T}\left(2-\frac{2}{T}t\right)\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t=\frac{1-2\mathrm{e}^{-\underline{s}\frac{1}{2}T}+\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}{\frac{1}{2}\underline{s}^2T}$$

$\mathrm{LT}(u_3(t))=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{b}}\sin(bt)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t=b\frac{1+\mathrm{e}^{-\underline{s}\frac{\pi}{b}}}{\underline{s}^2+b^2}$, за свако комплексно $\underline{s}\in\mathrm{C}\setminus\{0,-\mathrm{j}b,+\mathrm{j}b\}$. Трансформати **немају** полове, а гранична вредност трансформата постоји за $\underline{s}\to 0$: за правоугаони је T а за троугаони импулс је $\dfrac{1}{2}T$. За синусоидални импулс, када $\underline{s}\to\pm\mathrm{j}b$ трансформат тежи $\mp\mathrm{j}\dfrac{\pi}{2b}$.

LT Дираковe делта-функције

Унилатерална Лапласова трансформација Диракове делта-функције се може одредити у граничном процесу у коме се посматра елементарна апроксимација $\delta_\varepsilon(t)$, на пример, дефинисана као правоугаони импулс трајања ε и амплитуде $\frac{1}{\varepsilon}$, $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 < t < \varepsilon \\ 0, & t \le 0 \vee t \ge \varepsilon \end{cases}$.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \delta_\varepsilon(t), \quad \underline{\Delta}_\varepsilon(\underline{s}) = \int_{0-}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) \mathrm{e}^{-\underline{s}t}\, \mathrm{d}t = \int_{0-}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{e}^{-\underline{s}t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-\underline{s}t}}{-\underline{s}} \Bigg|_{t=0-}^{t=\varepsilon} = \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon \underline{s}} - 1}{-\varepsilon \underline{s}}$$

$$\underline{\Delta}(\underline{s}) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \underline{\Delta}_\varepsilon(\underline{s}), \quad \underline{\Delta}(\underline{s}) = \int_{0-}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{e}^{-\underline{s}t}\, \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon \underline{s}} - 1}{-\varepsilon \underline{s}} = 1, \qquad \boxed{\mathrm{LT}(\delta(t)) = 1}$$

У литератури се Лапласова трансформација означава и са $\underline{U}(\underline{s}) = \mathscr{L}(u(t))$, на пример, $\mathscr{L}(\delta(t)) = 1$.

Најразвијенији рачунарски алат за аутоматизовано одређивање унилатералне Лапласове трансформације је *Mathematica*, Wolfram Research, Inc.

```
In[1]:=
        LaplaceTransform[DiracDelta[t], t, s]
Out[1]=
        1
```

Изводи Диракове делта-функције

Хевисајдова одскочна функција $\vartheta(t)$ је физички тумачена као бесконачно брза скоковита промена физичке величине са једне коначне вредности на другу. Диракова делта-функција $\delta(t)$ је физички тумачена као бесконачно брз пренос коначне енергије у коме физичка појава има бесконачно кратко трајање. Диференцирањем Хевисајдове одскочне функције настаје Диракова делта-функција: $\delta(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t}$.

У математичкој теорији генералисаних функција и теорији дистрибуција се уводе изводи по времену Диракове делта-функције. Њих можемо сагледати кроз апроксимације генералисаних функција елементарним функцијама које су (1) дефинисане у сваком тренутку времена, (2) непрекидне у сваком тренутку времена, (3) имају извод по времену произвољног реда. Ове елементарне функције су, као и њихови изводи, глатке функције.
Функција је глатка ако је непрекидна са непрекидним првим изводом.

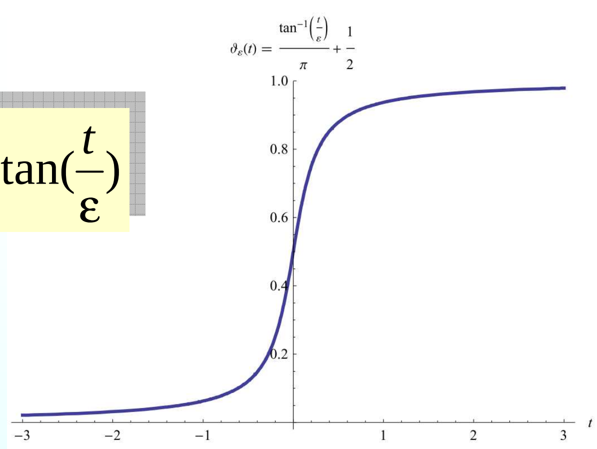
Унилатерална Лапласова транформација генералисаних функција и њихових извода је скуп следећих парова: $\dfrac{\mathrm{d}^0\vartheta(t)}{\mathrm{d}t^0} = \vartheta(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{\underline{s}}$, $\dfrac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t) \leftrightarrow 1$, $\dfrac{\mathrm{d}^2\vartheta(t)}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} = \delta'(t) \leftrightarrow \underline{s}$,

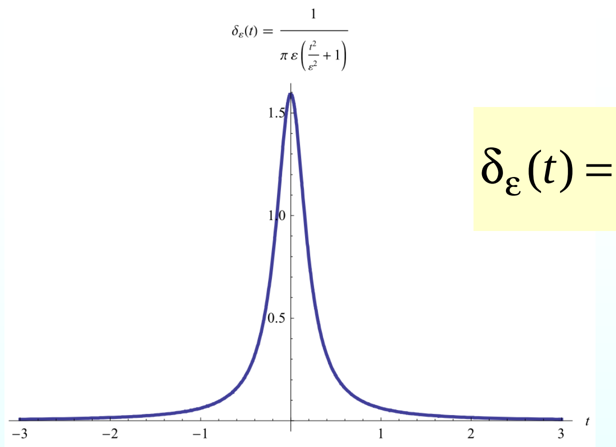
$$\frac{\mathrm{d}^3\vartheta(t)}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}^2\delta(t)}{\mathrm{d}t^2} = \delta''(t) \leftrightarrow \underline{s}^2, \ \ldots, \ \frac{\mathrm{d}^{n+1}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t^{n+1}} = \frac{\mathrm{d}^n\delta(t)}{\mathrm{d}t^n} = \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow \underline{s}^n, \ (n = 1,2,3,\ldots).$$

Посматрајмо $\vartheta_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arctan(\dfrac{t}{\varepsilon})$ као апроксимацију Хевисајдове одскочне функције и њене изводе да бисмо добили увид у изводе Диракове делта-функције.

Апроксимација извода Диракове делта-функције

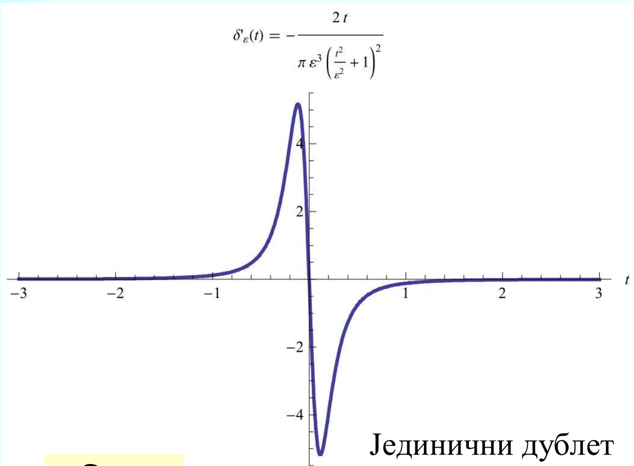
$$\vartheta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$





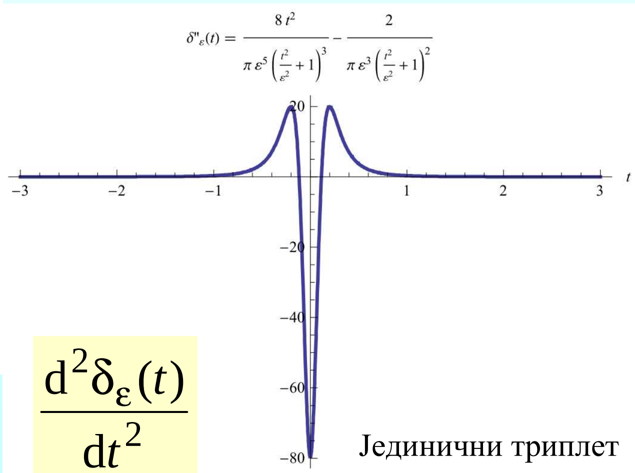
$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon \to 0$$



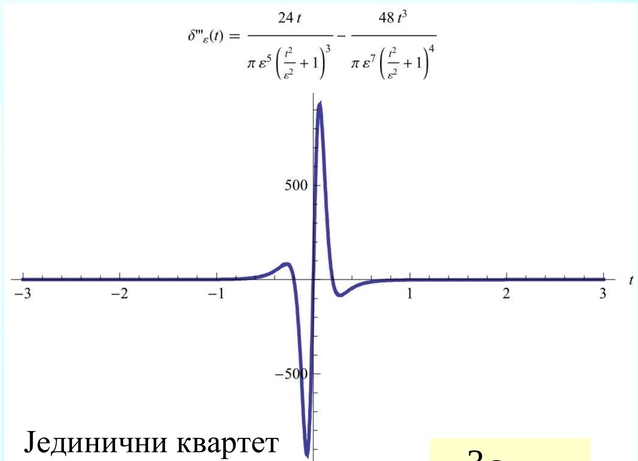
Јединични дублет

$$\frac{\mathrm{d}\delta_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$



Јединични триплет

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2}$$



Јединични квартет

$$\frac{\mathrm{d}^3\delta_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^3}$$

Својства извода делта-функције

$$t\,\delta(t) = 0$$

$$t\,\delta'(t) = -\delta(t)$$

$$t^2\,\delta''(t) = 2\delta(t)$$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

$$\delta'(t-\tau) = -\delta'(\tau - t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\delta'(\tau - t)\mathrm{d}\tau = -\phi'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\delta''(\tau - t)\mathrm{d}\tau = \phi''(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\delta^{(n)}(\tau - t)\mathrm{d}\tau = (-1)^n \phi^{(n)}(t)$$

$$\mathrm{LT}^{-1}(A_0 + A_1\underline{s} + A_2\underline{s}^2 + \cdots + A_n\underline{s}^n)$$
$$= A_0\delta(t) + A_1\delta'(t) + A_2\delta''(t) + \cdots + A_n\delta^{(n)}(t)$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = const$

Ако радимо само са каузалним функцијама, онда је доња граница интеграла **0** а горња граница је ***t***.

t-домен, *s*-домен

- ***t*-домен** је област дефинисаности оригинала $u(t)$ (тренутне вредности), $t > 0$.
- **$\underline{s}$-домен** је област дефинисаности слике $\underline{U}(\underline{s})$ (Лапласовог трансформата).
- Тумачењем Лапласове променљиве, $\underline{s}$, као **комплексне фреквенције**, каже се да Лапласовом трансформацијом функцију $u(t)$ из временског домена **пресликавамо** у комплексан домен, комплексне фреквенције, у функцију $\underline{U}(\underline{s})$.
- Лапласова трансформација се уопштава и **проширује** тако да обухвата неке класе **генералисаних** функција као што су Диракова делта-функције и њени изводи.

Gerrit van Dijk, Distribution Theory: Convolution, Fourier Transform, and Laplace Transform, *Walter de Gruyter*, 2013.

G. Krabbe, "Ratios of Laplace Transforms, Mikusinski Operational Calculus“, *Math. Annalen*, vol. 162, 1966, pp. 237-245.

Основни парови LT

$\delta(t)$	1
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$e^{-a\,t}$	$\dfrac{1}{a+s}$
$\sin(b\,t)$	$\dfrac{b}{b^2+s^2}$
$\cos(b\,t)$	$\dfrac{s}{b^2+s^2}$
$e^{-a\,t}\sin(b\,t)$	$\dfrac{b}{b^2+(a+s)^2}$
$e^{-a\,t}\cos(b\,t)$	$\dfrac{a+s}{b^2+(a+s)^2}$
$e^{-a\,t}\,t$	$\dfrac{1}{(a+s)^2}$
$t\sin(b\,t)$	$\dfrac{2\,b\,s}{(b^2+s^2)^2}$
$t\cos(b\,t)$	$\dfrac{s^2-b^2}{(b^2+s^2)^2}$

Елементарне функције времена у табели, **осим** сабирака који садрже Диракову делта-функцију $\delta(t)$, треба помножити са Хевисајдовом одскочном функцијом $\upsilon(t)$.

Савремена Лапласова трансформација користи резултате теорије генералисаних функција и дистрибуција:

Laurent Schwartz, *Mathematics for the physical sciences*, Addison-Wesley, 1966.
И. М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции*, Выпуск 1, 2, 3, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, СССР, 1959. (постоји превод на енглески)
Laurent Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, France, 1961

Изабрани парови LT (1)

$\dfrac{p+q\,s}{a+s}$	$e^{-a\,t}\,(p-a\,q)+q\,\delta(t)$
$\dfrac{p+q\,s}{(a+s)^2}$	$e^{-a\,t}\,q+e^{-a\,t}\,(p-a\,q)\,t$
$\dfrac{p+q\,s}{(a+s)\,(b+s)}$	$\dfrac{e^{-a\,t}\,(a\,q-p)}{a-b}+\dfrac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{a-b}$
$\dfrac{p+q\,s}{(a+s)^2\,(b+s)}$	$\dfrac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{(a-b)^2}+\dfrac{e^{-a\,t}\,(b\,q-p)}{(a-b)^2}+\dfrac{e^{-a\,t}\,(a\,q-p)\,t}{a-b}$
$\dfrac{p+q\,s}{(a+s)\,(b+s)\,(c+s)}$	$\dfrac{e^{-a\,t}\,(p-a\,q)}{(a-b)\,(a-c)}+\dfrac{e^{-b\,t}\,(b\,q-p)}{(a-b)\,(b-c)}-\dfrac{e^{-c\,t}\,(c\,q-p)}{(a-c)\,(b-c)}$

Елементарне функције времена у табели, **осим** сабирака који садрже Диракову делта-функцију $\delta(t)$, треба помножити са Хевисајдовом одскочном функцијом $\upsilon(t)$.

Изабрани парови LT (2)

$$\frac{p+q\,s}{a^2+s^2} \qquad q\cos(a\,t)+\frac{p\sin(a\,t)}{a}$$

$$\frac{p+q\,s}{(a^2+s^2)^2} \qquad \frac{\left(q\,t\,a^2+p\right)\sin(a\,t)-a\,p\,t\cos(a\,t)}{2\,a^3}$$

$$\frac{p+q\,s}{(b+s)\,(a^2+s^2)} \qquad \frac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{a^2+b^2}+\frac{(b\,q-p)\cos(a\,t)+\frac{\left(q\,a^2+b\,p\right)\sin(a\,t)}{a}}{a^2+b^2}$$

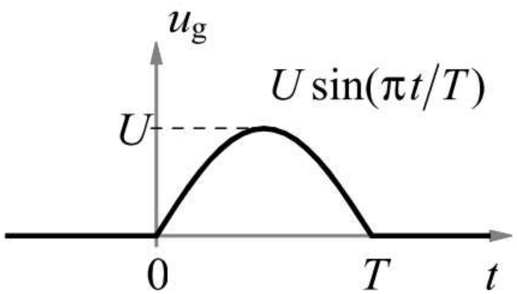
$$\frac{p+q\,s}{(a^2+s^2)\,(b^2+s^2)} \qquad \frac{q\cos(b\,t)+\frac{p\sin(b\,t)}{b}}{a^2-b^2}-\frac{a\,q\cos(a\,t)+p\sin(a\,t)}{a\,(a^2-b^2)}$$

Елементарне функције времена у табели, **осим** сабирака који садрже Диракову делта-функцију δ(t), треба помножити са Хевисајдовом одскочном функцијом υ(*t*).

Лапласова трансформација функција задатих по интервалима

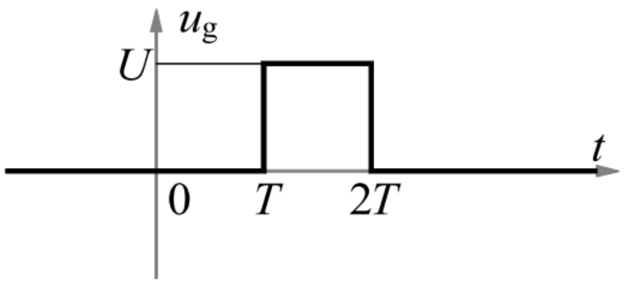
$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

(5) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике?



$$\pi T U \frac{1+\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}{\underline{s}^2 T^2 + \pi^2}$$

(5) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике?



$$U\frac{1}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}T} - U\frac{1}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}2T} = U\frac{1-\mathrm{e}^{-\underline{s}T}}{\underline{s}}\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

Трансформате одређујемо израчунавањем дефиниционог интеграла и/или применом својстава унилатералне Лапласове трансформације.

Инверзна унилатерална Лапласова трансформација

- Радићемо највише са функцијама времена чији су Лапласови трансформати **рационалне** функције по $\underline{s}$.
- Инверзну Лапласову трансформацију ћемо тражити растављањем рационалне функције на **делимичне (парцијалне) разломке**.
- Користићемо својства (теореме) и таблицу парова унилатералне Лапласове трансформације.
- Трансформат ћемо раставити на збир што једноставнијих сабирака чије инверзне трансформације постоје у табелама парова.
- Нећемо користити Бромвичов (Bromwich) интеграл.

$$u(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s})) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} \mathrm{e}^{\underline{s}t}\, \underline{U}(\underline{s})\, \mathrm{d}\underline{s}$$

$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$

$u(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}))$

Довољни услови постојања инверзне унилатералне LT

$u(t) \leftrightarrow \underline{U}(\underline{s})$

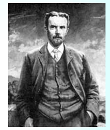
Теорема. Функција $\underline{U}(\underline{s})$ је унилатерална Лапласова трансформација неке функције $u(t)$ ако је било који од следећих услова задовољен:

1. Ако постоји број c такав да је $\underline{U}(\underline{s})$ регуларна за $\mathrm{Re}(\underline{s}) > c$ и
$$\lim_{|\omega| \to \infty} |\omega| |\underline{U}(\sigma + \mathrm{j}\omega)| = 0\,, \quad \sigma > c$$

2. Ако је $\underline{U}(\underline{s})$ рационална функција по $\underline{s}$ и степен полинома у имениоцу је већи од степена полинома у бројитељу

3. Ако је $\underline{F}(\underline{s})$ унилатерална Лапласова трансформација неке функције и
$$\underline{U}(\underline{s}) = \underline{F}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{-\underline{s}T}\,, \quad T \geq 0$$

4. Ако је $\underline{U}(\underline{s}) = \underline{F}(\underline{s})\underline{G}(\underline{s})$, где су $\underline{F}(\underline{s})$ и $\underline{G}(\underline{s})$ унилатералне Лапласове трансформације функција времена $f(t)$ и $g(t)$, респективно; $f(t)$ и $g(t)$ су скоро део-по-део-непрекидне, $f(t)$ има конвергентан унилатералан Лапласов интеграл, и $g(t)$ је експоненцијалног реда.



Хевисајдов поступак

Посматрајмо трансформат који је права рационална функција, количник полинома $\underline{U}(\underline{s})=\dfrac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}$ код кога је степен полинома у бројитељу мањи од степена полинома у именитељу. Нека функција има различите полове, нуле полинома у именитељу, $\underline{s}_1,\underline{s}_2,\dots,\underline{s}_k,\dots,\underline{s}_r$, што значи да је $\underline{Q}(\underline{s}_k)=0$ и $\underline{s}_k\neq\underline{s}_l$ за $k\neq l$, $(k,l=1,2,\dots,r)$.

Трансформат се може раставити на делимичне (парцијалне) разломке, $\underline{A}_k=const$

$$\underline{U}(\underline{s})=\frac{\underline{A}_1}{\underline{s}-\underline{s}_1}+\frac{\underline{A}_2}{\underline{s}-\underline{s}_2}+\cdots+\frac{\underline{A}_k}{\underline{s}-\underline{s}_k}+\cdots+\frac{\underline{A}_r}{\underline{s}-\underline{s}_r}=\sum_{k=1}^{r}\frac{\underline{A}_k}{\underline{s}-\underline{s}_k}$$

Множењем леве и десне стране са линеарним фактором $(\underline{s}-\underline{s}_k)$ добија се

$$(\underline{s}-\underline{s}_k)\underline{U}(\underline{s})=(\underline{s}-\underline{s}_k)\frac{\underline{A}_1}{\underline{s}-\underline{s}_1}+(\underline{s}-\underline{s}_k)\frac{\underline{A}_2}{\underline{s}-\underline{s}_2}+\cdots+\underline{A}_k+\cdots+(\underline{s}-\underline{s}_k)\frac{\underline{A}_r}{\underline{s}-\underline{s}_r}$$

одакле је $\underline{A}_k=\lim\limits_{\underline{s}\to\underline{s}_k}(\underline{s}-\underline{s}_k)\underline{U}(\underline{s})=\lim\limits_{\underline{s}\to\underline{s}_k}(\underline{s}-\underline{s}_k)\dfrac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}=\underline{P}(\underline{s}_k)\lim\limits_{\underline{s}\to\underline{s}_k}\dfrac{\underline{s}-\underline{s}_k}{\underline{Q}(\underline{s})}$.

применом Лопиталовог правила $\underline{A}_k=\dfrac{\underline{P}(\underline{s}_k)}{\underline{Q}'(\underline{s}_k)}$, $\underline{Q}'(\underline{s}_k)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\underline{Q}(\underline{s})}{\mathrm{d}\underline{s}}\right|_{\underline{s}=\underline{s}_k}$.

Оригинал је $u(t)=\mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}))=\mathrm{LT}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{r}\dfrac{\underline{A}_k}{\underline{s}-\underline{s}_k}\right)=\sum_{k=1}^{r}\mathrm{LT}^{-1}\left(\dfrac{\underline{A}_k}{\underline{s}-\underline{s}_k}\right)=\sum_{k=1}^{r}\underline{A}_k\,\mathrm{LT}^{-1}\left(\dfrac{1}{\underline{s}-\underline{s}_k}\right)$,

$$u(t)=\sum_{k=1}^{r}\frac{\underline{P}(\underline{s}_k)}{\underline{Q}'(\underline{s}_k)}\mathrm{e}^{\underline{s}_k t}\ .$$

Претпоставља се да полиноми **немају** заједничке линеарне факторе, односно да **не** постоји $\underline{z}$ тако да је $\underline{P}(\underline{z})=\underline{Q}(\underline{z})=0$.

$$u(t)=\sum_{k=1}^{r}\frac{\underline{P}(\underline{s}_k)}{\underline{Q}'(\underline{s}_k)}\mathrm{e}^{\underline{s}_k t}$$

```
HevisajdovPostupak[P_, Q_, s_Symbol, p_List, t_Symbol] :=
 Module[{}, Plus @@ (P/D[Q, s] e^(s t) /. s → p)]
```

Хевисајдов поступак за вишеструке полове

$$u(t)=\sum_{k=1}^{r}\mathrm{e}^{\underline{s}_k t}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{t^{m_k-l}}{(m_k-l)!}\lim_{\underline{s}\to\underline{s}_k}\frac{1}{(l-1)!}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}\underline{s}^{l-1}}(\underline{s}-\underline{s}_k)^{m_k}\underline{U}(\underline{s})$$

Различити полови су $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$, …, $\underline{s}_k$,…, $\underline{s}_r$, а њихове вишеструкости су m_1, m_2, …, m_k,…, m_r, респективно. Број различитих полова је r.

