Решавање електричног кола првог реда. Интегратор

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет
Теорија електричних кола
Др Дејан В. Тошић, редовни професор
14. октобар 2019. године

Циљ, покретач (мотив), замисао

Желимо да решимо електрично коло које се састоји од отпорничких (резистивних) електричних елемената, једног динамичког елемента, и напонских и струјних извора (идеалних независних напонских и струјних генератора). Решити електрично коло, по правилу, значи одредити напоне и струје приступа, снаге приступа или елемената, и разне функције кола, на пример, појачање или слабљење изражено количницима напона и струја.
Елемент је резистиван (отпорнички) ако су његове једначине алгебарске, а у њима нема извода и интеграла по времену. Елемент је динамички ако је описан једначинама у којима се појављују изводи и интеграли по времену. Кондензатори, калемови, и индуктивни трансформатори су динамички елементи.
Тражимо опште применљив поступак који је подесан и за ручно решавање, помоћу папира и оловке, као и за машинско аутоматизовано решавање, помоћу рачунара и наменског софтвера.
Усвајамо поступак који се темељи на чворовима и једначинама елемената, без потребе да одређујемо контуре и постављамо једначине Кирхофовог закона за напоне. Чворове електричног кола непосредно уочавамо у задатој шеми, нумеришемо узастопним природним бројевима почев од један, или узастопним целим бројевима почев од нуле ако уочавамо упоредни чвор (референтни чвор, нулти чвор, уземљење, масу, шасију, кућиште, …).

Алгоритам МНА

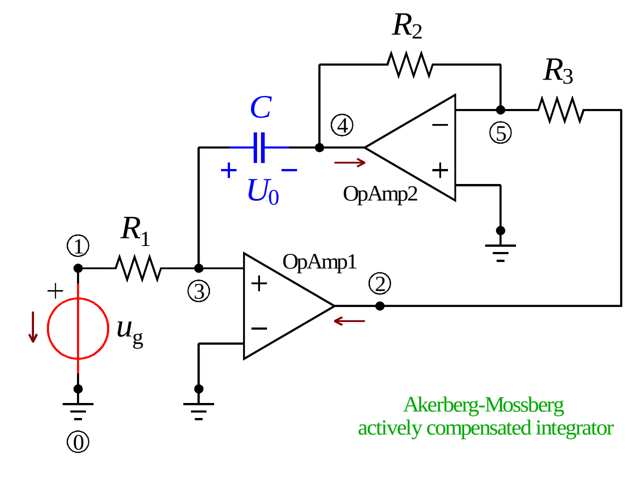
Решавање електричног кола уопштеним поступком напона чворова (МНА) може се описати низом корака. Биће изложен кроз пример.

<table>
<tr>
<td>Задатак

Аналогни електронски интегратор је приказан на слици.

Одредити излазни напон – потенцијал чвора 2.

Сматрати да је побуда $u_g(t) = U_m \sin(\omega t)\vartheta(t)$

Почетни тренутак је 0.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Корак 1

Упоредни чвор обележити нулом. Обележити остале чворове узастопним природним бројевима почев од један.
Усвојити смерове струја приступа које се не могу изразити преко једначина елемената и напона чворова.

Напон чвора (потенцијал чвора) је напон између чвора обележеног са 1, 2, 3,…, и упоредног чвора обележеног са 0.
У примеру постоји шест чворова обележених са 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Струја напонског извора се не може изразити преко једначине елемента и напона чворова.
Струја на излазу операционог појачавача се, такође, не може изразити преко једначина елемента и напона чворова.

Корак 2

Испитати да ли је граф електричног кола повезан. Нацртати граф.
Граф овог електричног кола јесте повезан. Можемо наставити са решавањем применом МНА.
Ако граф електричног кола није повезан, онда уочимо неповезане делове (дисконектоване компоненте), у сваком делу уочимо један чвор, и спојимо уочене чворове. Напони и струје приступа се не мењају оваквим преобликовањем (трансформацијом, трансфигурацијом) кола.