Почетни тренутак у LT

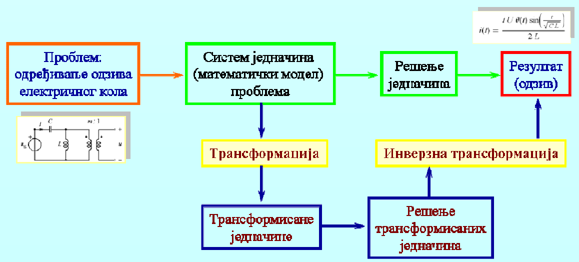
$t_0 = 0$

t_0^-

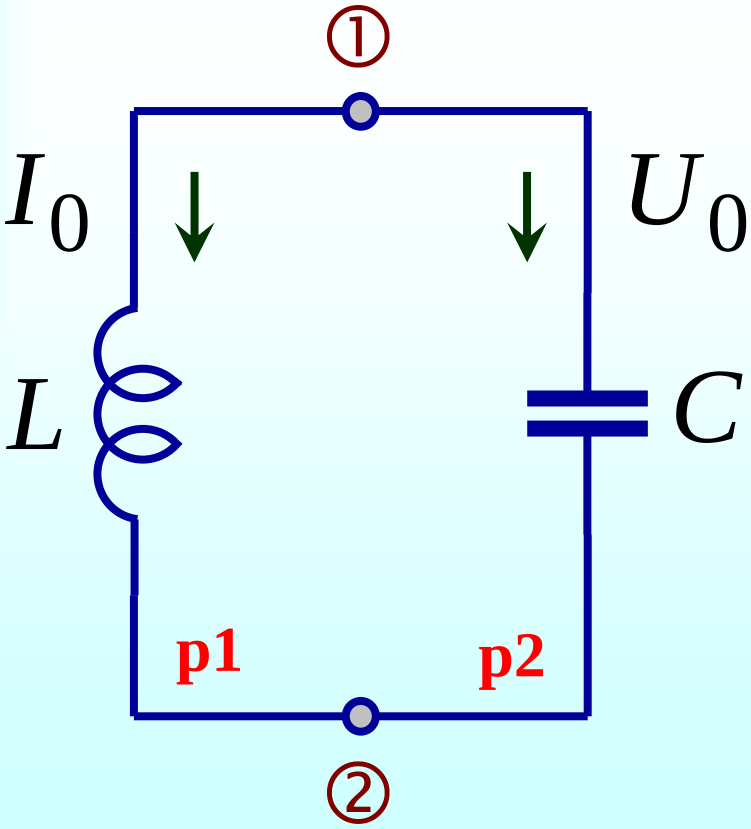
- Почетни тренутак електричног кола које решавамо унилатералном Лапласовом трансформацијом је **нула**.
- Природне почетне услове (почетне напоне кондензатора и почетне струје калемова) електричног кола, које решавамо унилатералном Лапласовом трансформацијом, задајемо у тренутку **нула-минус**.
- Ако је потребно анализирати ел. коло са почетним тренутком $\boldsymbol{t_0 > 0}$, онда се може увести смена $\boldsymbol{t = \tau + t_0}$, и нова промењљива времена $\boldsymbol{\tau}$, којом се транслира временска оса тако да нови почетни тренутак кола буде $\boldsymbol{\tau_0 = 0}$. Одређује се одзив по $\boldsymbol{\tau}$, па се у њему уведе смена $\boldsymbol{\tau = t - t_0}$.
- Сматрамо да су побуде каузалне, једнаке нули за $t < 0$.

Одређивање одзива

- Обележе се чворови, приступи, напони и струје приступа: усвоје се упоредни смерови и постави се **систем једначина кола**.
- Почетни тренутак је **нула**, а природни почетни услови се задају у тренутку нула-минус.
- **Трансформација** (директна унилатерална Лапласова трансформација) се примени на леву и десну страну сваке једначине.
- Одреди се **комплексан одзив**, Лапласов трансформат.
- Одреди се **одзив** (тренутна вредност) из комплексног одзива инверзном унилатералном Лапласовом трансформацијом.



Пример решавања кола LT



$$\left.\begin{aligned} & i_1 + i_2 = 0 \\ & u_1 - u_2 = 0 \\ & u_1 = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ & i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\}$$

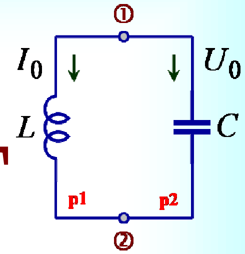
$$t_0 = 0$$

$$i_1(t_0^-) = I_0$$

$$u_2(t_0^-) = U_0$$

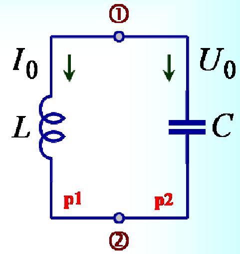
Коло решавамо за $t > 0$ са почетним условима у тренутку нула-минус.

Примена једнозначности LT



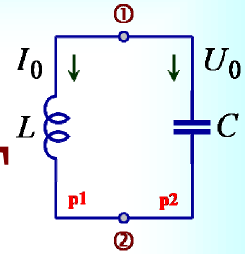
$$\left.\begin{aligned} & i_1 + i_2 = 0 \\ & u_1 - u_2 = 0 \\ & u_1 = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ & i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\xrightarrow{\mathrm{LT}}} \quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{LT}(i_1 + i_2) = 0 \\ & \mathrm{LT}(u_1 - u_2) = 0 \\ & \mathrm{LT}(u_1) = \mathrm{LT}(L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}) \\ & \mathrm{LT}(i_2) = \mathrm{LT}(C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}) \end{aligned}\right.$$

Примена линеарности LT



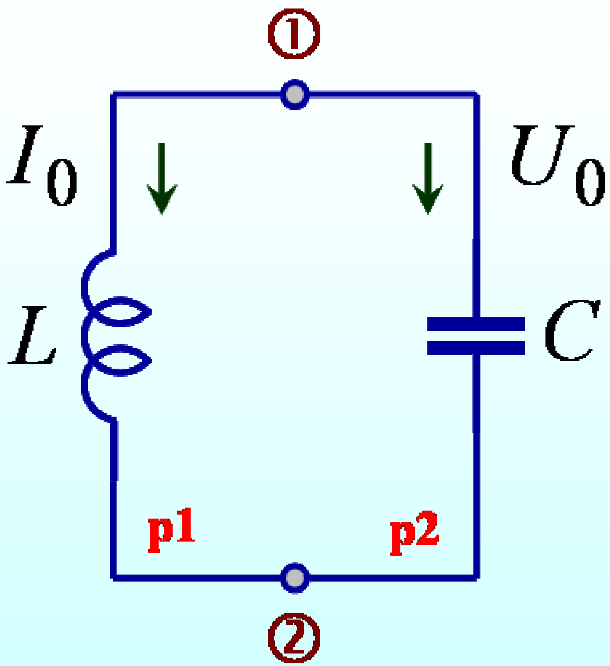
$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{LT}(i_1+i_2)=0\\&\mathrm{LT}(u_1-u_2)=0\\&\mathrm{LT}(u_1)=\mathrm{LT}(L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t})\\&\mathrm{LT}(i_2)=\mathrm{LT}(C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t})\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&\mathrm{LT}(i_1)+\mathrm{LT}(i_2)=0\\&\mathrm{LT}(u_1)-\mathrm{LT}(u_2)=0\\&\mathrm{LT}(u_1)=L\,\mathrm{LT}(\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t})\\&\mathrm{LT}(i_2)=C\,\mathrm{LT}(\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t})\end{aligned}\right\}$$

Примена својства извода LT



$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{LT}(i_1)+\mathrm{LT}(i_2)=0 \\[2ex]
\mathrm{LT}(u_1)-\mathrm{LT}(u_2)=0 \\[2ex]
\mathrm{LT}(u_1)=L\,\mathrm{LT}(\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}) \\[2ex]
\mathrm{LT}(i_2)=C\,\mathrm{LT}(\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t})
\end{array}\right\}
\left.\begin{array}{l}
\underline{I}_1(\underline{s})+\underline{I}_2(\underline{s})=0 \\[2ex]
\underline{U}_1(\underline{s})-\underline{U}_2(\underline{s})=0 \\[2ex]
\underline{U}_1(\underline{s})=L(\underline{s}\,\underline{I}_1(\underline{s})-I_0) \\[2ex]
\underline{I}_2(\underline{s})=C(\underline{s}\,\underline{U}_2(\underline{s})-U_0)
\end{array}\right\}$$

Комплексан одзив LT



$$\underline{I}_1(\underline{s}) = \frac{C\,(I_0\,L\,\underline{s}+U_0)}{C\,L\,\underline{s}^2+1}$$

$$\underline{I}_2(\underline{s}) = -\frac{C\,(I_0\,L\,\underline{s}+U_0)}{C\,L\,\underline{s}^2+1}$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) = \frac{C\,L\,\underline{s}\,U_0-I_0\,L}{C\,L\,\underline{s}^2+1}$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = \frac{C\,L\,\underline{s}\,U_0-I_0\,L}{C\,L\,\underline{s}^2+1}$$

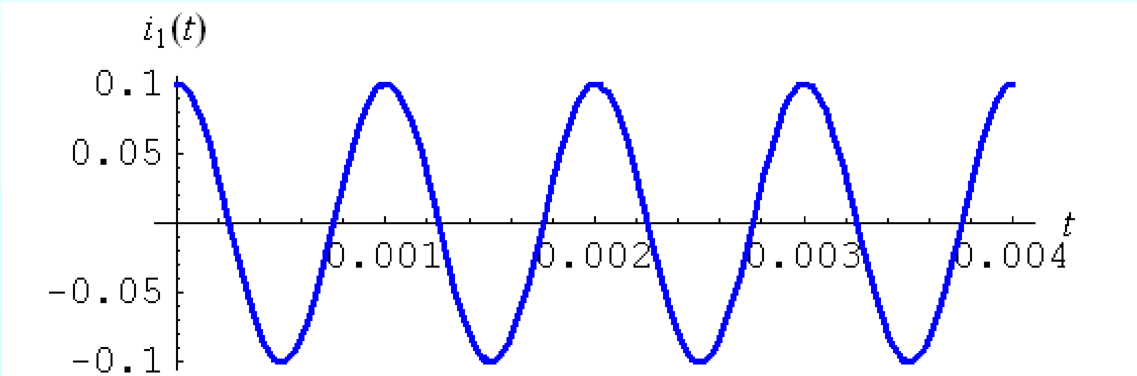
Ово електрично коло је основни модел идеалног **резонатора**, без губитака, у коме се почетном енергијом побуђују **простопериодичне** осцилације.

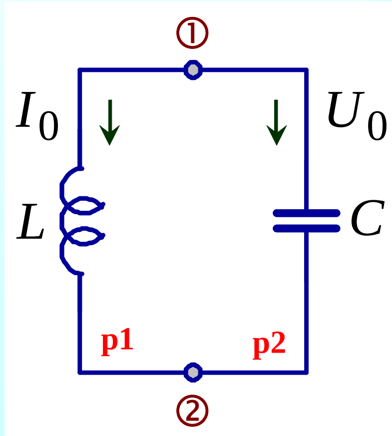
Одзив: струја калема

$$i_1(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{I}_1(\underline{s}))$$

$t > 0$

$$i_1(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\sin\!\left(\frac{t}{\sqrt{C\,L}}\right) U_0 + \cos\!\left(\frac{t}{\sqrt{C\,L}}\right) I_0$$





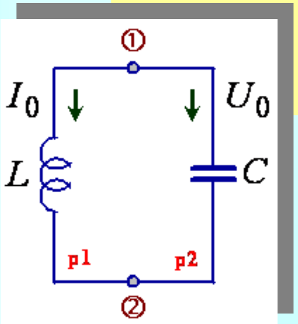
Одзив, струја калема, је променљива стања. Ред кола је једнак броју динамичких елемената па су променљиве стања непрекидне функције времена у почетном тренутку. Сходно томе, можемо за домен одзива писати $t \geq 0$.

Појединости одређивања одзива

$$i_1(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{I}_1(\underline{s})) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{C(L\underline{s}\,I_0 + U_0)}{CL\underline{s}^2 + 1}\right)$$

$$i_1(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{CL\underline{s}\,I_0}{CL\underline{s}^2 + 1} + \frac{CU_0}{CL\underline{s}^2 + 1}\right) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{CL\underline{s}\,I_0}{CL\underline{s}^2 + 1}\right) + \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{CU_0}{CL\underline{s}^2 + 1}\right)$$

$$i_1(t) = I_0\,\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{\underline{s}}{\underline{s}^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\right)^2}\right) + U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\,\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{CL}}}{\underline{s}^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\right)^2}\right)$$



$$i_1(t) = I_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right) + U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)$$

$$t \geq 0$$

Колики је напон кондензатора?

wxMaxima 16.04.2 [LC Resonator.wxmx]

File Edit View Cell Maxima Equations Algebra Calculus Simplify Plot Numeric Help

```
(%i1)   load("C:\\SALECx\\SALECx.mac") $
Dejan Tosic, SALECx 2019 v1.0
Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima

(%i2)   Resonator_Shema: [
         ["L", "L", 1, 0, L, Io],
         ["C", "C", 1, 0, C, Uo]
        ] $

(%i3)   Resonator_Response: SALECx(Resonator_Shema);
```

(Resonator_Response) $\left[V_1 = \frac{C\,L\,Uo\,s - Io\,L}{C\,L\,s^2+1}\right]$

```
(%i4)   UCs: V[1], Resonator_Response;
```

(UCs) $\frac{C\,L\,Uo\,s - Io\,L}{C\,L\,s^2+1}$

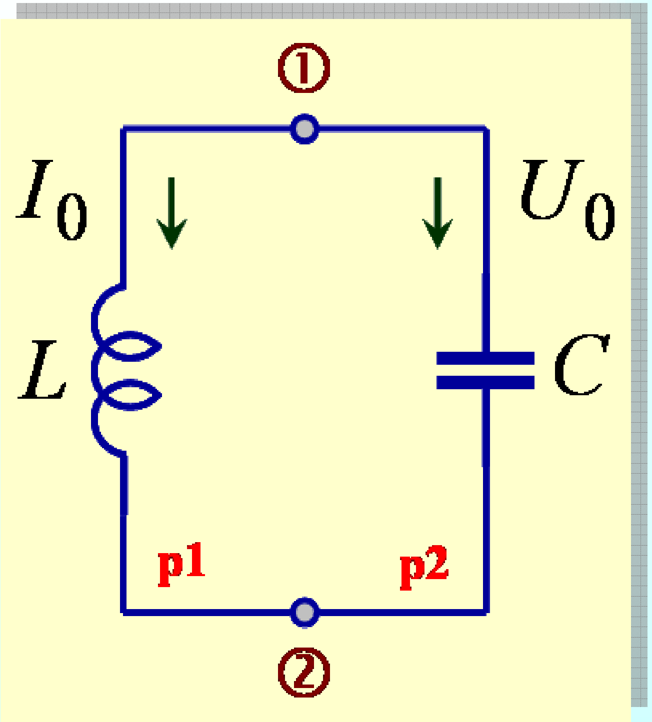
```
(%i5)   assume(C>0, L>0);
```

(%o5) $[C>0, L>0]$

```
(%i6)   uCt: ilt(UCs,s,t), expand;
```

(uCt) $Uo\cos\left(\frac{t}{\sqrt{C}\sqrt{L}}\right) - \frac{Io\sqrt{L}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{C}\sqrt{L}}\right)}{\sqrt{C}}$

Welcome to wxMaxima   Saving successful.



Комплексне једначине елемената

- Отпорник: $\underline{U}(\underline{s}) = R\,\underline{I}(\underline{s})$
- Кондензатор: $\underline{I}(\underline{s}) = C\,(\underline{s}\,\underline{U}(\underline{s}) - U_0)$
- Калем: $\underline{U}(\underline{s}) = L\,(\underline{s}\,\underline{I}(\underline{s}) - I_0)$
- Операциони појачавач: $\underline{U}_1(\underline{s}) = 0$, $\underline{I}_1(\underline{s}) = 0$
- VCVS: $\underline{U}_2(\underline{s}) = a\,\underline{U}_1(\underline{s})$, $\underline{I}_1(\underline{s}) = 0$
- VCCS: $\underline{I}_2(\underline{s}) = g\,\underline{U}_1(\underline{s})$, $\underline{I}_1(\underline{s}) = 0$
- CCVS: $\underline{U}_2(\underline{s}) = r\,\underline{I}_1(\underline{s})$, $\underline{U}_1(\underline{s}) = 0$
- CCCS: $\underline{I}_2(\underline{s}) = a\,\underline{I}_1(\underline{s})$, $\underline{U}_1(\underline{s}) = 0$
- Идеалан трансформатор:
- $\underline{U}_1(\underline{s}) = m\,\underline{U}_2(\underline{s})$, $\underline{I}_1(\underline{s}) = -\underline{I}_2(\underline{s})/\mathrm{m}$
- Линеаран индуктиван трансформатор:
- $\underline{U}_1(\underline{s}) = L_1\,(\underline{s}\,\underline{I}_1(\underline{s}) - I_{01}) + L_{12}\,(\underline{s}\,\underline{I}_2(\underline{s}) - I_{02})$,
- $\underline{U}_2(\underline{s}) = L_{21}\,(\underline{s}\,\underline{I}_1(\underline{s}) - I_{01}) + L_2\,(\underline{s}\,\underline{I}_2(\underline{s}) - I_{02})$

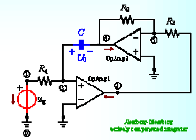
Комплексне једначине по **Кирхофовим законима** се добијају из једначина Кирхофових закона написаних у временском домену тако што се симболи напона и струја замене симболима комплексних напона и струја.

Комплексне једначине **резистивног елемента** се добијају тако што се у дефиниционим једначинама елемента симболи напона и струја замене симболима комплексних напона и струја.

Комплексне побуде су Лапласови трансформати побуда, односно трансформати функција времена које дефинишу напоне напонских и струје струјних извора.

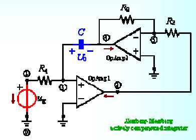
Теореме и поступци важе

- Тевененова теорема, Нортон-Мајерова теорема, Принцип суперпозиције, Својства одзива (линеарност) и друге теореме остају у важности и у области унилатералне Лапласове трансформације.
- Поступци одређивања улазне функције су слични поступку одређивања улазне отпорности.
- Решавање електричног кола уопштеним поступком напона чворова (Modified Nodal Analysis, MNA) остаје у важности.



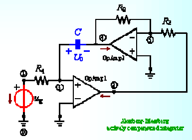
MNA, LT

- Решавање електричног кола уопштеним поступком напона чворова (МНА, ***Modified Nodal Analysis***, **MNA**) у области унилатералне Лапласове трансформације (LT) је важан метод у теорији електричних кола и може се описати низом алгоритамских корака.
- МНА се темељи на чворовима и једначинама елемената, без потребе да одређујемо контуре и постављамо једначине Кирхофовог закона за напоне.
- Чворове електричног кола непосредно уочавамо у задатој шеми, нумеришемо узастопним природним бројевима почев од један, или узастопним целим бројевима почев од нуле ако уочавамо упоредни чвор (референтни чвор, нулти чвор, уземљење, масу, шасију, кућиште, …).
- Поступак је подесан и за ручно решавање, помоћу папира и оловке, као и за машинско аутоматизовано решавање, помоћу рачунара и наменског софтвера.
- Велики број савремених софтверских алата за симулацију електричних кола користи МНА.



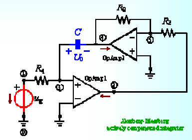
MNA, LT: Корак 1

- Упоредни чвор обележити нулом. Обележити остале чворове узастопним природним бројевима почев од један.
- Усвојити смерове струја приступа које се не могу изразити преко једначина елемената и напона чворова.
- Напон чвора (потенцијал чвора) је напон између чвора обележеног са 1, 2, 3,…, и упоредног чвора обележеног са 0.



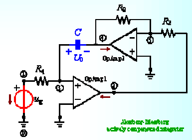
MNA, LT: Корак 2

- Испитати да ли је граф електричног кола повезан. Нацртати граф.
- Ако граф електричног кола јесте повезан, наставити са решавањем применом МНА.
- Ако граф електричног кола није повезан, онда уочити неповезане делове (дисконектоване компоненте), у сваком делу изабрати један чвор, и спојити изабране чворове. Напони и струје приступа се не мењају оваквим преобликовањем (трансфигурацијом) електричног кола.



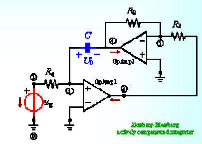
MNA, LT: Корак 3

- Напоне чворова (потенцијале чворова) обележити са v_k, (k = 1, 2, 3, …).
- Написати једначине Кирхофовог закона за струје (КЗС) за све чворове осим упоредног (нултог).
- Струје приступа, ако је могуће, изразити преко напона (потенцијала) чворова и једначина елемената.
- Ако струја приступа елемента не може да се изрази преко напона чворова, онда она остаје као променљива у систему једначина МНА и **додаје се једначина елемента** (карактеристика елемента, конститутивна једначина елемента, дефинициона једначина елемента).



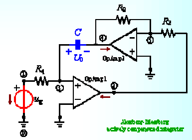
MNA, LT: посебности

- Улазна струја операционог појачавача је једнака нули, не уводимо посебан симбол за њу, и ту вредност непосредно укључујемо у једначине КЗС.
- Струја напонског извора не може да се изрази преко напона чворова, остаје као променљива у систему једначина МНА, и додаје се једначина напонског извора.
- Излазна струја операционог појачавача не може да се изрази преко напона чворова, остаје као променљива у систему једначина МНА, и додаје се једначина операционог појачавача.
- Постоје и други елементи чија струја не може да се изрази преко напона приступа.



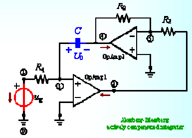
MNA, LT: промењљиве

- Систем једначина MHA у области унилатералне Лапласове трансформације (LT) је скуп линеарних нехомогених једначина по комплексним напонима и струјама. Коефицијенти су реални полиноми по ***s***.
- Промењљиве система једначина MHA су напони чворова и струје приступа елемената које не могу да се изразе преко напона чворова.
- Нехомогени део система једначина MHA је функција комплексних побуда, параметара елемената, и комплексне учестаности ***s***.



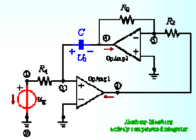
MNA, LT: Корак 4

- Решити систем једначина МНА.
- Ако се траже само напони, а не траже се струје, испитати да ли се свака од струја појављује као једина струја само у по једној једначини КЗС и изоставити такве једначине.
- Прурeдити решење, евентуално, на подесан облик.



MNA, LT: Корак 5

- Из одређеног комплексног одзива, по потреби, одредити функцију електричног кола, на пимер трансфер функцију.
- Из одређеног комплексног одзива, по потреби, препознати комплексан одзив на побуду или комплексан одзив на почетне услове.



MNA, LT: Корак 6

- Одредити одзив, тренутну вредност, инверзном унилатералном Лапласовом трансформацијом.
- Користити таблице парова LT или применити својства (теореме) LT.
- Користити растављање одзива на делимичне разломке.
- Користити Хевисајдов поступак.
- Користити софтверски алат, као што је *Mathematica* или Wolfram Alpha.

Област дефинисаности одзива на почетне услове (zero-input response)

- Одзив на почетне услове **није познат за t < 0**, не познајемо предисторију кола, не знамо како су настали почетни услови.
- Ако је ред кола **једнак** броју динамичких елемената, онда су променљиве стања **непрекидне** у почетном тренутку и за њих пишемо $t \geq 0$ (конзистентни почетни услови, регуларна комутација). У противном, одзив може бити прекидан у $t = 0$ (инконзистентни почетни услови, нерегуларна комутација).
- Одзив на почетне услове **не садржи генералисане функције** Дираковy делта-функцију и Хевисајдову тета-функцију.

Лапласовом трансформацијом коло решавамо за $t > 0$ са почетним условима у тренутку нула-минус.

Област дефинисаности одзива на побуду (zero-state response)

- Одзив на побуду **јесте познат у сваком тренутку времена** $-\infty < t < \infty$.
- Одзив на побуду јесте једнак **нули** за $t < 0$ зато што посматрамо каузална ел. кола са каузалним побудама чији одзив не може да почне пре појаве побуде.
- Сваки сабирак одзива на побуду **садржи генералисану функцију као множилац**: Дираковy делта-функцију $\delta(t)$ или Хевисајдову тета-функцију $\upsilon(t)$.
- Одзив на побуду је дефинисан у сваком тренутку времена, $-\infty < t < \infty$, и може бити прекидан у почетном тренутку кола или неким другим тренуцима времена.

Област дефинисаности потпуног одзива

- Потпун одзив **није познат за $t < 0$**, у општем случају, не познајемо предисторију кола, не знамо како су настали почетни услови.
- Ако је ред кола **једнак** броју динамичких елемената, онда су променљиве стања **непрекидне** у почетном тренутку (конзистентни почетни услови, регуларна комутација). У противном, потпун одзив може бити прекидан за $t = 0$ (инконзистентни почетни услови, нерегуларна комутација), као и у неким другим тренуцима времена. Његов домен је $t \geq 0$.
- Потпун одзив **садржи генералисане функције** Диракову делта-функцију и Хевисајдову тета-функцију само у сабирцима који чине одзив на побуду.

Лапласовом трансформацијом коло решавамо за $t > 0$ са почетним условима у тренутку нула-минус.

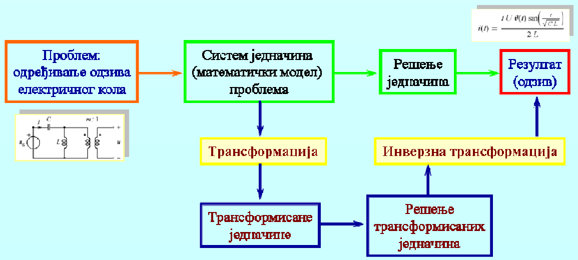
Обавезно наведите област дефинисаности одзива

- Без обзира на поступак који користите за одређивање одзива електричног кола (решавање диференцијалне једначине, конволуциони интеграл, унилатерална Лапласова трансформација, примена својства линеарности), наведите **обавезно** област дефинисаности (домен) одзива по времену.
- Одзив на побуду је увек дефинисан за **сваки** реалан тренутак времена.
- Одзив на почетну енергију **није** познат за $t < 0$.
- Испитајте да ли је ред кола **једнак** броју динамичких елемената за прецизирање непрекидности одзива на почетну енергију и потпуног одзива.

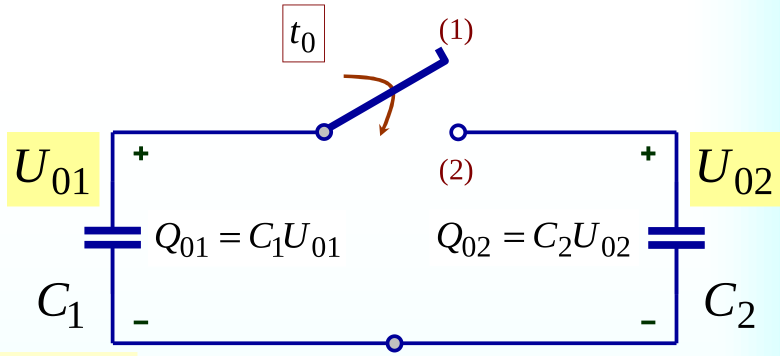
Лапласовом трансформацијом коло решавамо за $t > 0$ са почетним условима у тренутку нула-минус.

Корист и добит у примени

- Не решава се систем алгебарско-диференцијалних једначина већ систем **алгебарских** једначина.
- Довољни су **природни почетни услови** и **нема прерачунавања почетних услова** у нула-плус и одређивања изведених почетних услова.
- Неконзистентност почетних услова (нерегуларна комутација) се узима у обзир аутоматски.
- Подесно за одређивање **импулсног одзива**, на пример, код примене конволуционог интеграла.
- Подесно за одређивање одскочног одзива.
- Подесно за одређивање одзива на почетну енергију (одзива на почетне услове, одзива на акумулисану енергију).
- Добија се потпун одзив (комплетан одзив).



Колики је напон после затварања прекидача?



$$t > t_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} i_1 + i_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \\ i_1 = C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \\ i_2 = C_2 \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \end{array}\right\}$$

$$u_1(t_0^-) = U_{01}$$

$$u_2(t_0^-) = U_{02}$$

$$\underline{I}_1(\underline{s}) + \underline{I}_2(\underline{s}) = 0$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) - \underline{U}_2(\underline{s}) = 0$$

$$\underline{I}_1(\underline{s}) = C_1(\underline{s}\,\underline{U}_1(\underline{s}) - U_{01})$$

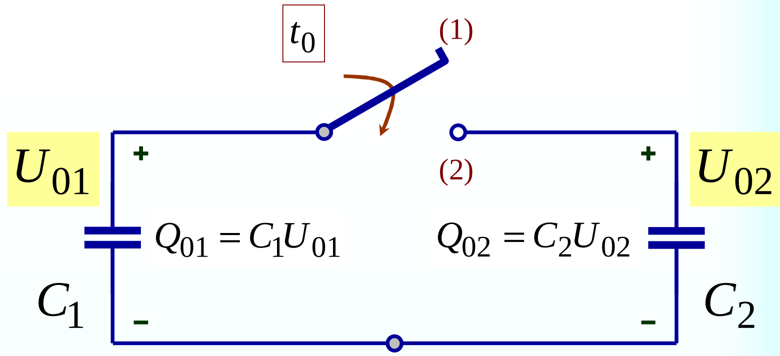
$$\underline{I}_2(\underline{s}) = C_2(\underline{s}\,\underline{U}_2(\underline{s}) - U_{02})$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) = \frac{C_1 U_{01} + C_2 U_{02}}{(C_1 + C_2)\underline{s}}$$

$$u_1(t) = \mathrm{LT}^{-1}\,\underline{U}_1(\underline{s}) = \frac{C_1 U_{01} + C_2 U_{02}}{C_1 + C_2}$$

Нема прерачунавања почетних услова, коришћења теореме о заменским изворима почетних услова, и решавања диференцијалне једначине.

Колики је струја после затварања прекидача?



$$\underline{I}_1(\underline{s}) + \underline{I}_2(\underline{s}) = 0$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) - \underline{U}_2(\underline{s}) = 0$$

$$\underline{I}_1(\underline{s}) = C_1(\underline{s}\,\underline{U}_1(\underline{s}) - U_{01})$$

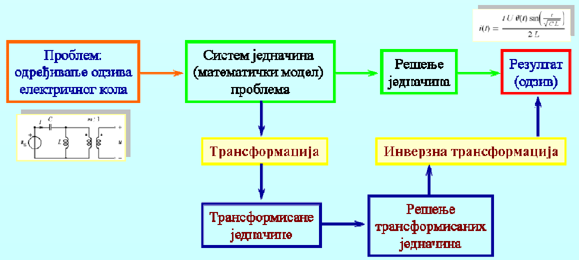
$$\underline{I}_2(\underline{s}) = C_2(\underline{s}\,\underline{U}_2(\underline{s}) - U_{02})$$

$$i_1(t) = \mathrm{LT}^{-1}\,\underline{I}_1(\underline{s}) = C_1 C_2 \frac{U_{02} - U_{01}}{C_1 + C_2}\,\delta(t)$$

Нема прерачунавања почетних услова, коришћења теореме о заменским изворима почетних услова, и решавања диференцијалне једначине.

Тешкоће и препреке у примени

- Непостојање трансформата неких класа побуде.
- Непостојање инверзне трансформације неких класа одзива.
- Сложеност налажења инверзне. трансформације
- Смањена делотворност и учинковитост у случају побуда ограниченог трајања и побуда које су дефинисане са више аналитичких израза по интервалима времена.



Питања и недоумице

Зашто се трансформација зове једнострана или унилатерална?

Зато што је доња граница 0^- а не $-\infty$.

Зашто је доња граница 0^- а не 0^+ или 0?

Зато што узимамо у обзир ефекте тренутног преноса енергије, а тиме и Диракове делта-импулсе, у координатном почетку. Узимањем доње границе као 0^+ би изоставило ове ефекте, док је граница 0 непрецизна.

Шта је са функцијама које су различите од нуле за $t < 0$?

У одређивању потпуног одзива електричног кола (1) предисторија електричног кола је пресликана у природне почетне услове у тренутку 0^-, (2) радимо са каузалним побудама, (3) нула је универзални почетни тренутак, и (4) одзив одређујемо за тренутке времена после почетног, за $t > 0$. Од интереса је интервал времена $[0,+\infty)$.

Да ли сваки каузалан напон/струја има Лапласову трансформацију?

Не. На пример, $u(t) = \mathrm{e}^{t^2}\,\vartheta(t)$ нема Лапласову трансформацију јер има раст, по модулу, бржи од $K\,\mathrm{e}^{ct}$, а тада Лапласов интеграл дивергира.

Да ли Лапласова трансформација важи само у својој области конвергенције?

Не. У теорији функција комплексне променљиве постоји метод аналитичког продужења који дозвољава да једнозначно и аналитички (глатко) проширимо трансформацију на целу комплексну раван. Сходно томе, област конвергенције се некада не помиње у таблицама парова унилатералне Лапласове трансформације.

$$\mathrm{LT}(u(t-T)) = \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

Важна својства

Унилатералне Лапласове трансформације

$$\mathrm{LT}\left(\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \underline{U}(\underline{s})\,\underline{G}(\underline{s})$$

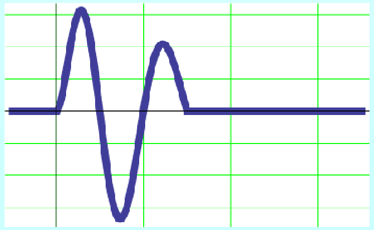
Најопштија својства

Теорема. Ако је $u(t)$ реална функција реалне променљиве t и ако је $\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$ једнозначна, онда је $\underline{U}(\underline{s})$ функција комплексне променљиве $\underline{s}$ са реалним коефицијентима.

Елементи електричних кола и Кирхофови закони су описани једначинама са реалним коефицијентима, тако да ће и напони и струје у електричном колу бити, по својој природи, описани реалним функцијама времена са реалним коефицијентима.

Теорема. Ако је $u(t)$ скоро део-по-део непрекидна и има Лапласов интеграл који конвергира за $\underline{s}_0$, и $\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$, онда је $\lim\limits_{|\underline{s}|\to\infty} \underline{U}(\underline{s}) = 0$.

Теорема. Ако је $u(t)$ скоро део-по-део непрекидна и идентички једнак нули за $t > T > 0$, онда је $\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$ цела функција (нема сингуларитета као што су полови).



Диференцирање у $\underline{s}$-домену

Теорема. Ако је $\underline{U}(\underline{s})$ унилатерална Лапласова трансформација скоро део-по-део непрекидне функције $u(t)$, онда је у свим регуларним тачкама $\underline{U}(\underline{s})$ њен n ти извод

$$\frac{\mathrm{d}^n \underline{U}(\underline{s})}{\mathrm{d}\underline{s}^n} = \mathrm{LT}((-t)^n u(t)),\ \mathrm{Re}(\underline{s}) > c\,.$$

Применом ове теореме можемо из основних парова, на пример $\mathrm{LT}(\vartheta(t)) = \frac{1}{\underline{s}}$, генерисати друге

парове, $\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{\underline{s}})}{\mathrm{d}\underline{s}} = \mathrm{LT}(-t\,\vartheta(t))$, $\frac{-1}{\underline{s}^2} = \mathrm{LT}(-t\,\vartheta(t))$, $\mathrm{LT}(t\,\vartheta(t)) = \frac{1}{\underline{s}^2}$.

Дефиниција. Ако функција има извод у некој тачки $\underline{s}_0$ у $\underline{s}$ -равни, и ако можемо нацртати мали круг око те тачке такав да извод постоји у свим тачкама круга (у околини $\underline{s}_0$) онда је функција регуларна у $\underline{s}_0$ и каже се да је $\underline{s}_0$ регуларна тачка. Тачка у којој функција није регуларна је сингуларна тачка или, краће, сингуларитет.

$$\mathrm{LT}(t^n u(t)) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n \underline{U}(\underline{s})}{\mathrm{d}\underline{s}^n}$$

Померај аргумента (транслација)

$$\mathrm{LT}(u(t-T)) = \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{-\underline{s}T}$$

$$a, T = const$$

$$\mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}+a)) = u(t)\,\mathrm{e}^{-at}$$

$$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$$

$$u(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}))$$

Користити ово својство за делотворније и учинковитије налажење директне или инверзне унилатералне Лапласове трансформације, на пример, када су побуде описане са више аналитичких израза по интервалима времена. Такође, ово својство се може користити у анализи електричних кола са **идеалним водовима**.

Диференцирање у *t*-домену

Теорема. Нека су $u(t)$ и њени изводи до реда $n-1$ непрекидни за $t>0$, са граничним вредностима које постоје у $t=0$, и експоненцијалног реда. Тада је унилатерална Лапласова трансформација $u^{(n)}(t)$

$$\mathrm{LT}(u'(t)) = \underline{s}\,\underline{U}(\underline{s}) - u(0^-)$$

$$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$$

$$u(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}))$$

$$\mathrm{LT}(u''(t)) = \underline{s}^2\,\underline{U}(\underline{s}) - u(0^-)\,\underline{s} - u'(0^-)$$

$$\mathrm{LT}(u^{(n)}(t)) = \underline{s}^n\,\underline{U}(\underline{s}) - u(0^-)\,\underline{s}^{n-1} - u'(0^-)\,\underline{s}^{n-2} - \cdots$$
$$-u^{(n-2)}(0^-)\,\underline{s} - u^{(n-1)}(0^-)$$

Интеграљење у *t*-домену

Теорема. Ако је $u(t)$ скоро део-по-део непрекидна и има Лапласову трансформацију $\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$, онда функција $\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ има Лапласову трансформацију

$$\mathrm{LT}\left(\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{\underline{s}}\underline{U}(\underline{s}) \quad .$$

У теоремама и дефиницијама користимо појмове *Лапласов интеграл* и *Лапласова трансформација*. Када кажемо **Лапласов интеграл**, онда мислимо на несвојствени интеграл од 0- до бесконачно у дефиницији трансформације и обично говоримо о његовом постојању или конвергенцији. Када кажемо **Лапласова трансформација**, онда мислимо на **пресликавање** функције времена $u(t)$ у функцију комплексне промењиве $\underline{U}(\underline{s})$ и подразумевамо **унилатералну** Лапласову трансформацију, коју означавамо са LT.

Крајње вредности

Теорема. Нека је $u(t)$ непрекидна за $t > 0$ и експоненцијалног реда, нека постоји гранична вредност у $t = 0$, и нека постоји први извод који је скоро део-по-део непрекидан.

Тада је $\lim\limits_{\underline{s}\to\infty} \mathrm{LT}(\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}) = 0$, одакле следује $\lim\limits_{\underline{s}\to\infty} \underline{s}U(\underline{s}) = u(0+)$.

Ако постоји Лапласов интеграл $\int\limits_{0-}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$ који конвергира за $\underline{s} = 0$,

онда је $\lim\limits_{\underline{s}\to 0+} \underline{s}U(\underline{s}) = u(\infty)$.

The Initial Value Theorem

$$u(0^{+}) = \lim_{\underline{s}\to\infty} (\underline{s}\,\underline{U}(\underline{s}))$$

The Final Value Theorem

$$u(\infty) = \lim_{\underline{s}\to 0} (\underline{s}\,\underline{U}(\underline{s}))$$

Користити ово својство када је познат трансформат, траже се крајње вредности одзива, а не тражи се одзив или његов график.

Примена теореме о крајњим вредностима

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}(\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 2)}$$

Постоји један пол у $\underline{s} = 0$, два пола са негативним реалним делом $-1 \pm \mathrm{j}1$, можемо применити теорему, $\lim\limits_{\underline{s}\to 0+} \underline{s}\underline{U}(\underline{s}) = \lim\limits_{\underline{s}\to 0+} \underline{s}\frac{1}{\underline{s}(\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 2)} = \frac{1}{2} = u(\infty)$.

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s} - a},\ a \in \mathrm{R}$$

Постоји један пол у $\underline{s} = a$. Ако је $a < 0$ можемо применити теорему, $\lim\limits_{\underline{s}\to 0+} \underline{s}\underline{U}(\underline{s}) = \lim\limits_{\underline{s}\to 0+} \underline{s}\frac{1}{\underline{s} - a} = 0 = u(\infty)$. Ако је $a > 0$ не можемо применити теорему јер пол нема негативан реалан део. Ако је $a = 0$ можемо применити теорему јер је пол у нули, $\lim\limits_{\underline{s}\to 0+} \underline{s}\underline{U}(\underline{s}) = \lim\limits_{\underline{s}\to 0+} \underline{s}\frac{1}{\underline{s}} = 1 = u(\infty)$.

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}^2 + 1}$$

Постоје два пола ван координатног почетка, на имагинарној оси, $\pm \mathrm{j}1$, а реални део није негативан, не можемо применити теорему. Оригинал је $\sin(t)\vartheta(t)$ и нема граничну вредност у бесконачности. Не постоји $\lim\limits_{t\to\infty} = u(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \sin(t)\vartheta(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \sin(t)$.

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 1}$$

Трансформат није права рационална функција, не можемо применити теорему.

Нека је трансформат $\underline{U}(\underline{s})$ **права** рационална функција Лапласове промењиве $\underline{s}$, $\underline{U}(\underline{s}) = \underline{P}(\underline{s})/\underline{Q}(\underline{s})$ количник полинома при чему је степен полинома у бројитељу мањи од степена полинома у имениоцу. Нека све нуле $\underline{Q}(\underline{s})$ имају **негативне** реалне делове, осим једне нуле која може бити у $\underline{s} = 0$. Тада **можемо** применити **теорему о крајњој вредности** и одредити оригинал $u(t)$ у бесконачности на основу трансформата $\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$ у нули.

Сличност (скалирање)

$$\mathrm{LT}(u(at)) = \frac{1}{a}\underline{U}\left(\frac{\underline{s}}{a}\right)$$

$$\mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(a\,\underline{s})) = \frac{1}{a}u\left(\frac{t}{a}\right)$$

$a \in \mathrm{R}$

$a > 0$

$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t))$

$u(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{U}(\underline{s}))$

Конволуција у временском домену

Теорема. Нека су $f(t)$ и $g(t)$ скоро део-по-део непрекидне, нека $|f(t)|$ има конвергентан унилатералан Лапласов интеграл, и нека је $g(t)$ експоненцијалног реда. Ако је

$\underline{F}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(f(t))$ и $\underline{G}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(g(t))$, онда је интеграл $h(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ скоро део-по-део непрекидна функција од t, непрекидна ако је $g(t)$ део-по-део непрекидна, и има унилатералну Лапласову трансформацију $\underline{H}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(h(t)) = \underline{F}(\underline{s})\underline{G}(\underline{s})$.

Интеграл $\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ се назива *конволуциони интеграл*.

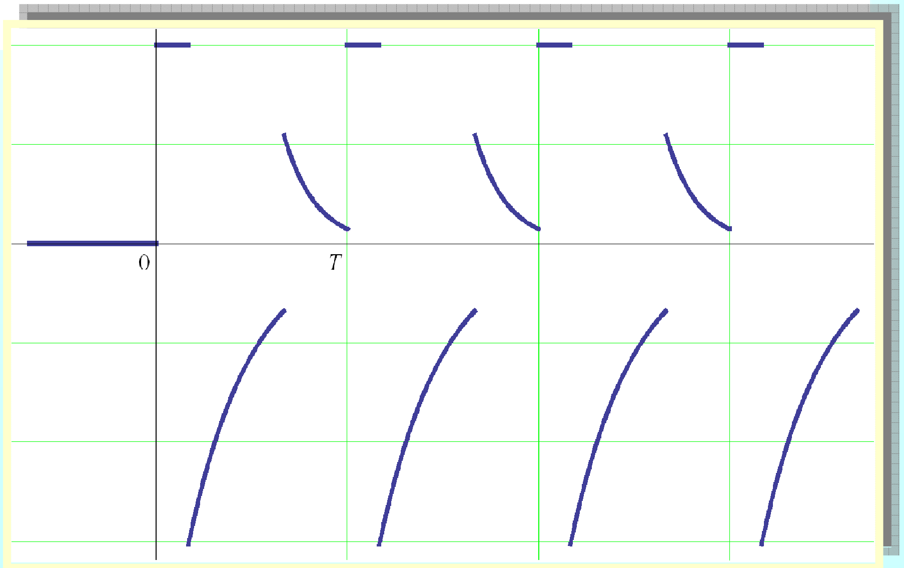
Лапласова трансформација пресликава конволуцију функција времена у **производ** Лапласових трансформата.

$$\mathrm{LT}\left(\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \underline{F}(\underline{s})\,\underline{G}(\underline{s})$$

Периодична функција времена

Теорема.
Ако је $w(t)$ дефинисана за $-\infty < t < +\infty$, део-по-део непрекидна на $[0, T)$ и периодична са периодом $T > 0$, $w(t+T) = w(t)$,
онда $u(t) = w(t)\vartheta(t)$ има унилатералну Лапласову трансформацију

$$\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t)) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\underline{s}\,t}} \int_{0-}^{T} u(t)\mathrm{e}^{-\underline{s}\,t}\mathrm{d}t \,.$$



Комплексна функција у области унилатералне Лапласове трансформације

временски непромењивог линеарног електричног кола без почетне енергије са једним извором

Комплексна функција ел. кола

- Посматрајмо линеарно временски непромењиво електрично коло **без** почетне (акумулисане) енергије у коме делује само **један** извор (само један независан напонски или струјни генератор).
- Сви природни почетни услови, у тренутку нула-минус, су једнаки **нули**.
- ***Комплексна функција електричног кола*** је однос трансформата одзива и трансформата побуде у области унилатералне Лапласове трансформације.
- Ако су побуда и одзив на истом приступу, комплексна функција се назива **улазна комплексна функција** (улазна имитанса).
- Ако су побуда и одзив на различитим приступима, комплексна функција се назива **преносна комплексна функција** (трансфер функција, функција преноса).
- У анализи комплексних функција ел. кола Лапласова промењива, комплексна учестаност $\underline{s}$, се посматра у **целој** комплексној равни.

Када посматрамо комплексну функцију кола у **целој** комплексној равни, и ван области конвергенције унилатералне Лапласове трансформације, кажемо да смо урадили **аналитичко проширење**.

Терминологија

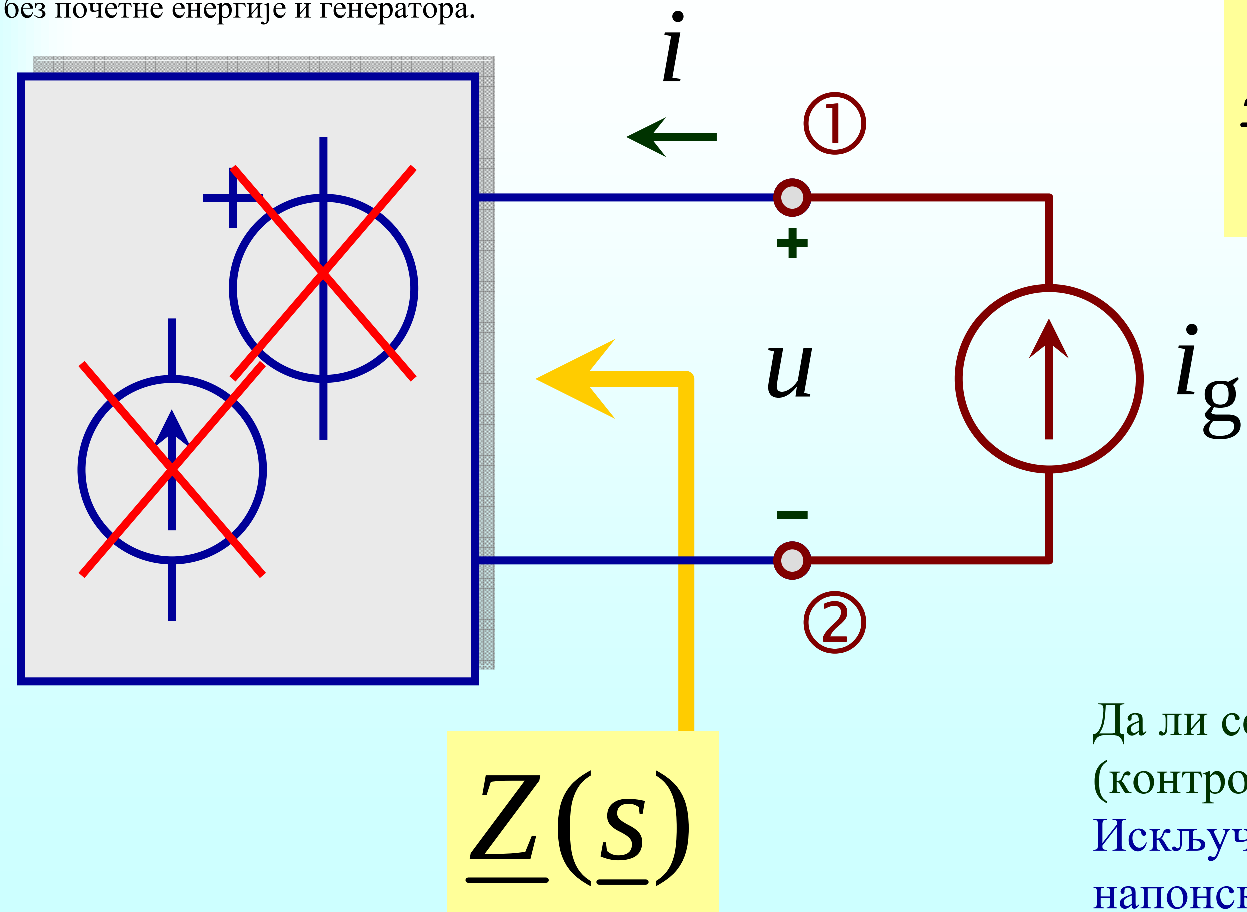
У скраћеном саобраћању, ако нема могућности забуне, обично се користи термин трансфер функција или *функција елект. кола*.