Корак 3

Напоне (потенцијале) чворова обележити са v_1, v_2, v_3, … .
Написати једначине Кирхофовог закона за струје (КЗС) за све чворове осим упоредног (нултог).
Струје приступа, ако је могуће, изразити преко напона (потенцијала) чворова и једначина елемената.
Ако струја приступа елемента не може да се изрази преко напона чворова, онда она остаје као променљива у систему једначина МНА, и додаје се једначина елемента (карактеристика елемента, конститутивна једначина елемента, дефинициона једначина елемента).
Улазна струја операционог појачавача је једнака нули, не уводимо посебан симбол за њу, и ту вредност непосредно укључујемо у једначине КЗС.
Струја напонског извора не може да се изрази преко напона чворова, остаје као променљива у систему једначина МНА, и додаје се једначина напонског извора.
Излазна струја операционог појачавача не може да се изрази преко напона чворова, остаје као променљива у систему једначина МНА, и додаје се једначина операционог појачавача.
Систем једначина МНА је скуп следећих једначина:

КЗС1: $$i_{\mathrm{ug}} + \frac{v_1 - v_3}{R_1} = 0\,,\ v_1 - 0 = u_{\mathrm{g}}$$

КЗС2: $$i_{\mathrm{OpAmp1}} + \frac{v_2 - v_5}{R_3} = 0\,,\ v_3 - 0 = 0$$

КЗС3: $$\frac{v_3 - v_1}{R_1} + 0 + C\frac{\mathrm{d}(v_3 - v_4)}{\mathrm{d}t} = 0$$

КЗС4: $$C\frac{\mathrm{d}(v_4 - v_3)}{\mathrm{d}t} + i_{\mathrm{OpAmp2}} + \frac{v_4 - v_5}{R_2} = 0\,,\ 0 - v_5 = 0$$

КЗС5: $$\frac{v_5 - v_4}{R_2} + 0 + \frac{v_5 - v_2}{R_3} = 0$$

Променљиве система једначина МНА су напони чворова, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, и струје приступа елемената које не могу да се изразе преко напона чворова, i_{ug}, i_{OpAmp1}, i_{OpAmp2}.

Корак 4

Решити систем једначина МНА. У задатку се тражи само напон v_2. Не траже се струје.

Посматрајмо једначине МНА и запазимо да се свака од струја i_{ug}, i_{OpAmp1}, i_{OpAmp2} појављује као једина струја само у по једној једначини КЗС. Изоставимо те једначине. Добијамо мањи (редукован) систем једначина.

$$v_1 = u_{\mathrm{g}}$$
$$v_3 = 0$$
$$\frac{v_3 - v_1}{R_1} + C\frac{\mathrm{d}(v_3 - v_4)}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$-v_5 = 0$$
$$\frac{v_5 - v_4}{R_2} + \frac{v_5 - v_2}{R_3} = 0$$

На основу једначина елемената можемо уклонити (елиминисати) променљиве v_1, v_3 и v_5.

$$\frac{-u_{\mathrm{g}}}{R_1} + C\frac{\mathrm{d}(-v_4)}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$\frac{-v_4}{R_2} + \frac{-v_2}{R_3} = 0$$

Из друге једначине је $v_4 = -v_2 R_2 / R_3$ и то замењујемо у прву једначину.

$$\frac{-u_{\mathrm{g}}}{R_1} + C\frac{\mathrm{d}(v_2 R_2 / R_3)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Корак 5

Сређивањем се добија једначина одзива по траженом потенцијалу.

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{R_3}{C R_1 R_2} u_{\mathrm{g}}, \ t > 0$$

Корак 6

Решимо диференцијалну једначину одзива. Одредимо прво одзив на побуду $v_{2\mathrm{ug}}$ сматрајући да нема почетне енергије у колу, односно да су сви почетни услови једнаки нули.
Побуда је каузална функција времена, $u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t)\vartheta(t)$, и једнака је нули за негативно време.
Конкретно, у овом случају, диференцијалну једначину одзива решавамо непосредном интеграцијом за $t \geq 0$ и знамо да је одзив једнак нули за негативно време, $v_2 = 0$ за $t < 0$.

$$v_{2\mathrm{ug}} = \vartheta(t)\int_0^t \frac{R_3}{C R_1 R_2} u_{\mathrm{g}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \ v_{2\mathrm{ug}} = \vartheta(t)\frac{R_3}{C R_1 R_2}\int_0^t u_{\mathrm{g}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \ v_{2\mathrm{ug}} = \vartheta(t)\frac{R_3}{C R_1 R_2}\int_0^t U_{\mathrm{m}} \sin(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$v_{2\mathrm{ug}} = \vartheta(t)\frac{R_3}{\omega C R_1 R_2} U_{\mathrm{m}}(1 - \cos(\omega t))$$

Одзив на побуду је дефинисан за сваки реалан тренутак времена, његов домен је $t \in \mathrm{R}$, односно област дефинисаности је $-\infty < t < +\infty$.