- Улазна импеданса.
- Улазна адмитанса.
- Преносна импеданса (трансимпеданса).
- Преносна адмитанса (трансадмитанса).
- Трансмитанса напона (напонско појачање, voltage gain, voltage amplification).
- Трансмитанса струје (струјно појачање, current gain, current amplification).
- Функција слабљења (attenuation).
- У литератури се дефинише и **уопштена** комплексна функција електричног кола као количник два **произвољна** трансформата одзива.

Прецизан термин је са фразом *у области унилатералне Лапласове трансформације*, на пример, **Улазна импеданса** у области унилатералне Лапласове трансформације.

Улазна импеданса у области унилатералне Лапласове трансформације

Линеарна временски непроменљива електрична мрежа са једним приступом без почетне енергије и генератора.



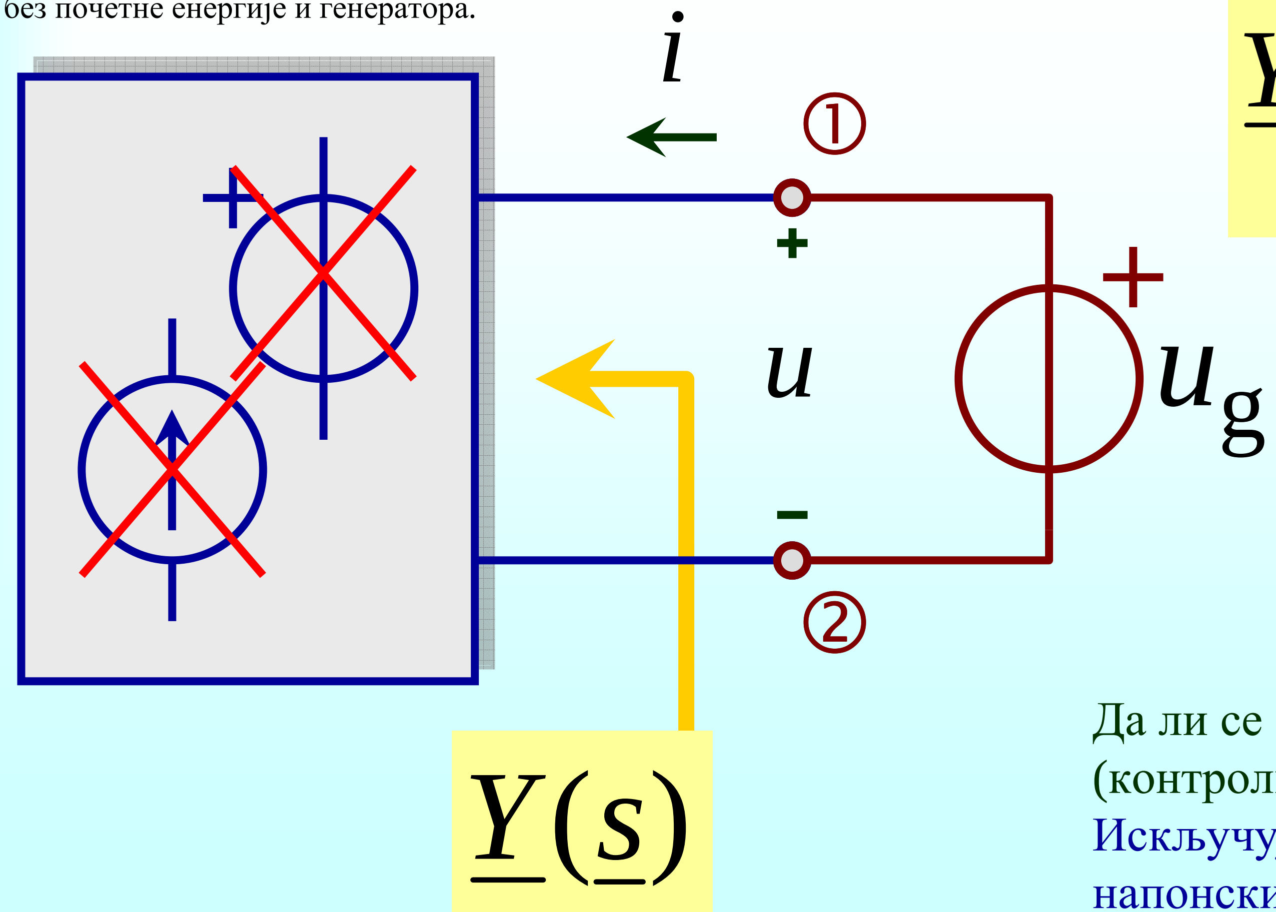
$$\underline{Z}(\underline{s}) = \frac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{I}(\underline{s})}$$

Да ли се искључују зависни извори (контролисани генератори)? **Не.** Искључују се само независни напонски или струјни генератори.

Улазна адмитанса у области унилатералне Лапласове трансформације

Линеарна временски непроменљива електрична мрежа са једним приступом без почетне енергије и генератора.

$$\underline{Y}(\underline{s}) = \frac{\underline{I}(\underline{s})}{\underline{U}(\underline{s})}$$

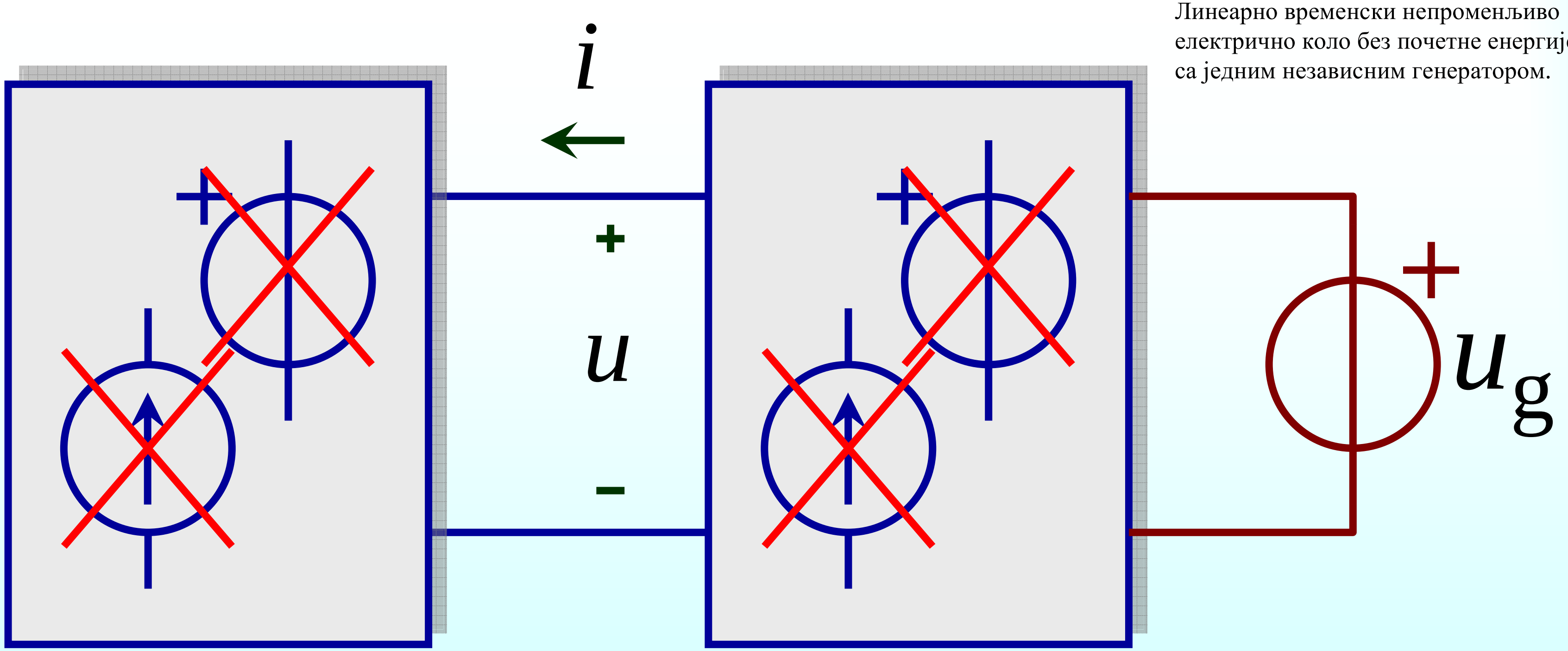


Да ли се искључују зависни извори (контролисани генератори)? **Не.**

Искључују се само независни напонски или струјни генератори.

Функција преноса напона у области унилатералне Лапласове трансформације

Линеарно временски непромењиво електрично коло без почетне енергије са једним независним генератором.



$$\underline{Y}(\underline{s}) = \frac{\underline{I}(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}$$

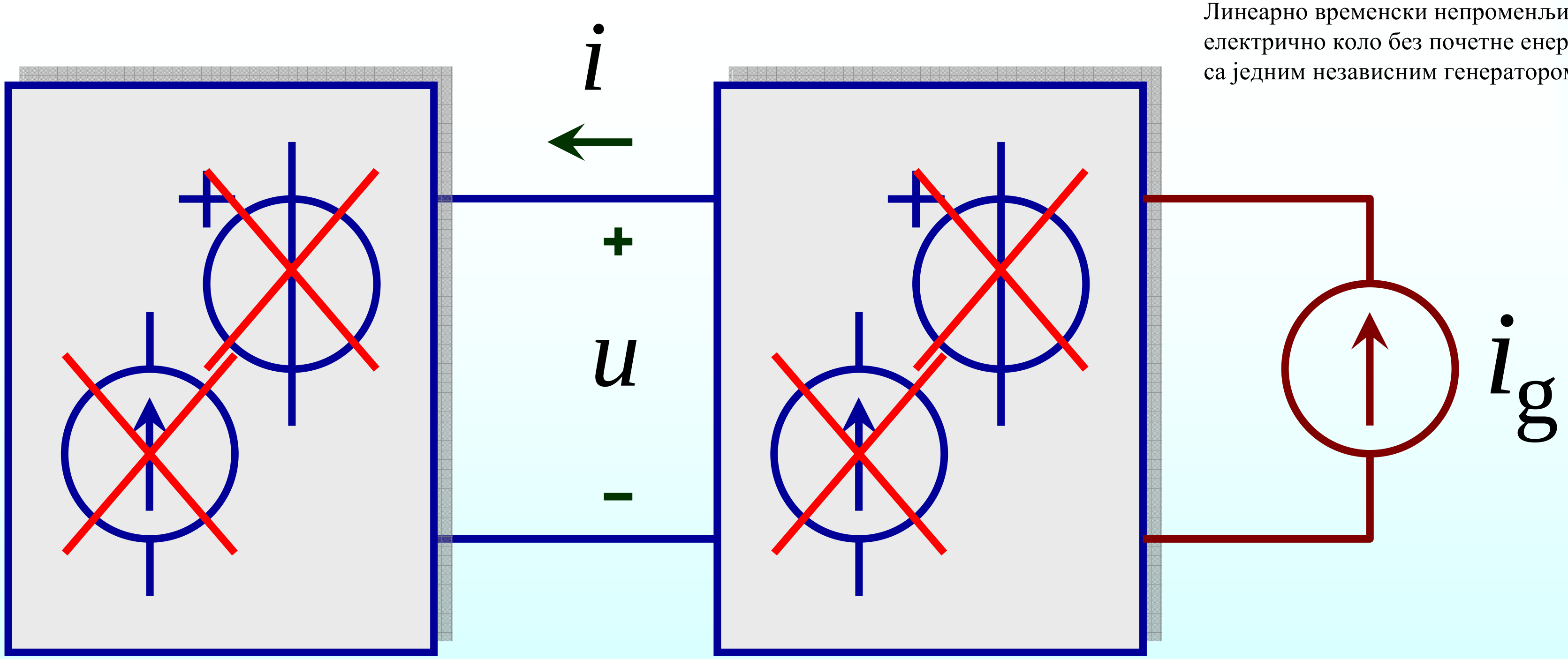
Трансадмитанса

$$\underline{A}(\underline{s}) = \frac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}$$

Трансмитанса напона

Функција преноса струје у области унилатералне Лапласове трансформације

Линеарно временски непроменљиво електрично коло без почетне енергије са једним независним генератором.



$$\underline{Z}(\underline{s}) = \frac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{I}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}$$

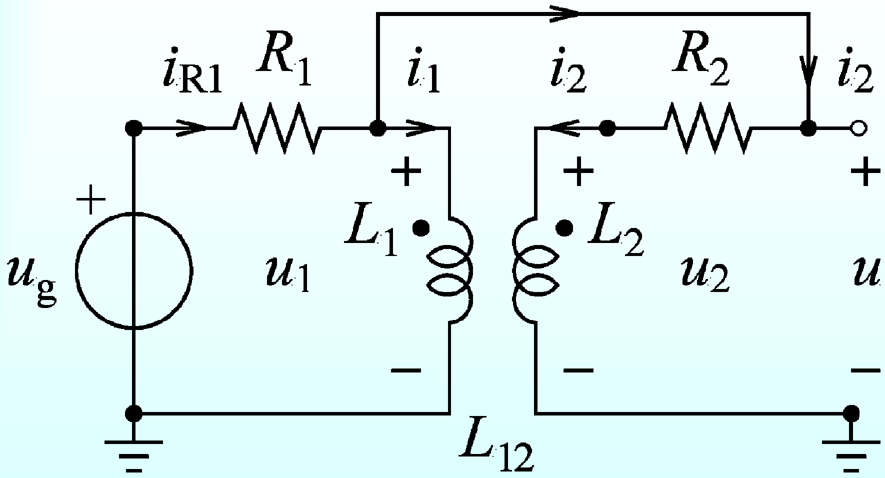
Трансимпеданса

$$\underline{A}(\underline{s}) = \frac{\underline{I}(\underline{s})}{\underline{I}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}$$

Трансмитанса струје

Уопштена комплексна функција у области унилатералне Лапласове трансформације

Линеарно временски непромењиво електрично коло
без почетне енергије са једним независним генератором.



$$\underline{A}(\underline{s}) = \frac{\underline{I}_2(\underline{s})}{\underline{I}_1(\underline{s})}$$

Пример уопштене комплексне функције електричног кола

Дефинише се количник два **произвољна** трансформата
и у имениоцу не мора бити трансформат побуде.

Примена уопштене комплексне функције електричног кола

- Пројектовање електричних филтара.
- Синтеза електричних мрежа: одређивање електричне мреже или кола за задате уопштене комплексне функције.
- Анализа осетљивости електричних кола: испитивање промена комплексне функције, и одзива, са променама параметара електричног кола.
- Анализа стабилности електричних кола.

Значај трансфер функције

- Карактеризација комплексне функције кола преко константе, нула и полова.
- Коришћење познавања **положаја** нула и полова у комплексној равни за **категоризацију** основних врста **одзива**, који настају услед различитих врста сабирака у развоју комплексне функције на делимичне (парцијалне) разломке.
- Идентификација и категоризација различитих **класа одзива**, одзива на почетне услове, одзива на побуду, одскочног одзива, импулсног одзива, потпуног одзива, устаљеног одзива, прелазног одзива, сопственог одзива и принудног одзива.
- Фреквенцијски одзив кола и Бодеови дијаграми.

Нуле и полови

У електричним колима која су састављена од концентрисаних елемената, комплексна функција електричног кола је рационална функција по комплексној учестаности $\underline{s}$ и коефицијенти су реални. То је количник два полинома, на пример $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{F}(\underline{s})}{\underline{G}(\underline{s})}$,

$\underline{H}(\underline{s}) = \underline{K}\dfrac{(\underline{s}-\underline{z}_1)(\underline{s}-\underline{z}_2)\ldots(\underline{s}-\underline{z}_m)}{(\underline{s}-\underline{p}_1)(\underline{s}-\underline{p}_2)\ldots(\underline{s}-\underline{p}_m)}$, где је $\underline{s}=\underline{p}_i$ **коначан пол** од $\underline{H}(\underline{s})$, $\underline{s}=\underline{z}_i$ је **коначна нула** од $\underline{H}(\underline{s})$, а $\underline{K}$ је константа. Претпостављамо да бројитељ и именитељ немају заједничких фактора, односно да су они скраћени.

У коначном полу је $\underline{H}(\underline{p}_i)=\infty$, што је скраћено писање за $\lim\limits_{\underline{s}\to\underline{p}_i}\underline{H}(\underline{s})=\infty$. Коначна нула задовољава $\underline{H}(\underline{z}_i)=0$.

Ако је $\underline{p}_i=\underline{p}_j$, $i\neq j$, онда је пол вишеструк. Ако је $\underline{z}_i=\underline{z}_j$, $i\neq j$, онда је нула вишеструка.

Ако је $m<n$, онда је $\lim\limits_{\underline{s}\to\infty}\underline{H}(\underline{s})=0$ и каже се да постоји **нула у бесконачности** вишеструкости реда $n-m$. Ако је $n<m$, онда $\underline{H}(\underline{s})$ има **пол у бесконачности** реда $m-n$.

Без обзира на врсту комплексне функције електричног кола, улазна, преносна, …, она је потпуно описана, карактерисана, коначним половима, коначним нулама и константом.

Зато што је суштинска (есенцијална) информација о комплексној функцији у половима и нулама, график њихових положаја у комплексној $\underline{s}$-равни је значајан и информативан.

Квалитативна информација о одзиву електричног кола

Положаји полова и нула (pole-zero locations) дају важну **квалитативну** информацију о одзиву електричног кола. Положај полова одређује инхерентно, природно, понашање кола и полови се уобичајено зову природне учестаности.

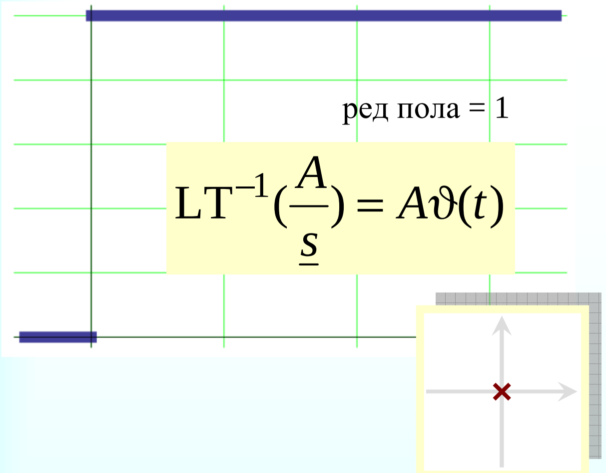
Сабирци, чланови, у развоју комплексног одзива на делимичне (парцијалне) разломке успостављају врсте понашања одзива. Сваки сабирак се може уклопити у један од неколико општих облика (patterns).

Четири општа једноставна члана су $A/\underline{s}$, $A/\underline{s}^k$, $A/(\underline{s}-p)$, $A/(\underline{s}-p)^k$, где су A, p реални.

Члан $A/\underline{s}$ даје временски сталан одзив, DC компоненту;
$A/\underline{s}^k$ се пресликава у степену функцију времена;

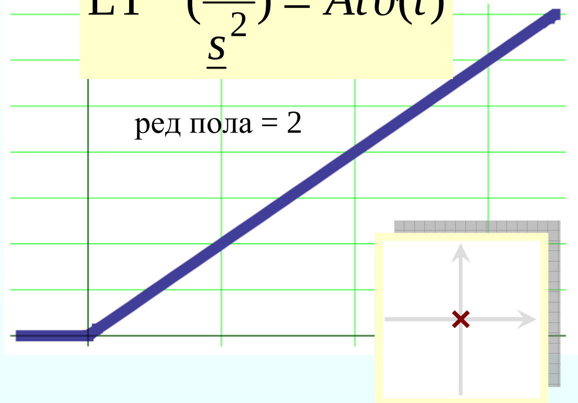
$A/(\underline{s}-p)$ кореспондира експоненцијалном одзиву, који је опадајући за $p<0$ а растући за $p>0$;
$A/(\underline{s}-p)^k$ ствара ограничен одзив са локалним екстремумом за $p<0$, а неограничено растући за $p>0$.

Сликовно препознавање типа одзива



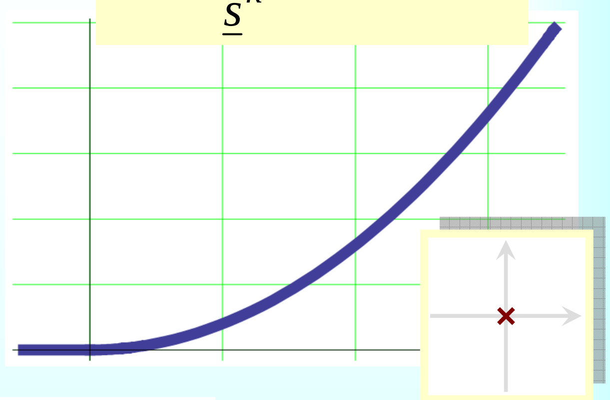
$$\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{A}{\underline{s}}\right) = A\vartheta(t)$$

$$\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{A}{\underline{s}^{2}}\right) = At\vartheta(t)$$



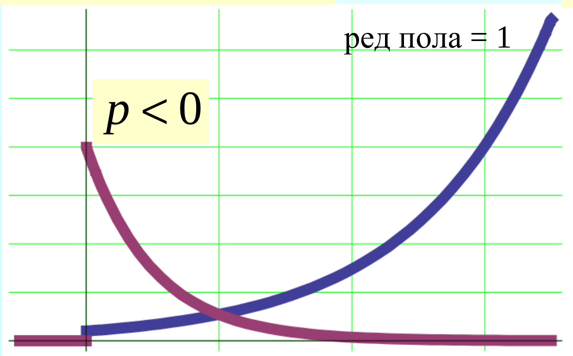
ред пола > 2

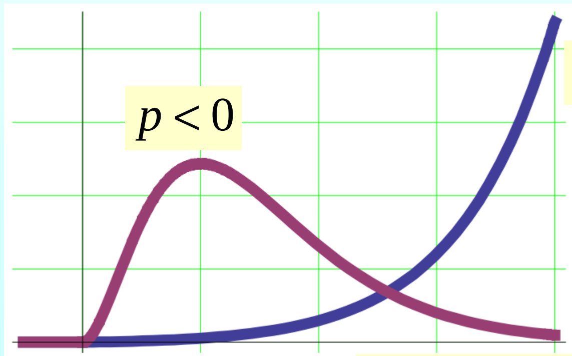
$$\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{A}{\underline{s}^{k}}\right) = At^{k-1}\vartheta(t)$$



$$\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{A}{\underline{s}-p}\right) = A\mathrm{e}^{pt}\,\vartheta(t)$$

$p > 0$



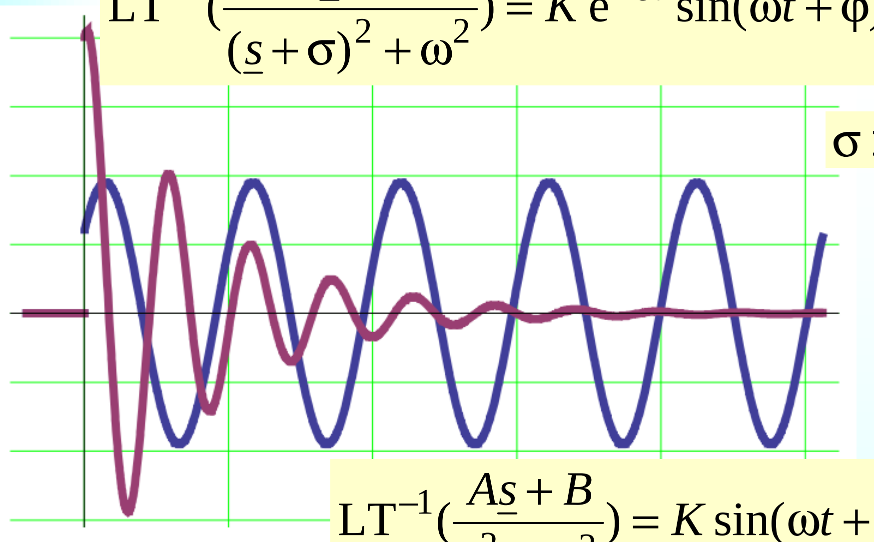


ред пола > 1

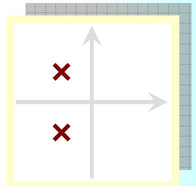
$$\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{A}{(\underline{s}-p)^{k}}\right) = At^{k-1}\,\mathrm{e}^{pt}\,\vartheta(t)$$

Осцилаторни одзив

$$\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{A\underline{s}+B}{(\underline{s}+\sigma)^2+\omega^2}\right)=K\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t+\varphi)\vartheta(t)$$



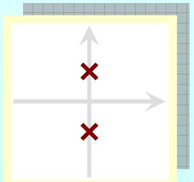
Пар комплексно-конјугованих полова првог реда негативног имагинарног дела ствара каузалан **псеудопериодичан** одзив, “пригушену синусоиду” која ишчезава у времену.



$$\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{A\underline{s}+B}{\underline{s}^2+\omega^2}\right)=K\sin(\omega t+\varphi)\vartheta(t)$$

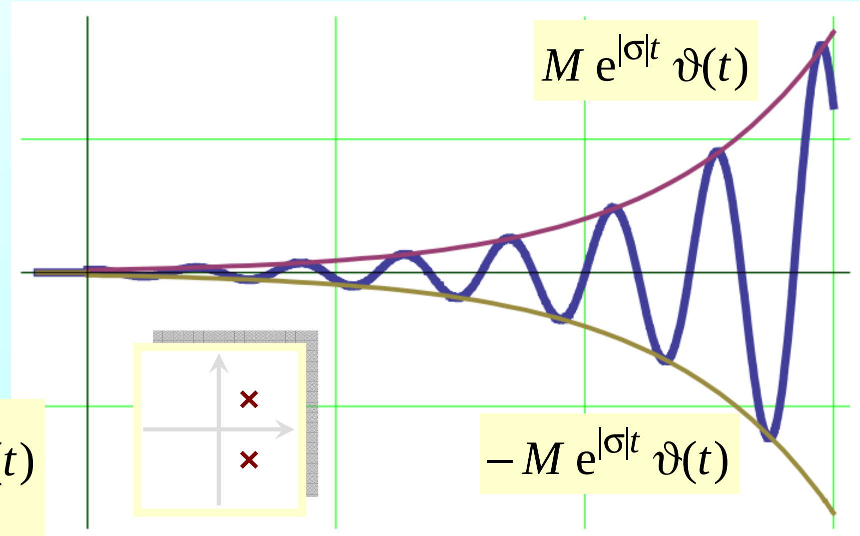
Пар комплексно-конјугованих полова првог реда позитивног имагинарног дела ствара каузалан **псеудопериодичан** неогреничено растући одзив, “експоненцијално растућу синусоиду”.

Чисто имагинаран пар комплексно-конјугованих полова првог реда ствара каузалан **простопериодичан** одзив, “чисту синусоиду” која је одржива и траје неограничено у времену (sustained oscillations).



$\sigma < 0$

$$\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{A\underline{s}+B}{(\underline{s}+\sigma)^2+\omega^2}\right)=K\,\mathrm{e}^{|\sigma|t}\sin(\omega t+\varphi)\vartheta(t)$$



Стабилност одзива

- Квалитативно понашање одзива електричног кола сугерише важну примену комплексне функције мреже: утврђивање **стабилности** одзива.
- Под којим условима ће одзив електричног кола остати **коначан** на целом интервалу времена од интереса?
- Ако је реалан део пола **позитиван**, онда одзив неограничено расте у времену, па кажемо да је одзив нестабилан.
- Положај полова у комплексној равни описује **тип** понашања електричног кола у временском домену.

Импулсни и одскочни одзив

Unit-impulse response

$$g(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{H}(\underline{s}))$$

Импулсни одзив се често обележава са $h(t)$.

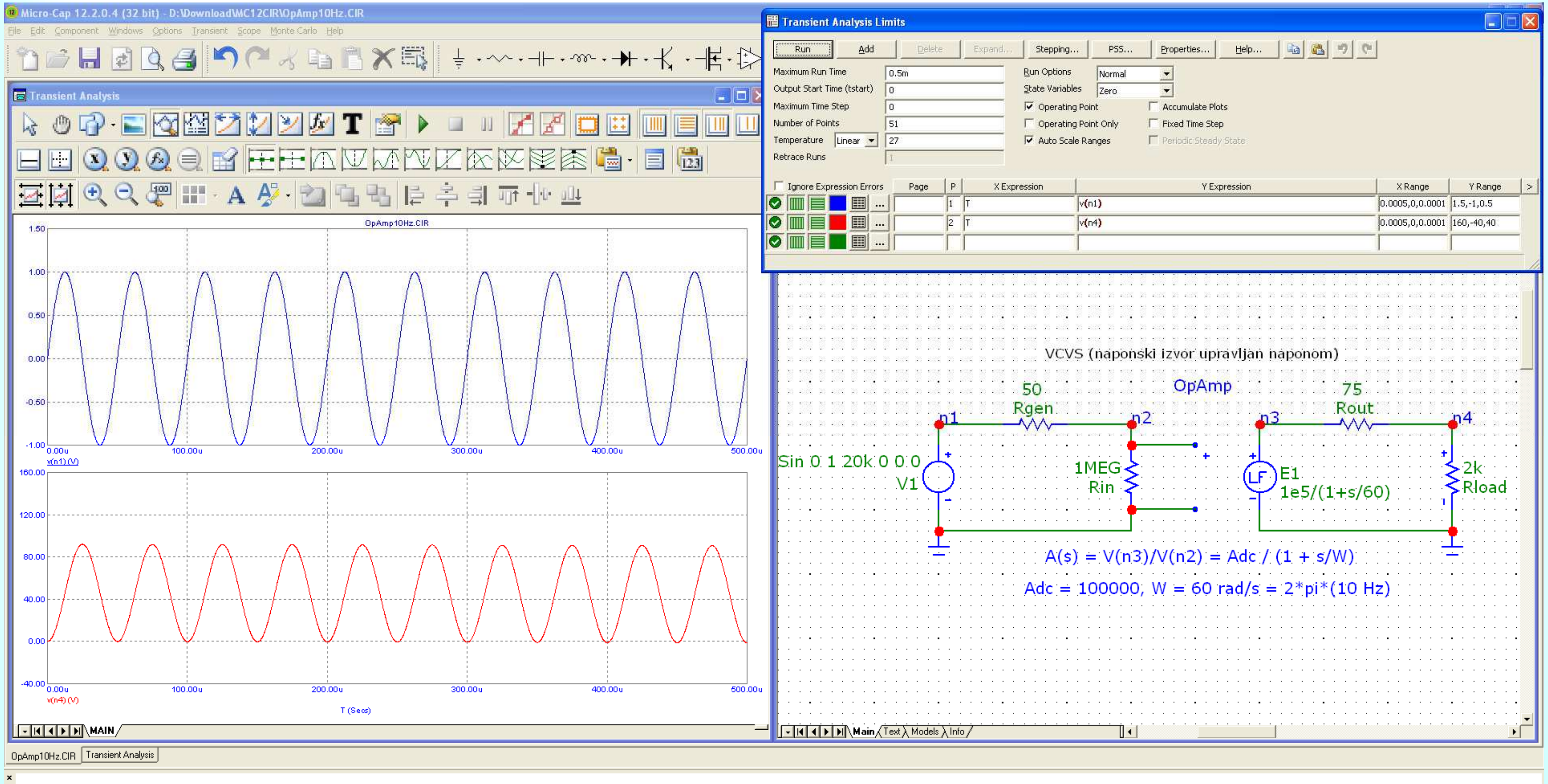
Импулсни одзив (***Гринова функција***) је инверзна унилатерална Лапласова трансформација одговарајуће комплексне функције електричног кола. Домен је цела реална оса.

Unit-step response

$$f(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{1}{\underline{s}}\underline{H}(\underline{s})\right)$$

Одскочни одзив (***индициона функција***) је инверзна унилатерална Лапласова трансформација одговарајуће комплексне функције електричног кола подељене са $\underline{s}$. Домен је цела реална оса.

OpAmp 10 Hz, 100k, 1 MΩ, 75 Ω



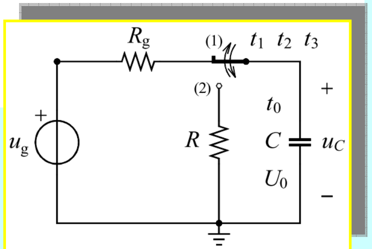
Симулација електричних кола, на пример у *Micro-Cap* 12 free, омогућава да се напонски извор управљан напоном (VCVS) дефинише са параметром који је функција **Лапласове промењљиве s**. Помоћу таквог **VCVS** елемента може се направити **реалистичнији** модел операционог појачавача коначног **фреквенцијски зависног појачања**, коначне улазне отпорности, и не-нулте излазне отпорности.

Решавање електричних кола са прекидачима помоћу унилатералне Лапласове трансформације

Прекидач у електричном колу има вишеструку улогу у раду кола и остваривању његове практичне функционалности. Прекидач моделујемо као идеалан елемент (ideal on/off switch): затворен прекидач је кратка веза (кратак спој) а отворен прекидач је отворена веза (прекид). Прекидач има два краја (терминла). Један крај је увек везан само за један одређен чвор кола, а други крај се може повезивати (превезивати) са неким другим чворовима, може мењати положај, у неким тренуцима времена.

Поступак решавања електричног кола са прекидачима
помоћу унилатералне Лапласове трансформације

У тренутку $t=0$ прекидач може, али не мора, променити положај.
За $t>0$, означимо тренутке промене положаја прекидача сукцесивно са $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n$.
Циљ је да се одреди потпун одзив за $0 \le t < \infty$.
Замисао (идеја) је да се временска оса подела на интервале $(t_0 = 0, t_1)$, (t_1, t_2), $\ldots, (t_k, t_{k+1})$, $\ldots$, $(t_n, t_{n+1} = \infty)$ и да се израчуна одзив за сваки интервал сукцесивно.
Поступак има два основна дела, две фазе рада.



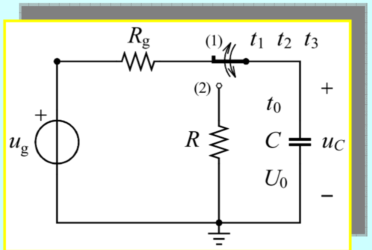
Решавање електричних кола са прекидачима помоћу LT: Први део

Први део. Посматрамо први интервал времена $(0, t_1)$.

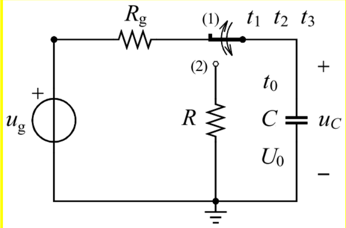
Корак 1. Нацртати заменско (еквивалентно) електрично кола које важи на посматраном интервалу времена. Природне почетне услове одредити у $t = 0^-$ из претходног устаљеног одзива, или сматрати задатим на основу предисторије кола за $t < 0$. Одзив је устаљен ако су сви напони и струје кола (1) временски константни или (2) периодични са истом периодом. Ово заменско (еквивалентно) електрично коло и одговарајући одзив важе за $0 \le t < t_1$.

Корак 2. Одредити одзив кола из **Корака 1** унилатералном Лапласовом трансформацијом.

Корак 3. Одредити напоне кондензатора и струје калемова у тренутку $t = t_1^-$.



Решавање електричних кола са прекидачима помоћу LT: Други део



Други део. За све остале интервале времена спровести следеће кораке.

Корак 4. Поставити индекс интервала на $k=1$.

Корак 5. Спровести следеће радње:

(1) За $t_k \le t < t_{k+1}$ увести смену $\tau = t - t_k$. Посматрати интервал $0 \le \tau < \infty$.
Нацртати заменско електрично кола које важи на посматраном интервалу времена.
Користити **израчунате** почетне услове у $\tau = 0^-$, који су једнаки условима у $t = t_k^-$.

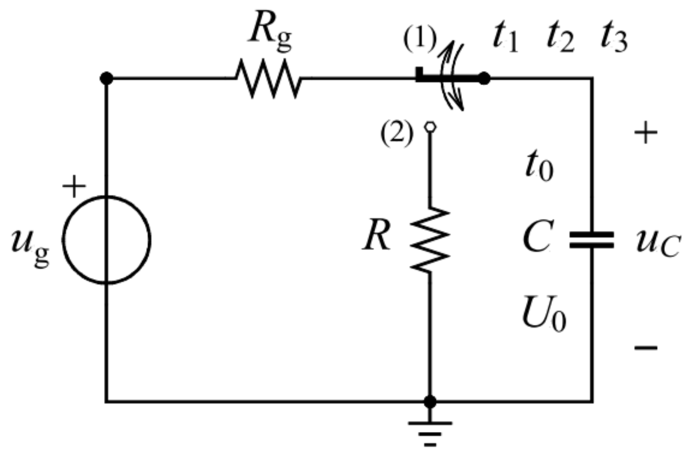
(2) Одредити одговарајући облик побуда, ако постоје, у функцији τ.

(3) Одредити одзив кола из **(1)** унилатералном Лапласовом трансформацијом. Променљива времена је τ. Када се одреди одзив по τ, одредити одзив у функцији t сменом $\tau = t - t_k$.

(4) Ако је $k = n$, онда је решавање завршено. У супротном, одредити напоне кондензатора и струје калемова у тренутку $t = t_{k+1}^-$.

(5) Повећати вредност индекса k за 1 и прећи на почетак **Корака 5**.

Пример кола са прекидачем



Вредности елемената кола са слике су познате. Почетни тренутак кола је $t_0 = 0$. Побуда је каузална експоненцијална $u_g(t) = U\mathrm{e}^{-at}\vartheta(t)$, $U = 10\,\mathrm{V}$, $a = 0.1\,\mathrm{s}^{-1}$.

Параметри отпорника су $R_g = 20\,\Omega$, $R = 4\,\Omega$.

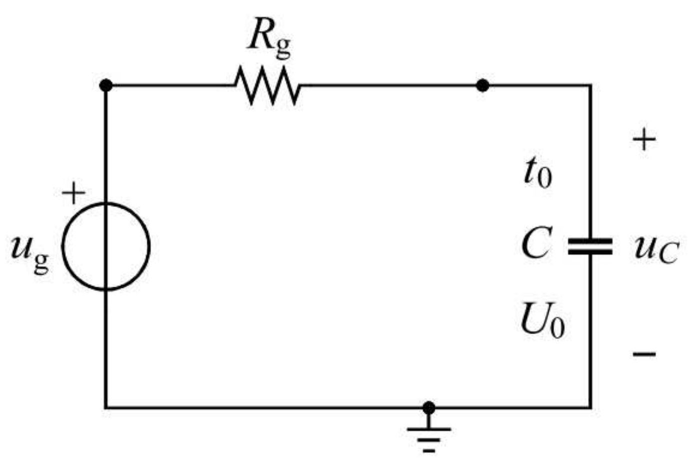
Капацитивност кондензатора је $C = 250\,\mathrm{mF}$ и почетни напон кондензатора је $u_C(t_0^-) = 0$.

Прекидач мења положај, пребацује се из положаја (1) у положај (2), и обрнуто, неколико пута.
Почетни положај прекидача је (1).
У тренутку $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ прекидач се пребацује у положај (2).
У тренутку $t_2 = 2\,\mathrm{s}$ прекидач се враћа у положај (1).
У тренутку $t_3 = 4\,\mathrm{s}$ прекидач се поново пребацује у положај (2) и у њему остаје.

Одредити напон кондензатора $u_C(t)$ за $t \ge t_0$

Пример кола са прекидачем (1)

Корак 1. Прекидач је у положају (1). Коло се решава на интервалу $t_0 \le t < t_1$.



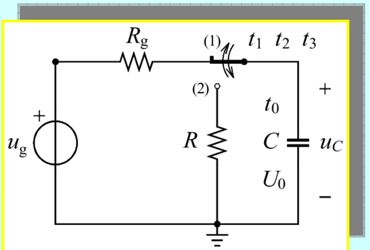
$$\underline{U}_g(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u_g(t)) = \mathrm{LT}(U\,\mathrm{e}^{-at}\,\vartheta(t)) = U\frac{1}{\underline{s}+a}$$

$$\frac{\underline{U}_C(\underline{s}) - \underline{U}_g(\underline{s})}{R_g} + C(\underline{s}\,\underline{U}_C(\underline{s}) - u_C(t_0^-)) = 0$$

$$\underline{U}_C(\underline{s}) = \frac{\underline{U}_g}{1 + CR_g\underline{s}}, \quad \underline{U}_C(\underline{s}) = \frac{1}{1 + CR_g\underline{s}} U \frac{1}{\underline{s}+a}$$

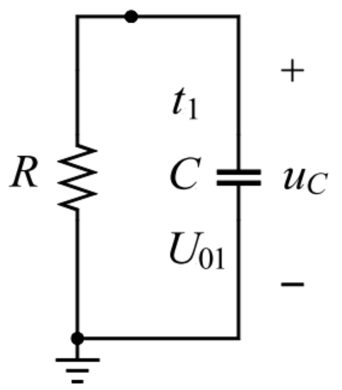
$$u_C(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0.1t} - 20\,\mathrm{e}^{-0.2t}$$

$$u_C(t_1^-) = U_{01} = 1.722, \text{ [SI систем јединица]}$$



Пример кола са прекидачем (2)

Корак 2. Прекидач је у положају (2). Коло се решава на интервалу $t_1 \le t < t_2$.



Уводимо смену $\tau = t - t_1$ и одређујемо одзив као функцију помереног времена τ са почетним условом $u_C(\tau_0^-) = U_{01}$, $\tau_0 = 0$.

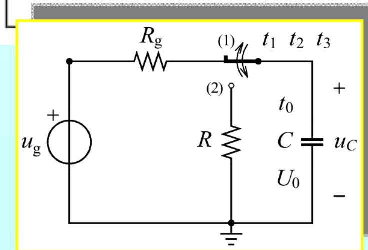
Коло се решава на интервалу $0 \le \tau < t_2 - t_1$.

$$\frac{\underline{U}_C(\underline{s})}{R} + C(\underline{s}\,\underline{U}_C(\underline{s}) - u_C(\tau_0^-)) = 0$$

$$\underline{U}_C(\underline{s}) = CR\frac{U_{01}}{1 + CR\underline{s}}, \quad u_C(\tau) = 1.722\,\mathrm{e}^{-\tau}$$

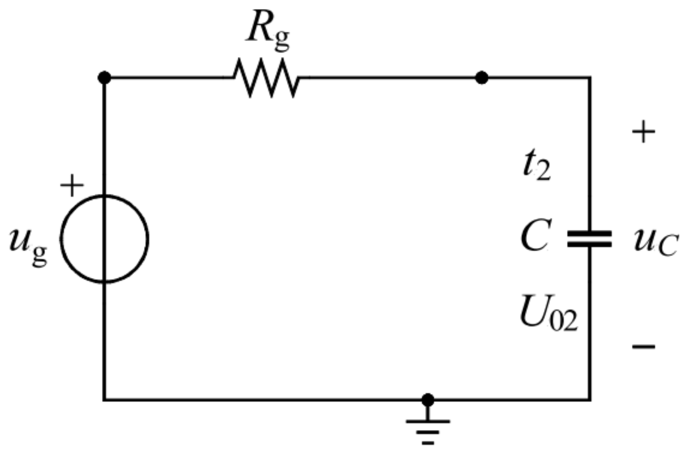
$$u_C(t) = 1.722\,\mathrm{e}^{-(t-1)}$$

$$u_C(t_2^-) = U_{02} = 0.6335, \text{ [SI систем јединица]}$$



Пример кола са прекидачем (3)

Корак 3. Прекидач је у положају (1). Коло се решава на интервалу $t_2 \le t < t_3$.



Уводимо смену $\tau = t - t_2$ и одређујемо одзив као функцију померенoг времена τ са почетним условом $u_C(\tau_0^-) = U_{02}$, $\tau_0 = 0$. Коло се решава на интервалу $0 \le \tau < t_3 - t_2$.

Посматрамо побуду као функцију померенoг времена τ,

$$u_{g2}(\tau) = u_g(\tau + t_2) = U\mathrm{e}^{-a(\tau+t_2)} = U\mathrm{e}^{-at_2}\mathrm{e}^{-a\tau}.$$

$$\underline{U}_{g2}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u_{g2}(\tau)) = U\,\mathrm{e}^{-at_2}\frac{1}{\underline{s}+a}$$

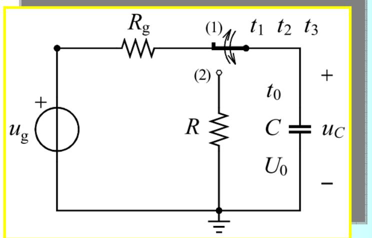
$$\frac{\underline{U}_C(\underline{s}) - \underline{U}_{g2}(\underline{s})}{R_g} + C(\underline{s}\underline{U}_C(\underline{s}) - U_{02}) = 0$$

$$\underline{U}_C(\underline{s}) = \frac{\underline{U}_{g2}(\underline{s}) + CR_gU_{02}}{1 + CR_g\underline{s}}$$

$$u_C(\tau) = 16.3746\,\mathrm{e}^{-0.1\tau} - 15.7411\,\mathrm{e}^{-0.2\tau}$$

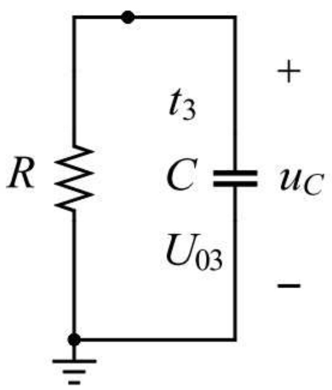
$$u_C(t) = 16.3746\,\mathrm{e}^{-0.1(t-2)} - 15.7411\,\mathrm{e}^{-0.2(t-2)}$$

$$u_C(t_3^-) = U_{03} = 2.8548,\ \text{[SI систем јединица]}$$



Пример кола са прекидачем (4)

Корак 4. Прекидач је у положају (2). Коло се решава на интервалу $t_3 \le t$.



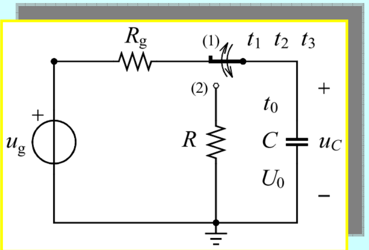
Уводимо смену $\tau = t - t_3$ и одређујемо одзив као функцију померенoг времена τ са почетним условом $u_C(\tau_0^-) = U_{03}$, $\tau_0 = 0$.