Одредимо сада одзив на почетне услове v_{20} сматрајући да нема извора у колу, односно да су све побуде једнаке нули.
Решимо диференцијалну једначину одзива када су побуде једнаке нули.

$$\frac{\mathrm{d}v_{20}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$v_{20} = v_{20}(0^+),\ t > 0$$

Одредимо почетни услов $v_{20}(0^+)$ на основу природног почетног услова $u_C(0^-) = U_0$. Прво, запазимо да је број динамичких елемената једнак реду диференцијалне једначине одзива.
Постоји један динамички елемент, кондензатор, и једначина одзива је првог реда.
Ако је број динамичких елемената једнак реду кола, онда је напон кондензатора непрекидан у почетном тренутку $t_0 = 0$.

$$u_C(0^+) = u_C(0) = u_C(0^-) = U_0 .$$

Посматрајмо редукован систем једначина и једначину $u_C = v_3 - v_4$ у тренутку $t = 0^+$.
Подсетимо се да су побуде једнаке нули зато што тражимо одзив на почетне услове.
Додајмо у индексима променљивих нулу као ознаку за одзив на почетне услове.

$$v_{10} = 0$$

$$v_{30} = 0$$

$$\frac{v_{30} - v_{10}}{R_1} + C\frac{\mathrm{d}(v_{30} - v_{40})}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$-v_{50} = 0$$

$$\frac{v_{50} - v_{40}}{R_2} + \frac{v_{50} - v_{20}}{R_3} = 0$$

$$u_{C0} = v_{30} - v_{40}$$

$$t = 0^+$$

$$\frac{0}{R_1} + C\frac{\mathrm{d}(0 - v_{40})}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{0 - v_{40}}{R_2} + \frac{0 - v_{20}}{R_3} = 0$$

$$u_{C0} = 0 - v_{40}$$

$$t = 0^+$$

$$\frac{\mathrm{d}v_{40}}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$$

$$\frac{v_{40}(0^+)}{R_2} + \frac{v_{20}(0^+)}{R_3} = 0$$

$$u_{C0}(0^+) = -v_{40}(0^+)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_{20}}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$$

$$v_{20}(0^+) = -v_{40}(0^+)\frac{R_3}{R_2}$$

$$u_{C0}(0^+) = -v_{40}(0^+)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_{20}}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$$

$$v_{20}(0^+) = u_{C0}(0^+)\frac{R_3}{R_2} = U_0\frac{R_3}{R_2}$$

Одзив на почетне услове је

$$v_{20}(t) = v_{20}(0^+) = U_0\frac{R_3}{R_2},\ t > 0$$

Размотримо овај одзив у почетном тренутку. Напон кондензатора је непрекидан у почетном тренутку, $v_{20}(0^+) = u_{C0}(0^+)\frac{R_3}{R_2}$, одзив је сразмеран напону кондензатора, па је и непрекидан у почетном тренутку, $v_{20}(0^+) = v_{20}(0) = v_{20}(0^-) = U_0\frac{R_3}{R_2}$. Због тога можемо писати

$$v_{20}(t) = U_0\frac{R_3}{R_2},\ t \ge 0 .$$

Одзив на почетне услове није познат за негативно време зато што није познато како је настао почетни услов.
Потпуни одзив је збир одзива на почетне услове и одзива на побуду.

$$v_2(t) = v_{20} + v_{2\mathrm{ug}} = U_0\frac{R_3}{R_2} + \vartheta(t)\frac{R_3}{\omega C R_1 R_2}U_\mathrm{m}(1-\cos(\omega t)),\ t \ge 0 .$$

Област дефинисаности, домен, потпуног одзива је исти као и домен одзива на почетне услове. Потпуни одзив није познат за негативно време, за $t < 0$.
Одзив на каузалну побуду је каузална функција времена и увек садржи Хевисајдову функцију $\vartheta(t)$, коју називамо и јединична одскочна функција.