Коло се решава на интервалу $0 \le \tau$.

$$\frac{\underline{U}_C(\underline{s})}{R} + C(\underline{s}\,\underline{U}_C(\underline{s}) - U_{03}) = 0\,,\ \underline{U}_C(\underline{s}) = CR\frac{U_{03}}{1 + CR\underline{s}}$$

$$u_C(\tau) = 2.8548\,\mathrm{e}^{-\tau}$$

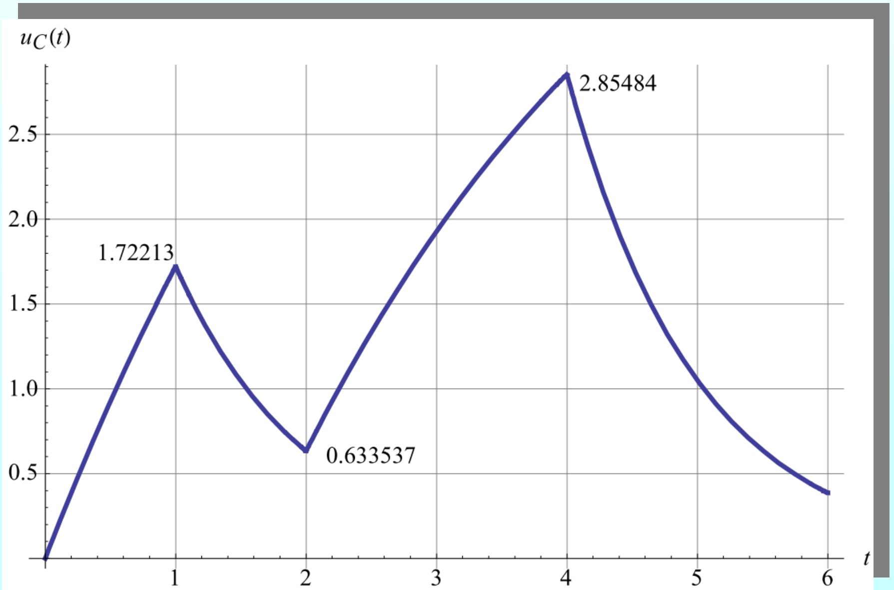
$$u_C(t) = 2.8548\,\mathrm{e}^{-(t-4)}$$, [SI систем јединица]



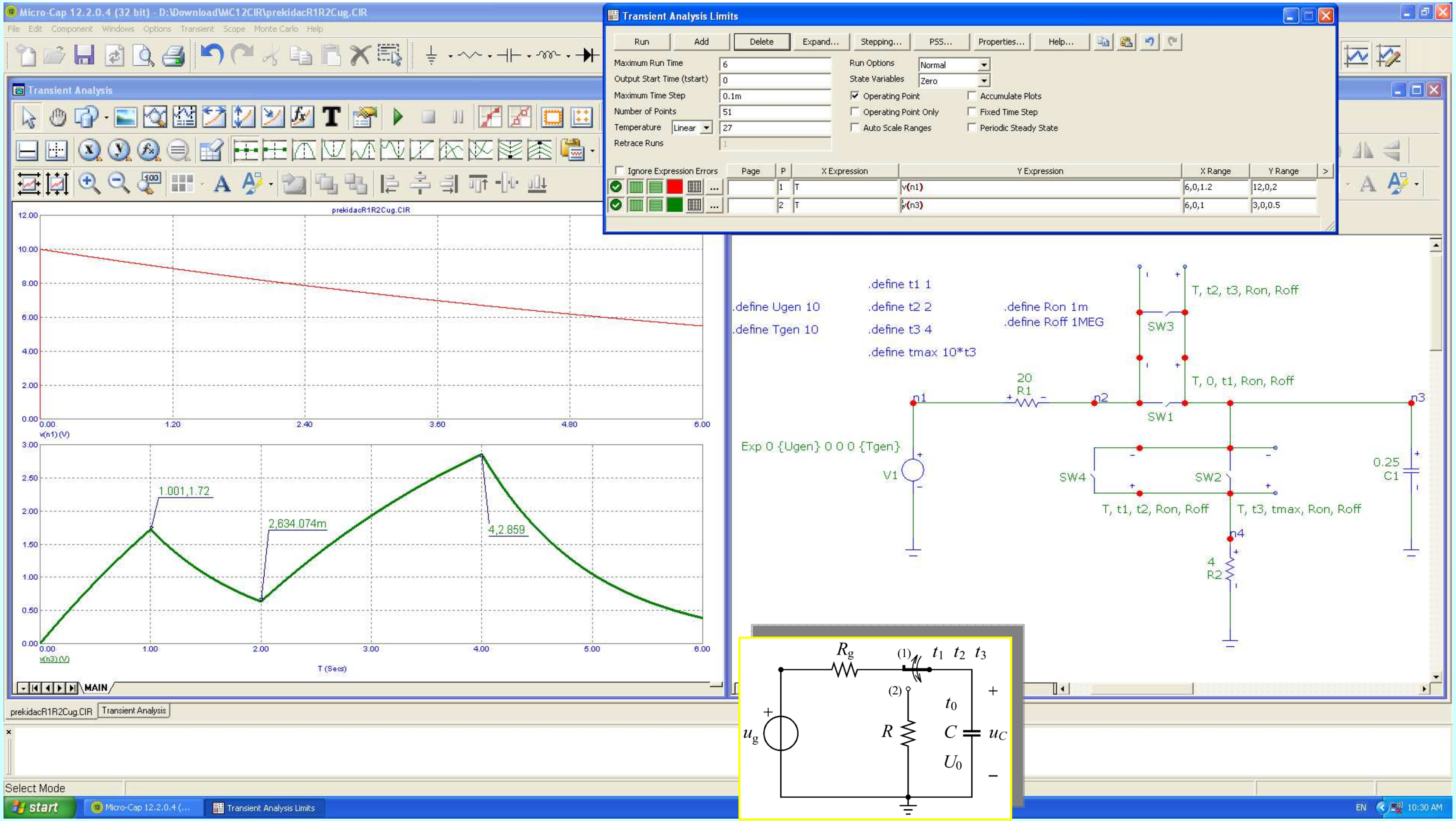
Пример кола са прекидачем (5)

Корак 5. Одзив представљамо по интервалима времена и, по потреби, цртамо.

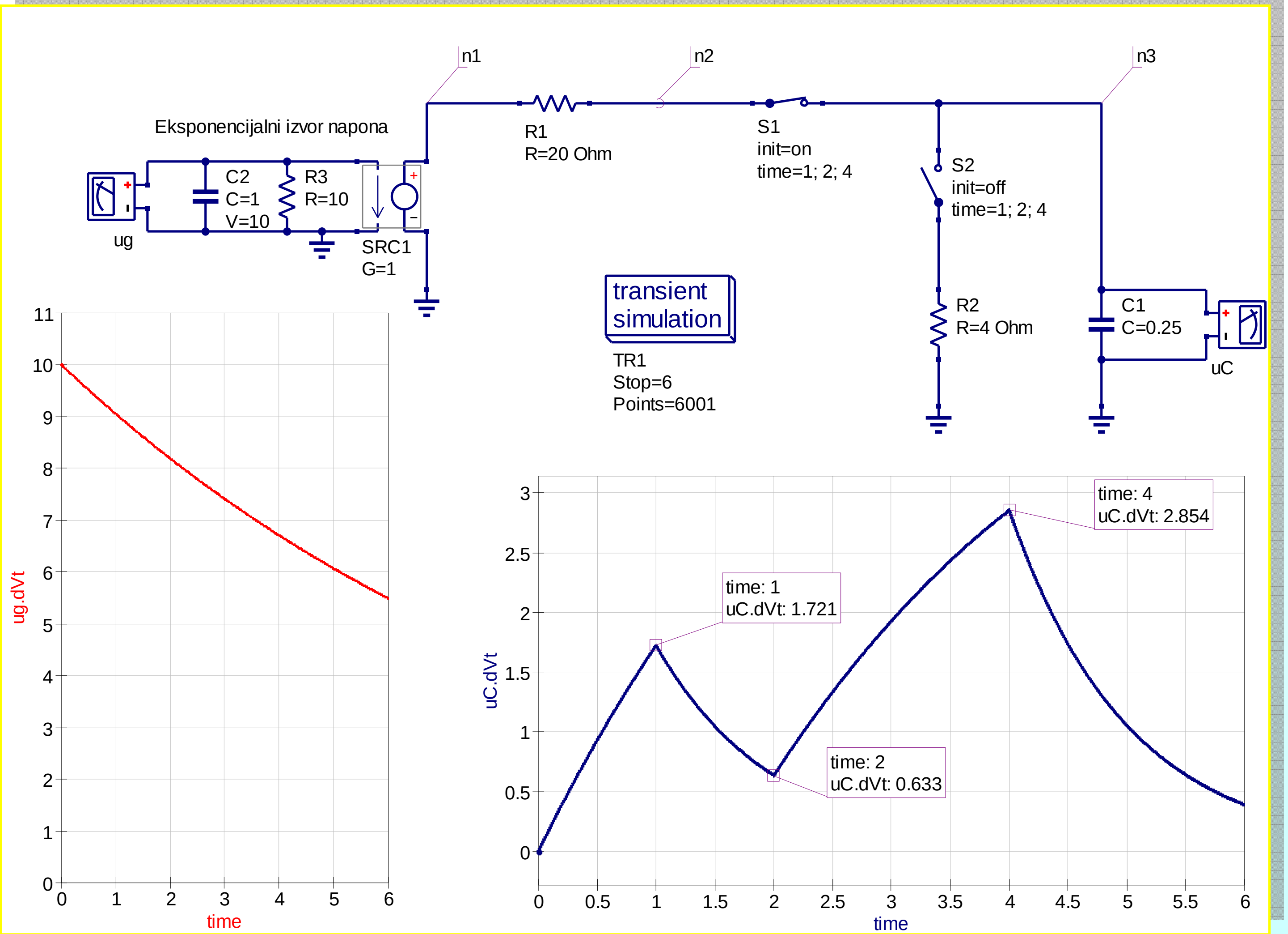
$$u_C(t)=\begin{cases} \text{nepoznato} & t<t_0 & t<0 \\ 20\,\mathrm{e}^{-0.1t}-20\,\mathrm{e}^{-0.2t} & t_0\le t<t_1 & 0\le t<1 \\ 1.722\,\mathrm{e}^{-(t-1)} & t_1\le t<t_2 & 1\le t<2 \\ 16.3746\,\mathrm{e}^{-0.1(t-2)}-15.7411\,\mathrm{e}^{-0.2(t-2)} & t_2\le t<t_3 & 2\le t<4 \\ 2.8548\,\mathrm{e}^{-(t-4)} & t_3\le t & 4\le t \end{cases}$$



Пример кола са прекидачем Micro-Cap 12 free



Quite Universal Circuit Simulator (QucsStudio free, Michael Margraf)



Ред електричног кола и LT

- Ред електричног кола је број диференцијалних једначина у систему једначина стања. Подразумева се да су једначине стања написане у Кошијевој нормалној форми.
- То је истовремено и највећи ред диференцијалне једначине одзива.
- Ред електричног кола је ред комплексне функције електричног кола у области унилатералне Лапласове трансформације.

Ред рационалне функције по Лапласовој промењљивој $\underline{s}$ је степен имениоца.

Који је ред кола са слике?

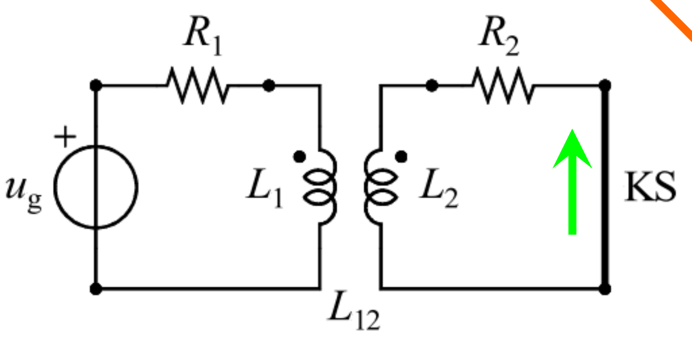
Задатак 1

Електрично коло са слике има познате вредности елемената: $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L$. Трансформатор је симетричан са савршеном спрегом. Побуда је $u_{\mathrm{g}}(t) = U\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{h}(t)$, $a = \dfrac{R}{2L}$.

(5) Одредити струју краткоспојника KS.

(5) Одредити ред кола.

(5) Нацртати граф кола.



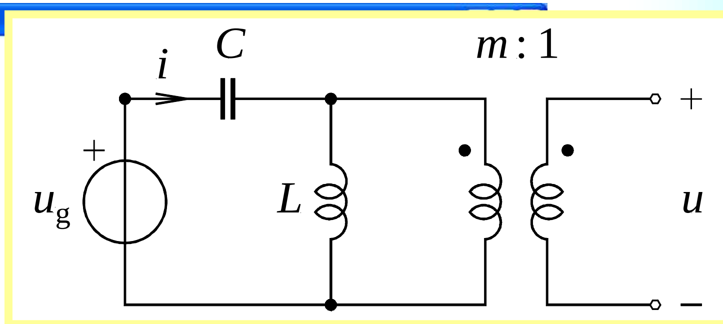
Проверити да ли се добија исправан резултат ако се посматра неки други одзив, осим напона напонског извора када је $\underline{H} = 1$.

redKola.nb

```
In[1]:= H = I2/Ug /.
          Solve[
           {Ug == R1 I1 + U1, U1 == s L1 I1 + s L12 I2,
             U2 == s L12 I1 + s L2 I2, 0 == R2 I2 + U2} /.
            {L1 → L, L2 → L, L12 → L, R1 → R, R2 → R},
           {I2}, {U1, U2, I1}] // First

Out[1]= -(L s)/(R (R + 2 L s))

In[2]:= r = Exponent[Denominator[H], s]

Out[2]= 1
```

Одзив на побуду

$$u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{m}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}} t\right) \vartheta(t)$$



ugCLT.nb

In[1]:=

```
i[t] ==
 (InverseLaplaceTransform[
     LaplaceTransform[U Sin[t/Sqrt[C L]], t, s] 1/(L s + 1/(C s)),
     s, t] HeavisideTheta[t] //
   FullSimplify[#, C > 0 && L > 0] &) //
 TraditionalForm
```

Out[1]//TraditionalForm=

$$i(t) = \frac{t\, U\, \theta(t) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{C L}}\right)}{2 L}$$

300%

Који је ред овог кола?

redKola2.nb

```
In[1]:= odziv =
          Solve[{IL == IC, Ug == UL + UC, UL == L (s IL - I0), IC == C (s UC - U0)},
            {IC, IL, UC, UL}] // First
```

Out[1]= $\left\{IC \to -\frac{-C\,I0\,L\,s + C\,U0 - C\,s\,Ug}{1 + C\,L\,s^2},\ IL \to -\frac{-C\,I0\,L\,s + C\,U0 - C\,s\,Ug}{1 + C\,L\,s^2},\ UC \to -\frac{-I0\,L - C\,L\,s\,U0 - Ug}{1 + C\,L\,s^2},\ UL \to -\frac{I0\,L + C\,L\,s\,U0 - C\,L\,s^2\,Ug}{1 + C\,L\,s^2}\right\}$

In[2]:= $HC = \frac{UC}{Ug}$ /. odziv /. {I0 → 0, U0 → 0}

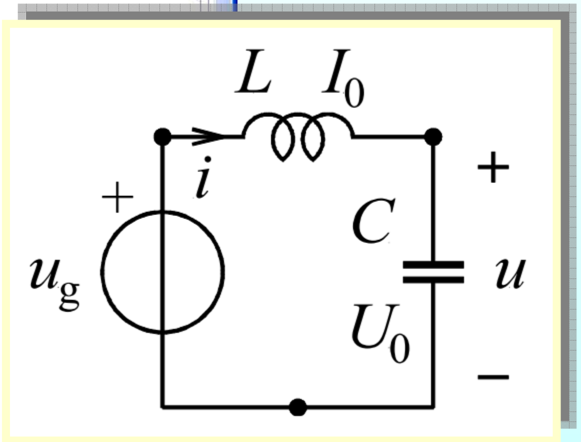
Out[2]= $\frac{1}{1 + C\,L\,s^2}$

In[3]:= $HL = \frac{IL}{Ug}$ /. odziv /. {I0 → 0, U0 → 0}

Out[3]= $\frac{C\,s}{1 + C\,L\,s^2}$

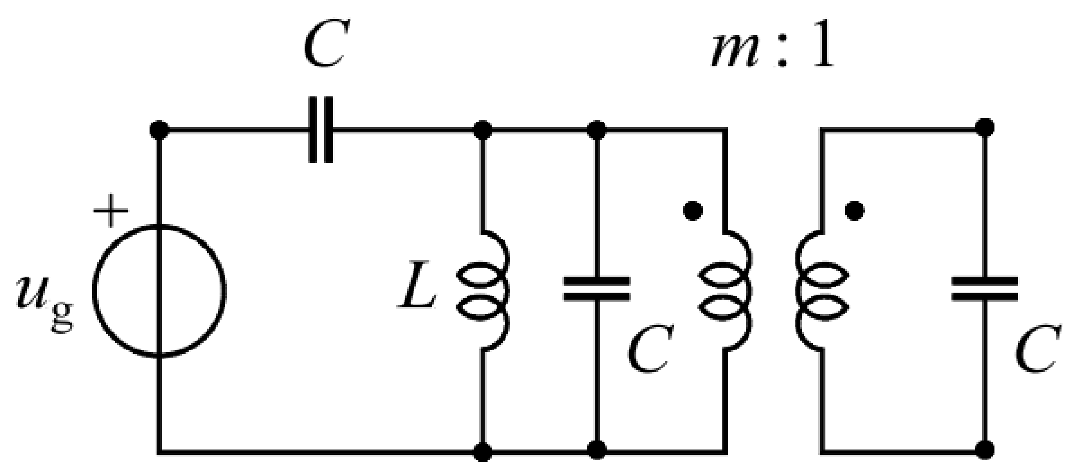
```
In[4]:= redC = Exponent[Denominator[HC], s]
Out[4]= 2

In[5]:= redL = Exponent[Denominator[HL], s]
Out[5]= 2
```

200%



Испитајте ред овог ел. кола LT

(5) Ред електричног кола са слике је



(а) 1,
(б) 2,
(в) 3,
(г) 4,
(д) 5,
(ђ) 6 ?

На пример, одредите Лапласов трансформат струје напонског извора (комплексну струју извора) и испитајте његов ред.

На колико начина можете да решите овај задатак?

Питања (1)

- Шта је Лапласова трансформација и зашто се она користи?
- Који је мотив увођења Лапласове трансформације?
- Која су кључна својства Лапласове трансформације?
- Које основне парове Лапласове трансформације знате?
- Како се одређује инверзна Лапласова трансформација рационалне функције?
- Који почетни тренутак кола подразумева Лапласова трансформација?
- У ком тренутку времена задајемо природне почетне услове када коло решавамо Лапласовом трансформацијом?

Питања (2)

- Који је поступак одређивања одзива Лапласовом трансформацијом?
- Како гласи својство крајње вредности?
- Шта је својство померaја аргумента?
- У шта се пресликава конволуција Лапласовом трансформацијом?
- Шта је уопштена комплексна функција електричног кола у области Лапласове трансформације?
- Како гласи веза импулсног одзива (Гринове функције) и трансфер функције?
- Како гласи веза одскочног одзива (индиционе функције) и трансфер функције?

Питања (3)

(5) За одређивање уопштене комплексне функције линеарног временски непроменљивог електричног кола почетни услови треба да буду	(а) једнаки јединици, (б) једнаки нули, (в) произвољни, (г) у збиру једнаки нули?

(5) Уопштена комплексна функција линеарног временски непроменљивог електричног кола је $\underline{F}(\underline{s}) = \dfrac{b}{\underline{s} + a}$.

Одредити одговарајући одскочни одзив (индициону функцију). Коефицијенти a и b су реални и позитивни.

(5) Уопштена комплексна функција линеарног временски непроменљивог електричног кола је $\underline{F}(\underline{s}) = \dfrac{b}{\underline{s}^2 + a^2}$.

Одредити одговарајући импулсни одзив (Гринову функцију). Коефицијенти a и b су реални и позитивни.

Питања (4)

(5) Који почетни тренутак кола подразумева Лапласова трансформација?

(5) У шта се пресликава конволуција Лапласовом трансформацијом?

(4) Шта је одскочни одзив (индициона функција, step response)? Описати поступак за одређивање одскочног одзива. Који је домен (област дефинисаности) одскочног одзива?

(5) Одскочни одзив (индициона функција) је инверзна Лапласова трансформација одговарајуће	а) уопштене комплексне функције мреже, б) уопштене комплексне функције мреже помножене Лапласовом променљивом, в) уопштене комплексне функције мреже подељене Лапласовом променљивом?

Питања (5)

(5) Импулсни одзив (Гринова функција) је инверзна Лапласова трансформација одговарајуће

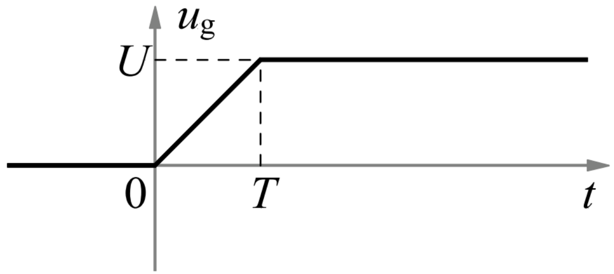
а) уопштене комплексне функције мреже,

б) уопштене комплексне функције мреже помножене Лапласовом променљивом,

в) уопштене комплексне функције мреже подељене Лапласовом променљивом?

(6) Шта је импулсни одзив (Гринова функција, јединични импулсни одзив)? Описати поступак за одређивање импулсног одзива. Који је домен импулсног одзива, односно на ком интервалу времена је дефинисан?

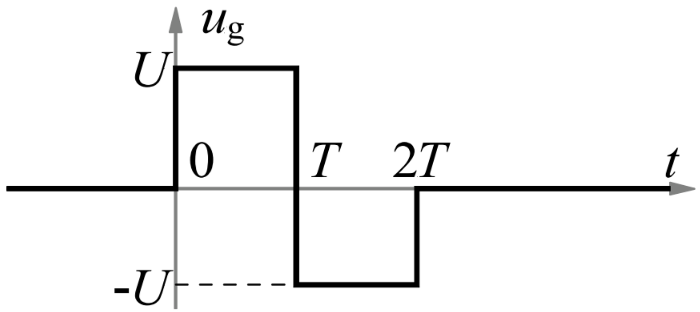
(5) Одредити Лапласову трансформацију побуде са слике.



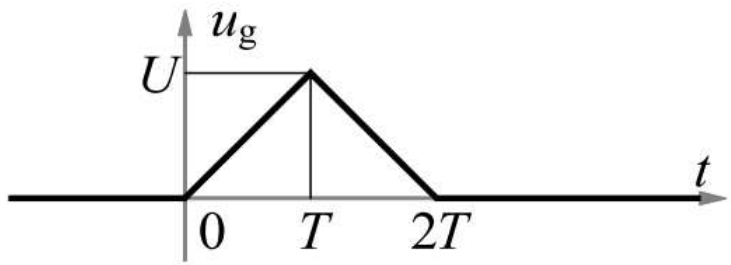
(5) Трансфер функција (уопштена комплексна функција) електричног кола је $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{a}{\underline{s}}$, $a \in \mathrm{R}$. Одредити јединични одскочни одзив (индициону функцију).

Питања (6)

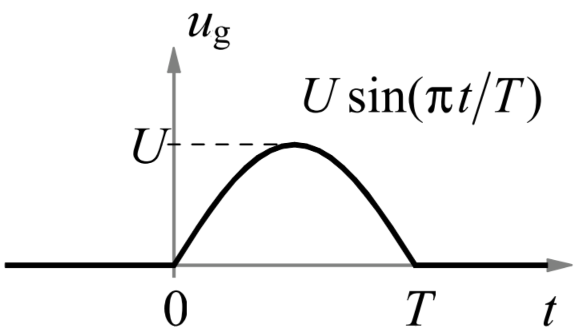
(5) Одредити Лапласову трансформацију побуде са слике.



(6) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике?



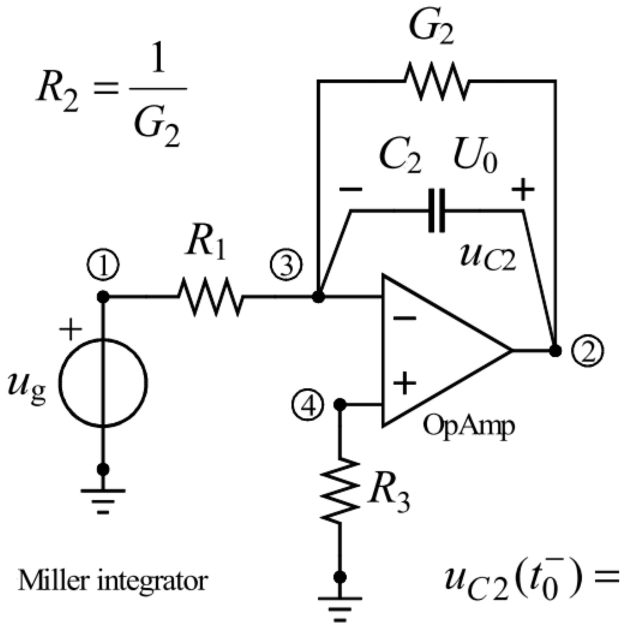
(5) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике?



(5) У ком тренутку времена задајемо природне почетне услове када коло решавамо Лапласовом трансформацијом?