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Дискусија

Електрично коло чија је диференцијална једначина првог реда зовемо коло првог реда. Ова једначина постоји, у општем случају, када у колу постоји један динамички елемент, калем или кондензатор.
Избором да све отпорности буду R добијамо коло са најмањим распоном вредности елемената. Тада је диференцијална једначина одзива облика

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{CR}u_\mathrm{g}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = K\,u_\mathrm{g},\ K = \frac{1}{CR} > 0$$

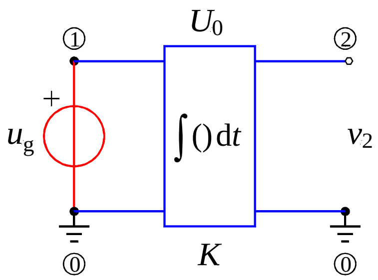
а тражени одзив, потенцијал v_2,

$$v_2(t) = U_0 + \vartheta(t)K\int_0^t u_\mathrm{g}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$v_2(t) = U_0 + \vartheta(t)\frac{1}{\omega CR}U_\mathrm{m}(1-\cos(\omega t)),\ t \ge 0 .$$

На основу једначине одзива и општег решења запажа се да је одзив одређени интеграл побуде. Ово електрично коло се назива интегратор, временски константан сабирак је почетна вредност интегратора, а константа K је константа интегратора.

Сликовна представа (графички симбол) интегратора је



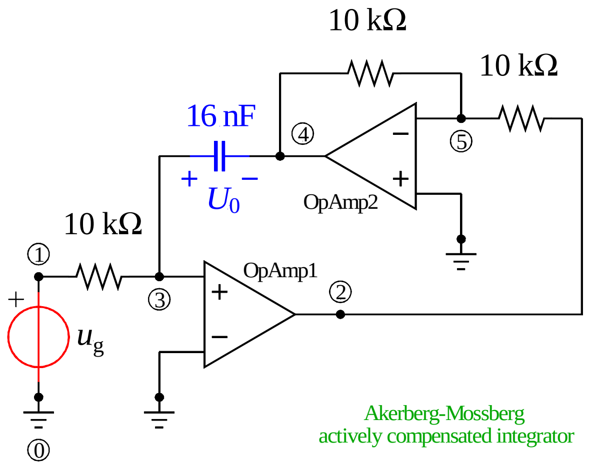
Константа интегратора је позитивна, па овакав интегратор зовемо неинвертујући.
Интегратор анализиран у овом примеру су предложили D. Akerberg и K. Mossberg. Коришћен је пар операционих појачавача да би се смањио утицај несавршености комерцијално доступних чипова који имплементирају операциони појачавач

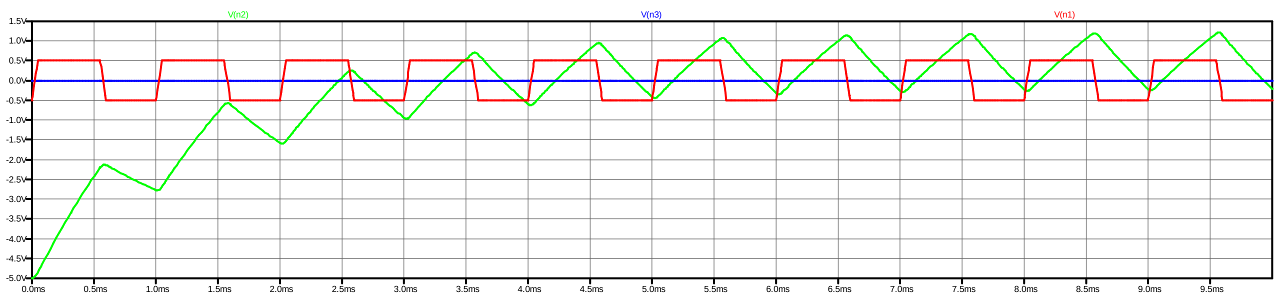
Практични захтеви

У практичном, имплементираном, интегратору потребно је остварити постављање почетног услова у датом тренутку времена. То се може постићи електронским прекидачима.
Постоје и друга техничка решења интегратора, са једним операционим појачавачем.
У практичним интеграторима, са реалним несавршеним операционим појачавачима, се често ставља отпорник велике отпорности, на пример $100\,\mathrm{k\Omega}$, паралелно кондензатору да би се обезбедило да напон кондензатора буде једнак нули у одсуству побуде

Самосталан рад

Симулирајте интегратор са слике у слободном програму, на пример LTspice.
Претпоставите да је побуда периодична поворка правоугаоних биполарних импулса са периодом $1\,\mathrm{ms}$, амплитудом $0.5\,\mathrm{V}$, временом успона $50\,\mu\mathrm{s}$, и временом опадања $50\,\mu\mathrm{s}$.





Симболичка анализа

Коло се може решити програмом SALECx. Видети прилог.