Питања (7)

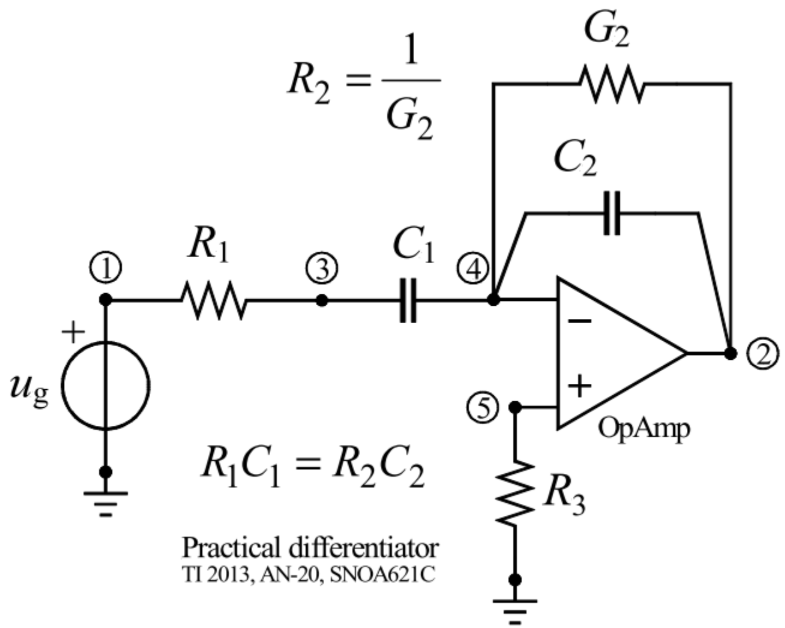
(4) Шта су природни почетни услови електричног кола? Они се задају у тренутку времена	(а) $t = +\infty$ (б) $t = t_0^-$, t-нула-минус, t_0 коначно (в) $t = t_0^+$, t-нула-плус, t_0 коначно

(6) Колики је импулсни одзив идеалног интегратора, за напон v_2, када је $G_2 = 0$, и који је његов домен? Одговор: Импулсни одзив је Домен је	$R_2 = \frac{1}{G_2}$  $u_{C2}(t_0^-) = U_0$

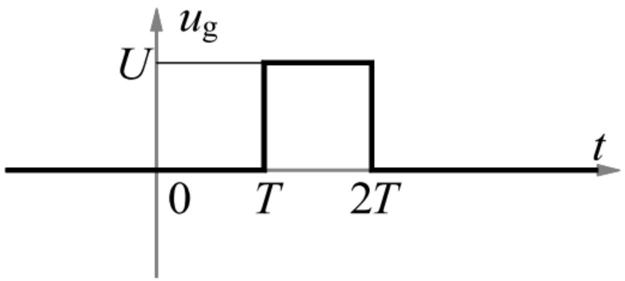
Питања (8)

(7) Колики је одскочни одзив идеалног диференцијатора, за напон v_2, када је $R_1 = 0$, $C_2 = 0$ и који је његов домен?

Одговор:



(5) Која је Лапласова трансформација напонске побуде са слике?



(5) Комплексан напон у области Лапласове трансформације је

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{a}{\underline{s}^2 + b\underline{s} + c}, \; (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

Колико је $u(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$?

Питања (9)

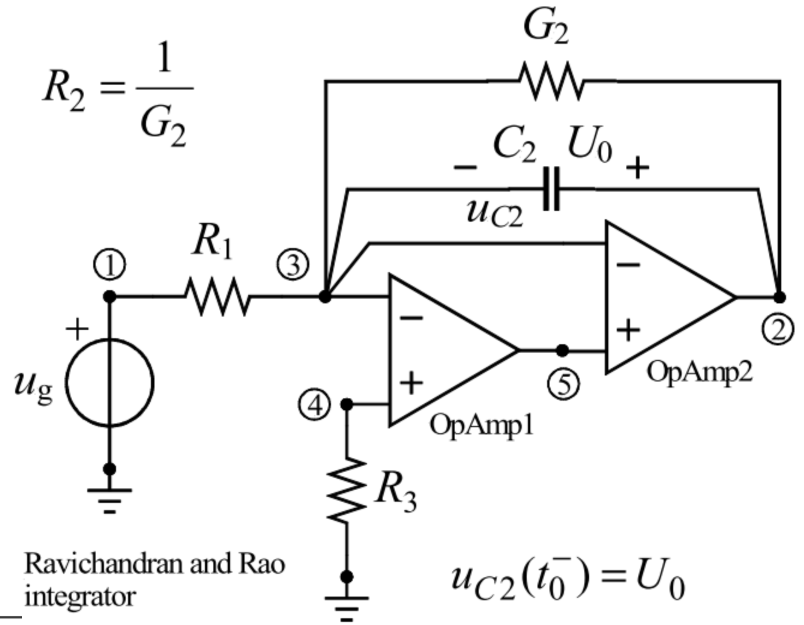
(7) Колики је одскочни одзив идеалног интегратора, за излазни напон v_2, када је $G_2 = 0$, и који је његов домен?

Одговор:

Одскочни одзив је

Домен је

$$R_2 = \frac{1}{G_2}$$



$$u_{C2}(t_0^-) = U_0$$

(6) Трансфер функција електричног филтра је $\underline{H}(\underline{s}) = k\dfrac{a\underline{s}}{\underline{s}^2 + ab\underline{s} + a^2}$, $a > 0$, $0 < b < 1$, $k \neq 0$.

Како гласи одговарајући одскочни одзив (индициона функција) и његов домен (област дефинисаности) по времену?

(6) Како гласи одскочни одзив (индициона функција, step response, јединични одскочни одзив) идеалног интегратора трансфер функције $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{A}{\underline{s}}$, $A = \text{const}$, $A > 0$? Који је његов домен (област дефинисаности)?

Питања (10)

(5) Комплексан напон приступа линеарног електричног кола, у области Лапласове трансформације, је

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{A}{\underline{s}} \mathrm{e}^{-\underline{s}T}\ ;\ A, T = \mathrm{const}\ ;\ \ A, T > 0\,.$$

Која је тренутна вредност овог напона?

(5) Комплексан напон приступа линеарног електричног кола, у области Лапласове трансформације, је

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{b}{\underline{s}^2 + a^2} \mathrm{e}^{-\underline{s}T}\ ;\ a, b, T = \mathrm{const}\ ;$$

$a, b, T > 0$.

Која је тренутна вредност овог напона?

(5) Комплексан напон приступа линеарног електричног кола, у области Лапласове трансформације, је

$$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{b\underline{s}}{\underline{s}^2 + a^2} \mathrm{e}^{-\underline{s}T}\ ;\ a, b, T = \mathrm{const}\ ;$$

$a, b, T > 0$.

Која је тренутна вредност овог напона?

(5) Како гласи одскочни одзив (индициона функција, step response, јединични одскочни одзив) идеалног диференцијатора трансфер функције $\underline{H}(\underline{s}) = A\underline{s}$, $A = \mathrm{const}$, $A > 0$? Који је његов домен (област дефинисаности)?

Задаци (1)

Задатак 1

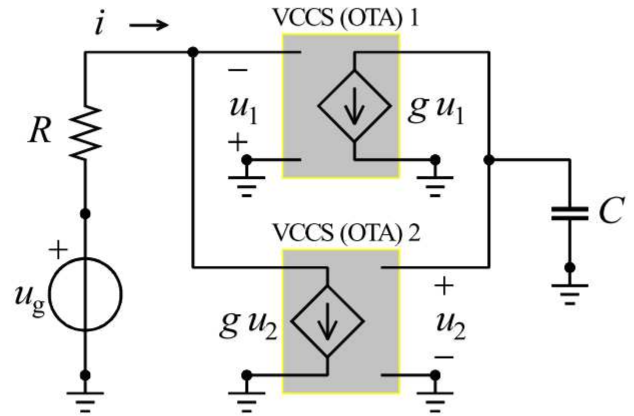
Електрично коло са OTA (Operational Transconductance Amplifier) жиратором има познате вредности елемената и $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$.

(3) Нацртати граф кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека и број главних петљи (фундаменталних контура).

(7) Одредити напон кондензатора и његов домен (област дефинисаности).

(5) Одредити граничну вредност струје отпорника после бесконачно дугог времена ($t \to +\infty$).

Граф кола је



Број главних пресека је а петљи

Напон кондензатора је

Гранична вредност струје отпорника је

Задаци (2)

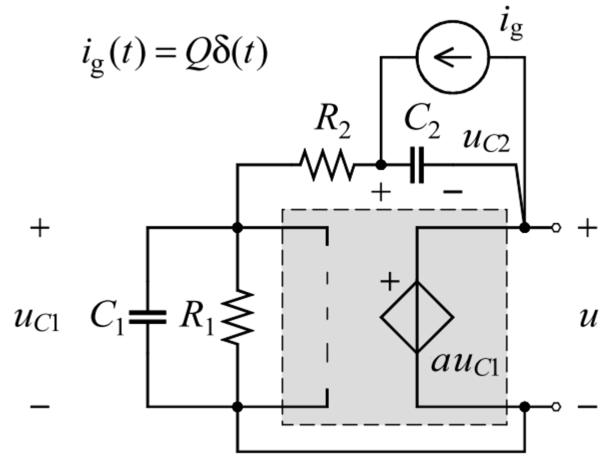
Задатак 2

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) нема почетну енергију и $a = 3$, $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$, $i_g = Q\delta(t)$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(7) Одредити напон u и његов домен.

(3) Нацртати график u у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Једначине стања у матричном облику су

Ред кола је

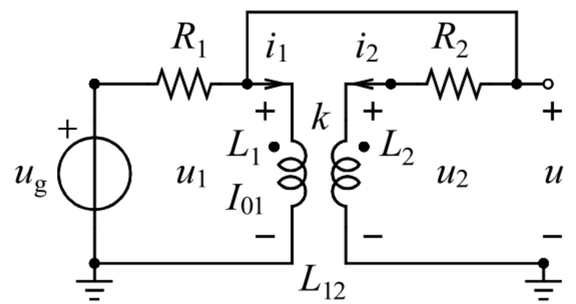
Напон u и његов домен су

График напона u је

Задаци (3)

Задатак 1

Електроенергетски трансформатор је у колу познатих параметара, $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $L_1 = L$, $L_2 = 4L$, $k = \dfrac{1}{2}$, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$, $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $t_0 = 0$.



(6) Одредити струју секундара i_2 и њен домен.

(6) Одредити напон отворене везе u и његов домен.

(3) Нацртати график напона u .

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Струја секундара i_2 и њен домен су

Напон отворене везе u и његов домен су

График напона u је

Задаци (4)

Задатак 1

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) је приказан на слици и

$R_1 = R_2 = R$, $a = 3$, $C_1 = C_2 = C$, $t_0 = 0$.

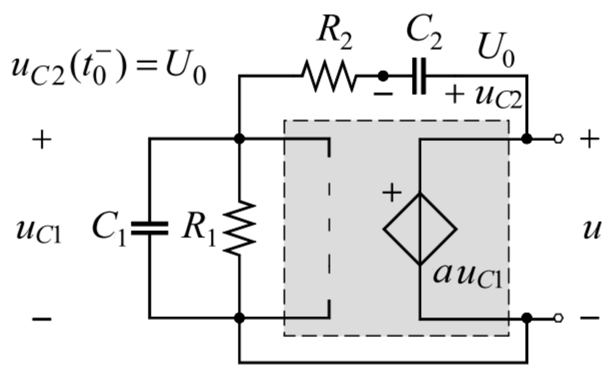
(4) Нацртати граф овог електричног кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека и главних петљи (фундаменталних контура).

(7) Одредити напон u за $t > t_0$.

(4) Нацртати график u у функцији времена за $t > t_0$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Граф електричног кола је

$u_{C2}(t_0^-) = U_0$



Главних пресека има   , а петљи   .

Напон u за $t > t_0$ је

График u у функцији времена за $t > t_0$ је

Задаци (5)

Задатак 1

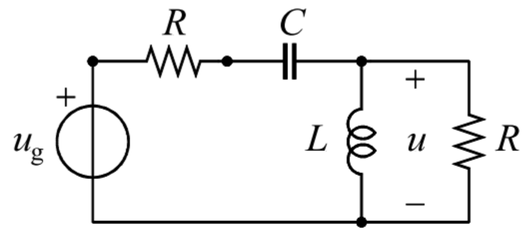
LC-реализација филтра (Butterworth maximally flat highpass approximation) има познате параметре и $L = \dfrac{R}{\sqrt{2}\,\Omega}$, $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,R\Omega}$, $\Omega > 0$. Одредити

(6) импулсни одзив (Гринову функцију) за излазни напон $u(t)$ и његов домен,

(6) одскочни одзив (индициону функцију) за излазни напон $u(t)$ и његов домен.

(3) Нацртати график одскочног одзива. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Импулсни одзив и његов домен су



Одскочни одзив и његов домен су

График одскочног одзива је

Задаци (6)

Задатак 2

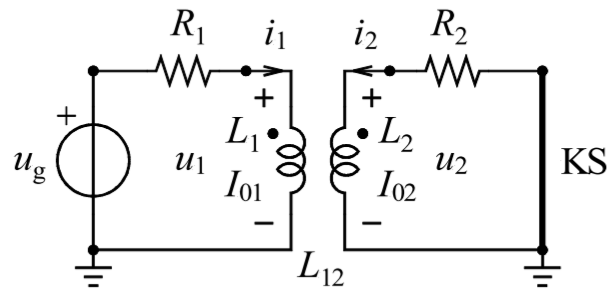
Електроенергетски трансформатор је идеализовано представљен линеарним индуктивним трансформатором $L_1 = L$, $L_2 = L$, $k = \dfrac{1}{2}$ и отпорностима губитака у намотајима $R_1 = R$, $R_2 = R$. Секундар је краткоспојен а примар је побуђен напонским извором импулсног напона $u_g(t) = \Phi\,\delta(t)$. Почетне струје примара и секундара су $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $i_2(t_0^-) = 0$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити ред овог електричног кола и једначине стања у матричном облику.

(5) Одредити струју примара i_1 и њен домен.

(5) Одредити струју секундара i_2 и њен домен.

Ред кола је



Једначине стања у матричном облику су

Струја примара i_1 и њен домен су

Струја секундара i_2 и њен домен су

Задаци (7)

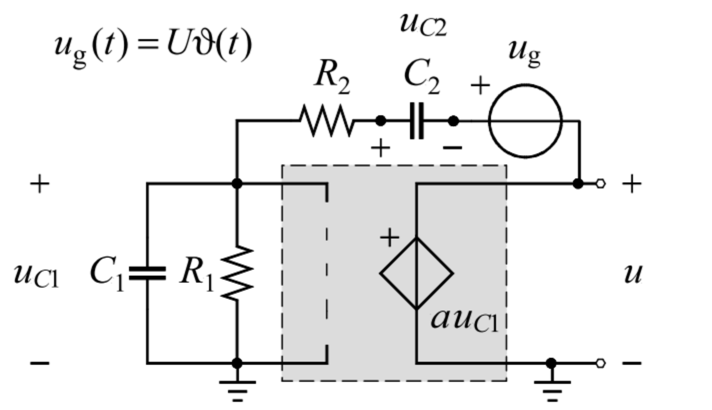
Задатак 2

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) нема почетну енергију и $a=3$, $R_1=R_2=R$, $C_1=C_2=C$, $u_g=U\vartheta(t)$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(7) Одредити напон u и његов домен.

(3) Нацртати график u у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Једначине стања у матричном облику су

Ред кола је

Напон u и његов домен су

График напона u је

Задаци (8)

Задатак 1

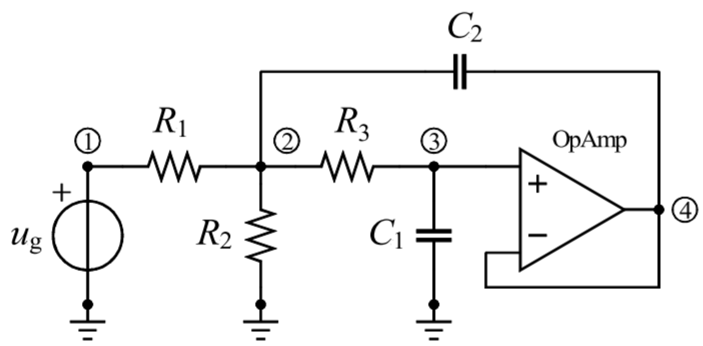
Sallen & Key LP-LQ реализација активног филтра има познате параметре и $R_1 = 2R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = R$, $C_2 = \frac{\sqrt{2}}{R\Omega}$, $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,R\Omega}$, $\Omega > 0$. Одредити

(5) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{V}_4(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) амплитудски одзив $A(\omega)$, пропусни опсег 3 dB, његову ширину и горњу и доњу граничну учестаност.

(5) Нацртати амплитудску карактеристику у опсегу $0 \leq \omega \leq 7\Omega$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Трансфер функција је



Нуле и полови су

Амплитудски одзив је

Пропусни опсег 3 dB је

Амплитудска карактеристика је

Задаци (9)

<table>
<tr>
<td>

Задатак 1

LC-реализација филтра (Butterworth maximally flat lowpass approximation) има познате параметре и $L = \sqrt{2}\dfrac{R}{\Omega}$, $C = \sqrt{2}\dfrac{1}{R\Omega}$, $\Omega > 0$. Одредити

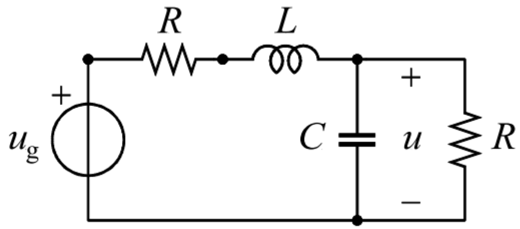
(5) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) амплитудски одзив $A(\omega)$, пропусни опсег 3 dB, његову ширину и горњу и доњу граничну учестаност.

(5) Нацртати амплитудску карактеристику за $0 \le \omega \le 7\Omega$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Трансфер функција је

</td>
<td>



Нуле и полови су

Амплитудски одзив је

Пропусни опсег 3 dB је

Амплитудска карактеристика је

</td>
</tr>
</table>

Задаци (10)

Задатак 1

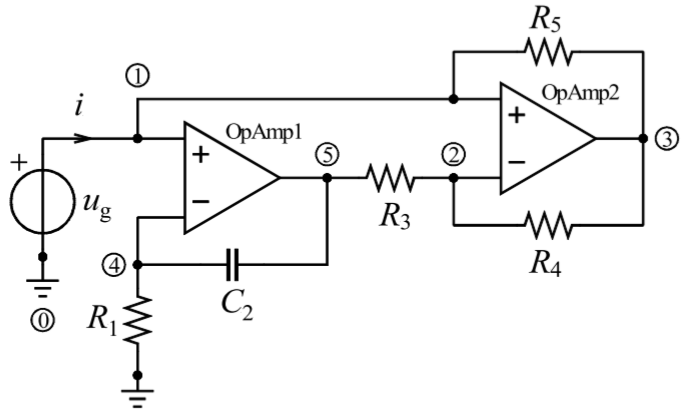
Синтетички калем (synthetic inductor, simulated inductor) са Риордановим жиратором, за практичну реализацију чисто индуктивног елемента без намотаја проводне жице (на пример, у мерној опреми за експерименталан лабораторијски рад), има познате параметре. Одредити

(7) једначину одзива за улазну струју i

(3) уопштену комплексну функцију кола

$$\underline{Z}(\underline{s}) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}{\underline{I}(\underline{s})}$$

(5) напон кондензатора $u_{54}(t)$ и његов домен ако је побуда $u_{\mathrm{g}}(t) = U\,\vartheta(t)$.



Једначина одзива за струју i је

Уопштена комплексна функција кола је

Напон кондензатора u_{54} и његов домен су

Задаци (11)

Задатак 1

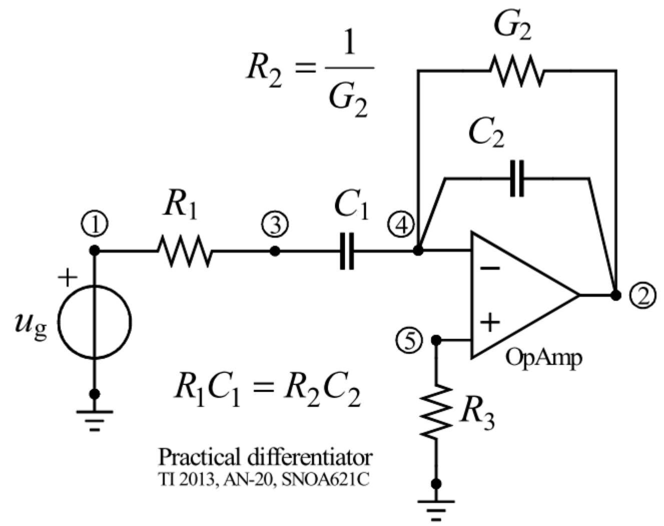
Аналогни електронски диференцијатор за практичну имплементацију има познате параметре R_1, C_1, C_2, G_2, $R_2 = 1/G_2$, $R_1 C_1 = R_2 C_2 = T$, R_3, и $u_g(t) = U\vartheta(t)$.

Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_2(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) излазни напон $v_2(t)$ и његов домен,

(4) одскочни одзив идеалног диференцијатора, када је $R_1 = 0$, $C_2 = 0$, и његов домен.



Трансфер функција је

Нуле и полови су

Напон $v_2(t)$ и његов домен су

Одскочни одзив идеалног диференцијатора и његов домен су

Задаци (12)

Задатак 1

KHN-реализација филтра (Kerwin-Huelsman-Newcomb, state-variable biquad, UAF42) има познате параметре и $R_1 = R$, $R_2 = 2R$,

$$R_4 = R,\ R_3 = R_5 = R_7 = R,\ C_6 = C_8 = \frac{1}{R\Omega}.$$

Познати су реални параметри $R, \Omega > 0$.

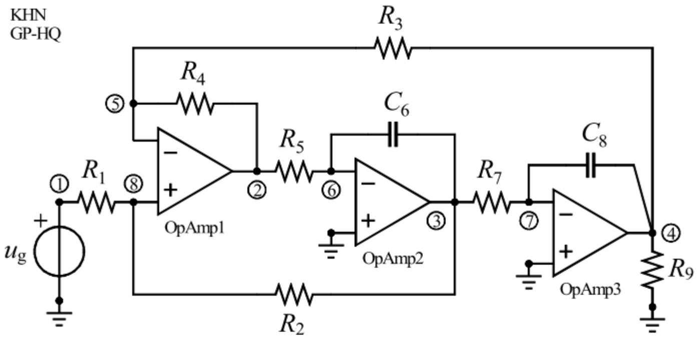
Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_3(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове, амплитудски одзив $A(\omega)$,

(5) пропусни опсег 3 dB, његову ширину, и горњу и доњу граничну учестаност.

(4) Нацртати амплитудску карактеристику. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Трансфер функција је



Нуле и полови су

Амплитудски одзив је

Пропусни опсег 3 dB је

Амплитудска карактеристика је

Задаци (13)

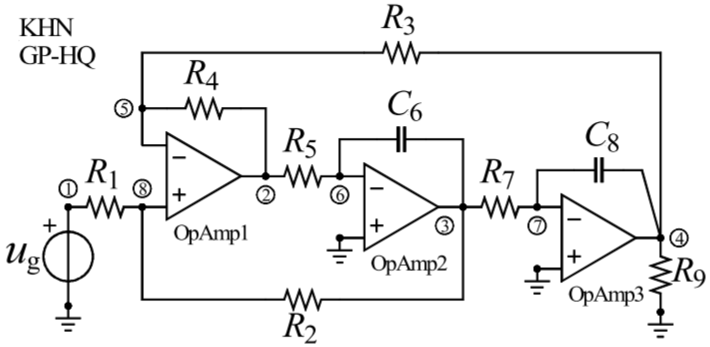
Задатак 1

KHN-реализација филтра (Kerwin-Huelsman-Newcomb, state-variable biquad, UAF42) има познате параметре и $R_1 = R$, $R_2 = R_4 = \frac{1}{2} R$, $R_3 = R_5 = R_7 = R$, $C_6 = C_8 = \frac{1}{\sqrt{2} R \Omega}$. Познати су реални параметри $R, \Omega > 0$. Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{V}_4(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) амплитудски одзив $A(\omega)$, пропусни опсег 3 dB, његову ширину, и горњу и доњу граничну учестаност.

(4) Нацртати амплитудску карактеристику. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Трансфер функција је

Нуле и полови су

Амплитудски одзив је

Пропусни опсег 3 dB је

Амплитудска карактеристика је

Задаци (14)

Задатак 1

ТТ реализација филтра (Tow-Thomas, state-variable biquad, MAX274) има познате параметре и $R_1 = \frac{3}{2}R$, $R_2 = R_3 = R$, $R_4 = \frac{3}{4}R$, $R_7 = R_8 = R$, $C_1 = C_2 = \frac{1}{R\Omega}$.

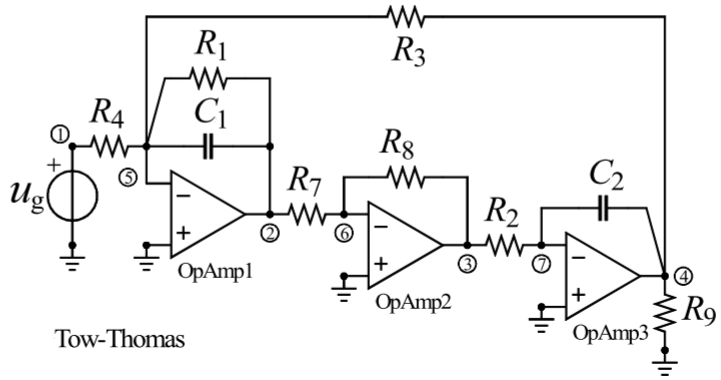
Познати су реални параметри $R, \Omega > 0$.

Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{V}_3(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове, амплитудски одзив $A(\omega)$,

(5) пропусни опсег 3 dB, његову ширину, и горњу и доњу граничну учестаност.

(4) Нацртати амплитудску карактеристику. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Трансфер функција је

Нуле и полови су

Амплитудски одзив је

Пропусни опсег 3 dB је

Амплитудска карактеристика је

Задаци (15)

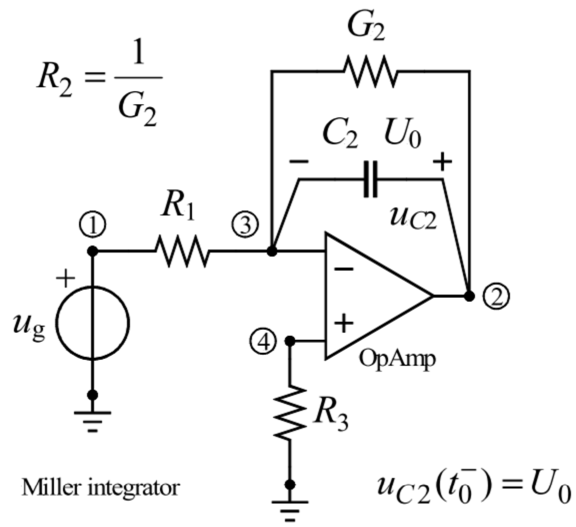
Задатак 1

Аналогни електронски интегратор (Miller integrator) има познате параметре R_1, C_2, G_2, $R_2 = 1/G_2$, R_3, и $u_{C2}(t_0^-) = U_0$, $t_0 = 0$, $u_g(t) = U\vartheta(t)$. Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_2(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) напон $v_2(t)$ и његов домен,

(4) импулсни одзив идеалног интегратора, када је $G_2 = 0$, и његов домен.



Трансфер функција је

Нуле и полови су

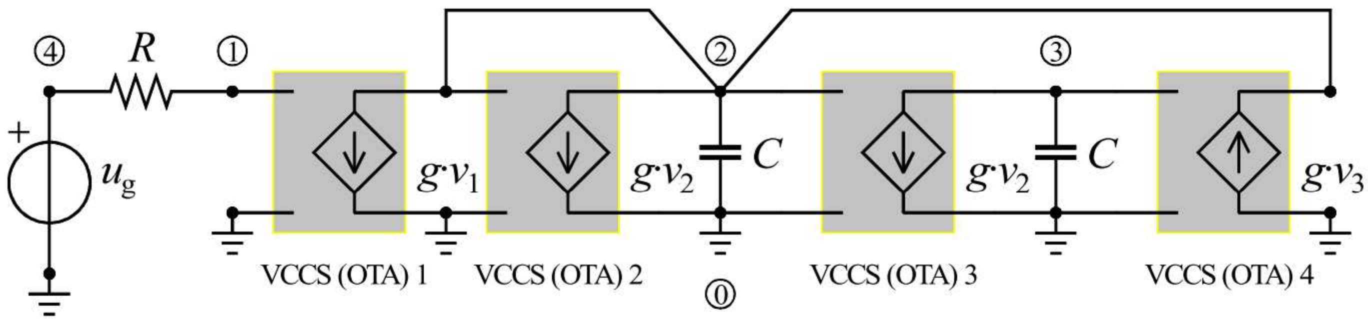
Напон $v_2(t)$ и његов домен су

Импулсни одзив идеалног интегратора је

Задаци (16)

Задатак 1

ОТА-С реализација филтра (Operational Transconductance Amplifier resistorless biquad) има познате параметре. Одредити **(6)** трансфер функцију $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_3(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, **(4)** њене нуле и полове, **(5)** импулсни одзив и његов домен (област дефинисаности).



Трансфер функција је

Нуле и полови су

Импулсни одзив и његов домен су

Задаци (17)

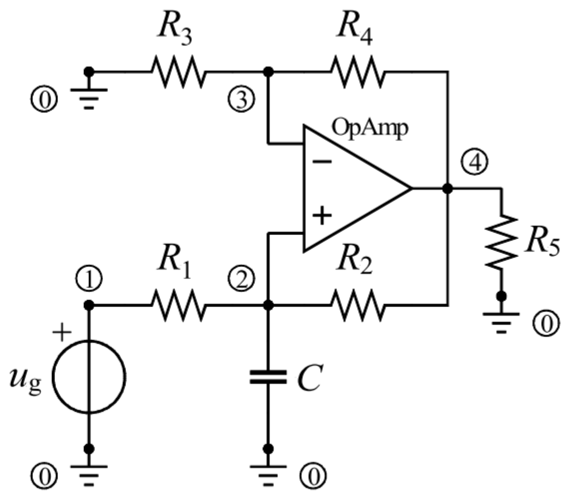
Задатак 1

Аналогни електронски интегратор (Gordon Deboo non-inverting integrator, Maxim Integrated AN 1155, Howland current source with a capacitive load) има познате параметре и $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, $v_2(t_0^-) = U_0$, $t_0 = 0$, $u_g(t) = U\sin(\omega t)\vartheta(t)$. Одредити

(6) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{V}_4(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) напон $v_4(t)$ и његов домен,

(4) импулсни одзив интегратора и његов домен.



Трансфер функција је

Нуле и полови су

Напон $v_4(t)$ и његов домен су

Импулсни одзив интегратора је

Задаци (18)

Задатак 1

KHN-реализација филтра (Kerwin-Huelsman-Newcomb, state-variable biquad, UAF42) има познате параметре и $R_1 = R$, $R_2 = \frac{1}{2}R$, $R_4 = 2R$, $R_3 = R_5 = R_7 = R$, $C_6 = C_8 = \frac{\sqrt{2}}{R\Omega}$.

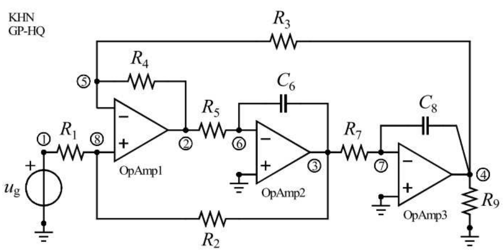
Познати су реални параметри $R, \Omega > 0$.

Одредити

(5) трансфер функцију (уопштену преносну комплексну функцију електричног кола, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{V}_2(\underline{s})}{\underline{U}_\mathrm{g}(\underline{s})}$, њене нуле и полове,

(5) амплитудски одзив $A(\omega)$, пропусни опсег 3 dB, његову ширину и горњу и доњу граничну учестаност.

(5) Нацртати амплитудску карактеристику. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Трансфер функција је

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^2}{\underline{s}^2 + \sqrt{2}\Omega\underline{s} + \Omega^2}$$

Нуле и полови су

$$\underline{s}_\mathrm{z} \in \{0, 0\},\ \underline{s}_\mathrm{p} \in \left\{\frac{-1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\Omega, \frac{-1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\Omega\right\}$$

Амплитудски одзив је

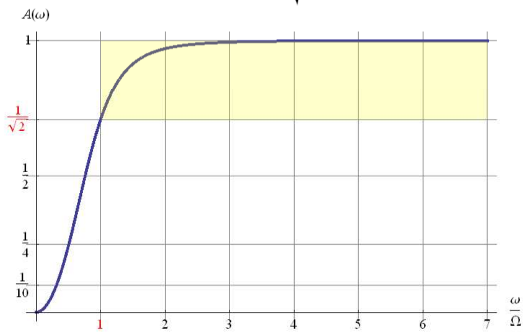
$$A(\omega) == \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \Omega^4}}$$

Пропусни опсег 3 dB је

$$\omega_1 = \Omega,\ \omega_2 = \infty,\ B_{\omega 3\mathrm{dB}} = \infty$$

Амплитудска карактеристика је

$$A(\omega) = |\underline{H}(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{(\frac{\omega}{\Omega})^2}{\sqrt{(\frac{\omega}{\Omega})^4 + 1}}$$



Задаци (19)

Задатак 1

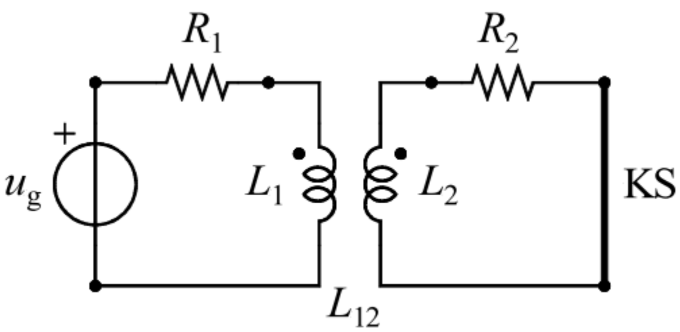
Електрично коло са слике има познате вредности елемената: $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L$. Трансформатор је симетричан са савршеном спрегом. Побуда је $u_g(t) = U\,e^{-at}\,h(t)$,

$a = \dfrac{R}{2L}$.

(5) Одредити струју краткоспојника KS.

(5) Одредити ред кола.

(5) Нацртати граф кола.



Задатак 1

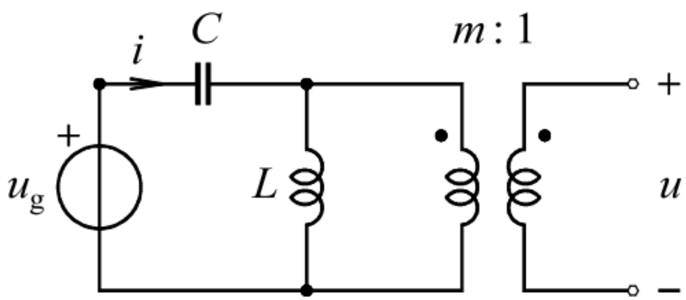
(5) Одредити једначину одзива за напон u електричног кола са слике. Вредности елемената и параметри побуде су познати,

$u_g(t) = U_m \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{CL}}t\right)h(t)$.

Нема сакупљене енергије.

(5) Одредити струју извора, i, и нацртати график струје извора.

(5) Како гласе једначине стања кола? Написати их у матричном облику.



Задаци (20)

Задатак 1

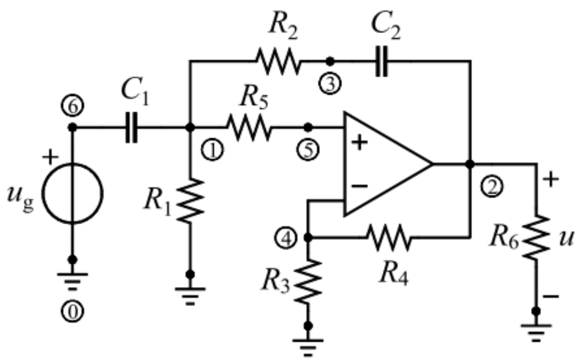
Вредности елемената електричног кола са слике су познате. $R_1 = R$, $R_2 = R$, $R_3 = R$, $R_4 = 2R$, $C_1 = C_2 = C$, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$.

$\vartheta(t)$ је јединична одскочна функција (Хевисајдова функција) која се обележава и са $\mathrm{h}(t)$.

(а) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(б) Одредити напон u за $t > t_0$.

(в) Нацртати график напона u у функцији времена за $t > t_0$.



Једначине стања и ред кола су

Напон је

График напона је

Задаци (21)

Задатак 2

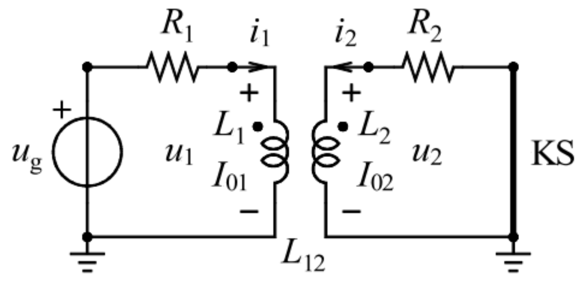
Електроенергетски трансформатор је идеализовано представљен линеарним индуктивним трансформатором $L_1 = L$, $L_2 = L$, $k = \frac{1}{2}$ и отпорностима губитака у намотајима $R_1 = R$, $R_2 = R$. Секундар је краткоспојен а примар је побуђен напонским извором импулсног напона $u_g(t) = \Phi\,\delta(t)$. Почетне струје примара и секундара су $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $i_2(t_0^-) = I_{02}$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити ред овог електричног кола.

(5) Одредити струју примара i_1.

(5) Одредити струју секундара i_2.

Ред кола је



Струја примара i_1 је

Струја секундара i_2 је

Задаци (22)

Задатак 1

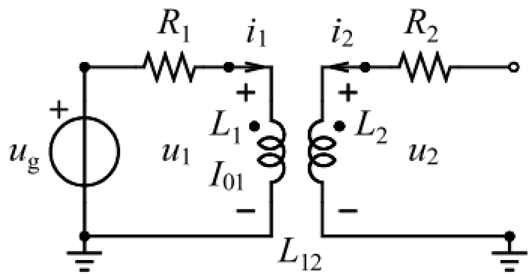
Параметри електричног кола са слике су познати, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$, $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити једначине стања и ред кола.

(5) Одредити струју примара i_1 и нацртати њен график у функцији времена.

(5) Одредити напон секундара u_2 и нацртати његов график у функцији времена.

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Једначине стања су

Ред кола је

Струја примара је

График струје примара је

Напон секундара је

График напона секундара је

Задаци (23)

Задатак 1

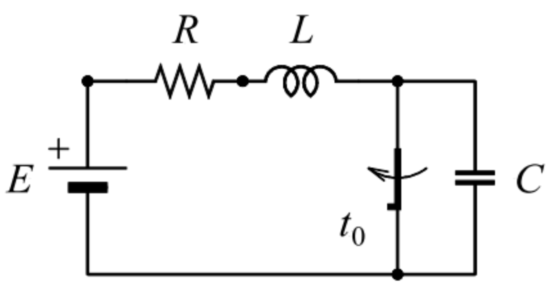
Вредности елемената електричног кола су познате. Прекидач је затворен и одзив је устаљен. У тренутку t_0 прекидач се отвара.

(5) Одредити природне почетне услове у тренутку t_0^-.

(5) Одредити тренутну вредност напона кондензатора, за $t \geq t_0$, ако је $L = CR^2$.

(5) Колика је сакупљена (акумулисана) енергија калема када $t \to +\infty$?

Разматрати општи случај $t_0 \neq 0$.



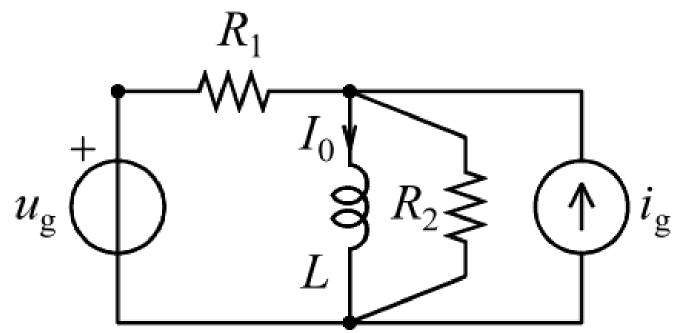
Задатак 2

Вредности елемената електричног кола су познате. $R_1 = R_2 = 2R$, $u_g(t) = U_m \, \mathrm{h}(t)$, $i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\,\mathrm{h}(t)$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити струју калема за $t > t_0$.

(5) Који је ред кола?

(5) Колики је напон отпорника R_1 када $t \to \infty$?



Задаци (24)

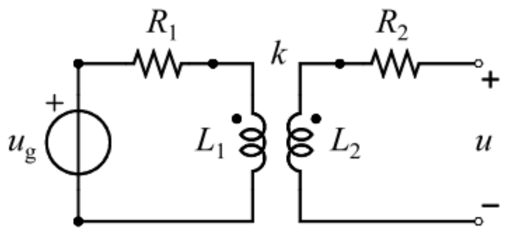
Задатак 2

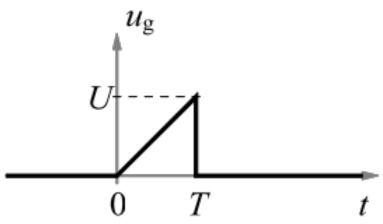
Параметри електричног кола са слике су познати. Побуда је дата на слици, $T = L/R$, $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $L_1 = L$, $L_2 = 4L$, $k = 1/2$.

(5) Одредити индициону функцију за напон отвореног секундара (одскочни одзив).

(5) Одредити напон отвореног секундара и

(5) нацртати његов график. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.





Индициона функција (одскочни одзив) је

Напон отвореног секундара је

График напона отвореног секундара је

Задаци (25)

Задатак 2

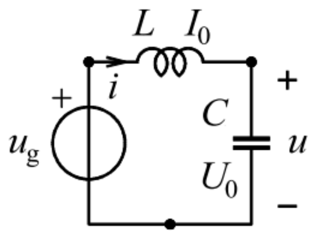
Вредности елемената електричног кола са слике су познате, $u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t)\,\vartheta(t)$,

$i(t_0^-) = I_0$, $u(t_0^-) = U_0$, $t_0 = 0$, $C = \dfrac{1}{\omega^2 L}$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(5) Одредити напон кондензатора u и

(5) скицирати његов график у функцији времена за $t > t_0$.



Једначине стања у матричном облику су

Ред кола је

Напон кондензатора u је

Скица графика напона је

Задаци (26)

Задатак 1

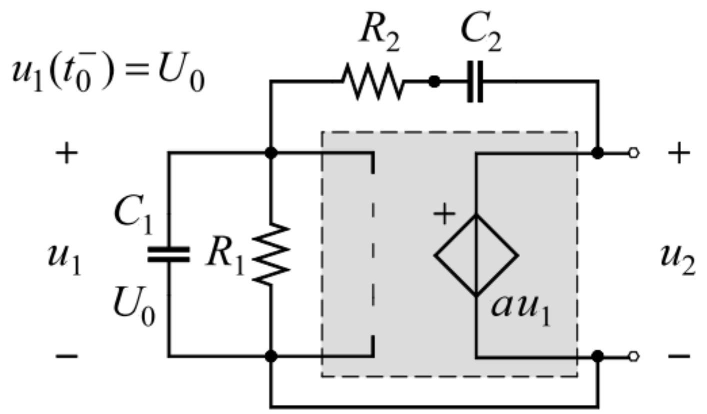
Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

$R_1 = R_2 = R$, $a = 3$, $C_1 = C_2 = C$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику.

(5) Одредити напон u_2 за $t > t_0$.

(5) Нацртати график u_2 у функцији времена за $t > t_0$.



Једначине стања у матричном облику су

Напон u_2 за $t > t_0$ је

График u_2 у функцији времена за $t > t_0$ је

Задаци (27)

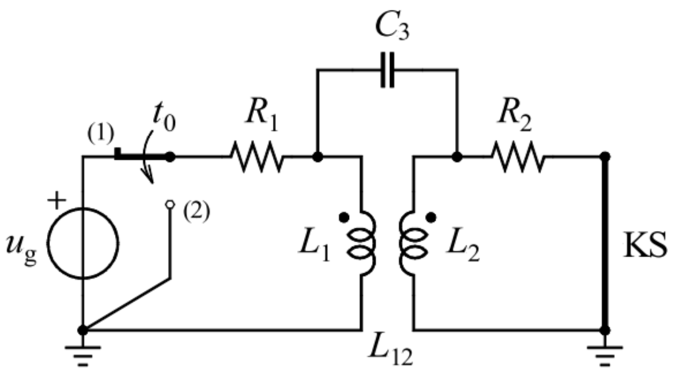
Задатак 1

Линеаран индуктиван трансформатор је симетричан, са савршеном спрегом, а индуктивност примара је L. Отпорности отпорника су R и $u_g = U$. Прекидач је у положају (1) и одзив је устаљен. У тренутку $t_0 = 0$ прекидач се пребацује у положај (2). Одредити

(5) природне почетне услове за тренутак t_0 и ред кола за $t > t_0$,

(5) струју кратког споја за $t > t_0$ и

(5) нацртати њен график.



Природни почетни услови су

Ред кола је

Струја кратког споја је

График струје кратког споја је

Pierre-Simon Laplace 1749–1827

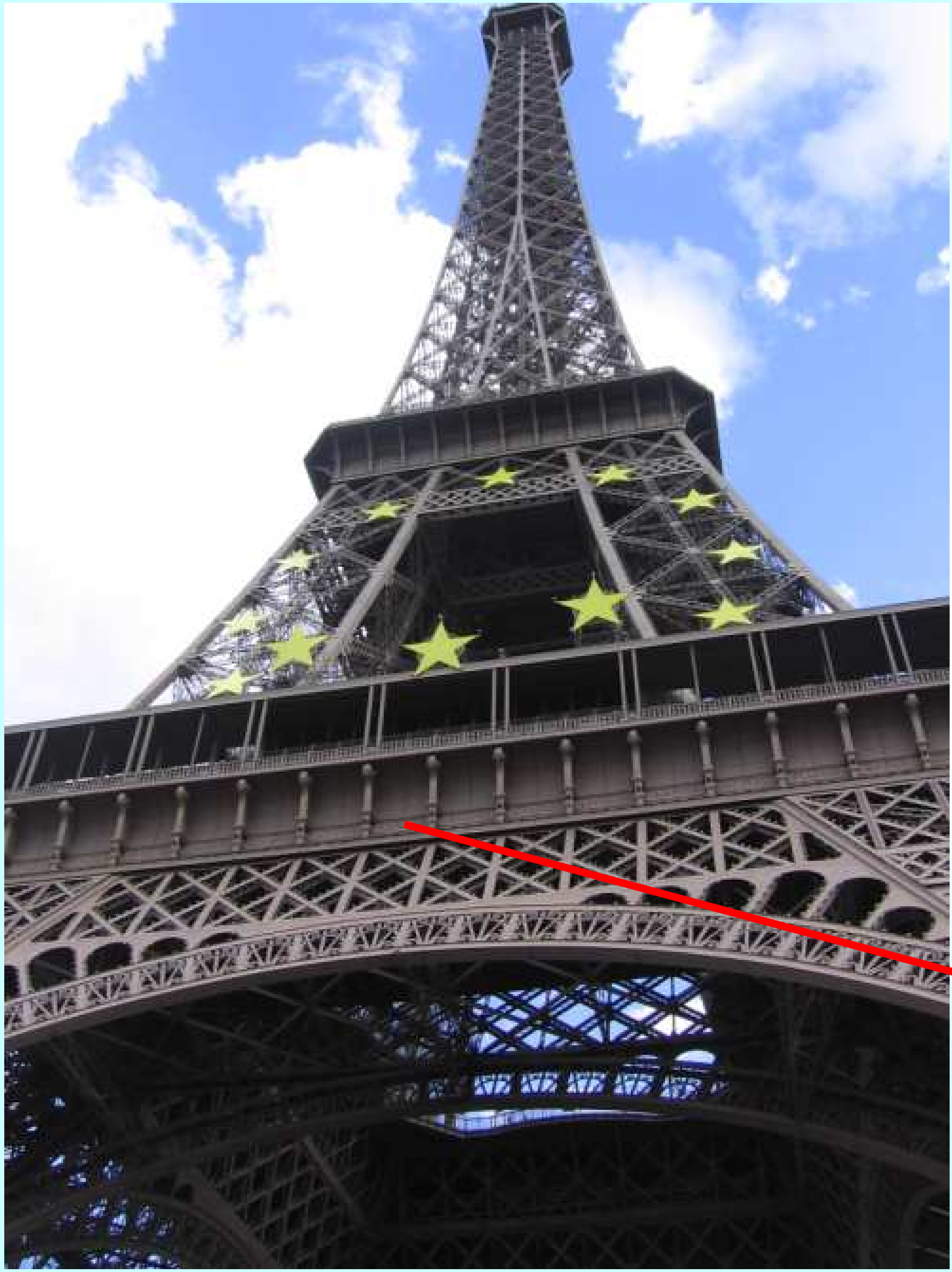
1785 ради на Трансформацији

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

$$u(t) = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{\underline{s}t}\,\mathrm{d}\underline{s}$$

“Je n'avais pas besoin de cette hypothèse-là.”

Математичар и астроном. Докторирао код Jean d'Alembert. Био ментор за докторат Siméon Denis Poisson. Предавао у École Militaire. Члан Académie des sciences. Титулу маркиза добија после Рестаурације. Рођен у Beaumont-en-Auge, Француска.



Pierre Simon (Marquis de) Laplace 1749–1827
http://www.tour-eiffel.fr/