Application of Free Software and Open Hardware, PSSOH 2019, International Conference, University of Belgrade – School of Electrical Engineering, Belgrade, Serbia, Oct. 26, 2019.
http://pssoh.etf.bg.ac.rs/
Primena slobodnog softvera i otvorenog hardvera

http://pssoh.etf.bg.ac.rs/

https://github.com/pssoh/SALECx

https://zenodo.org/record/3464103#.XY-nt2ZS_IU

DOI: 10.5281/zenodo.3464103

```
(%i1)	load("C:\\SALECx\\SALECx.mac") $
```
Dejan Tosic, SALECx 2019 v1.0
Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima

```
(%i2)	SALECxPrint: true $
```

```
(%i3)	Integrator_shema: [
	 ["V", "Ug", 1, 0, Ug],
	 ["R", "R1", 1, 3, R1],
	 ["C", "C", 3, 4, C, U0],
	 ["OpAmp", "OpAmp1", [3,0], 2],
	 ["OpAmp", "OpAmp2", [0,5], 4],
	 ["R", "R2", 4, 5, R2],
	 ["R", "R4", 5, 2, R3]
	]$
```

```
(%i4)	Integrator_response: SALECx(Integrator_shema);
```
Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima
SALECx version 1.0, Prof. Dr. Dejan Tošić, tosic@etf.rs
Number of nodes excluding 0 node: 5
Electric circuit specification: $[[V,Ug,1,0,Ug],[R,R1,1,3,R1],[C,C,3,4,C,U0],[OpAmp,OpAmp1,[3,0],2],[OpAmp,OpAmp2,[0,5],4],[R,R2,4,5,R2],[R,R4,5,2,R3]]$
Supported element: [true,true,true,true,true,true,true]
Element values: $[Ug,R1,C,false,false,R2,R3]$
Initial conditions: $[false,false,U0,false,false,false,false]$
MNA equations: $$\left[\frac{V_1-V_3}{R1}+I_{Ug}=0,\frac{V_2-V_5}{R3}+I_{OpAmp1}=0,\left(V_3-V_4\right)C\,s-C\,U0+\frac{V_3-V_1}{R1}=0,\left(V_4-V_3\right)C\,s+C\,U0+\frac{V_4-V_5}{R2}+I_{OpAmp2}=0,\frac{V_5-V_2}{R3}+\frac{V_5-V_4}{R2}=0,-V_5=0,V_3=0,V_1=Ug\right]$$
MNA variables: $[V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,I_{OpAmp2},I_{OpAmp1},I_{Ug}]$

(Integrator_response) $$\left[V_1=Ug,V_2=\frac{R3\,Ug+C\,R1\,R3\,U0}{C\,R1\,R2\,s},V_3=0,V_4=-\frac{Ug+C\,R1\,U0}{C\,R1\,s},V_5=0,I_{OpAmp2}=\frac{C\,R2\,Ug\,s+Ug+C\,R1\,U0}{C\,R1\,R2\,s},I_{OpAmp1}=-\frac{Ug+C\,R1\,U0}{C\,R1\,R2\,s},I_{Ug}=-\frac{Ug}{R1}\right]$$

```
(%i5)	V2: V[2], Integrator_response;
```
(V2) $$\frac{R3\,Ug+C\,R1\,R3\,U0}{C\,R1\,R2\,s}$$

```
(%i6)	assume(w>0);
```
(%o6) $[w>0]$

```
(%i7)	v2t: ilt(ev(V2,Ug=laplace(Um*sin(w*t),t,s)),s,t),
	expand;
```
(v2t) $$-\frac{R3\,Um\cos\left(t\,w\right)}{C\,R1\,R2\,w}+\frac{R3\,Um}{C\,R1\,R2\,w}+\frac{R3\,U0}{R2}$$

```
(%i8) collectterms(v2t,Um);
```

(%o8) $$Um\left(\frac{R3}{C\,R1\,R2\,w}-\frac{R3\cos\left(t\,w\right)}{C\,R1\,R2\,w}\right)+\frac{R3\,U0}{R2}$$

```
(%i9) V2R: V2, [R1=R, R2=R, R3=R], expand;
```

(V2R) $$\frac{Ug}{C\,R\,s}+\frac{U0}{s}$$

```
(%i10) v2Rt: v2t,[R1=R, R2=R, R3=R] ;
```

(v2Rt) $$-\frac{Um\cos\left(t\,w\right)}{C\,R\,w}+\frac{Um}{C\,R\,w}+U0$$

```
(%i11) collectterms(v2Rt,Um);
```

(%o11) $$Um\left(\frac{1}{C\,R\,w}-\frac{\cos\left(t\,w\right)}{C\,R\,w}\right)+U0$$