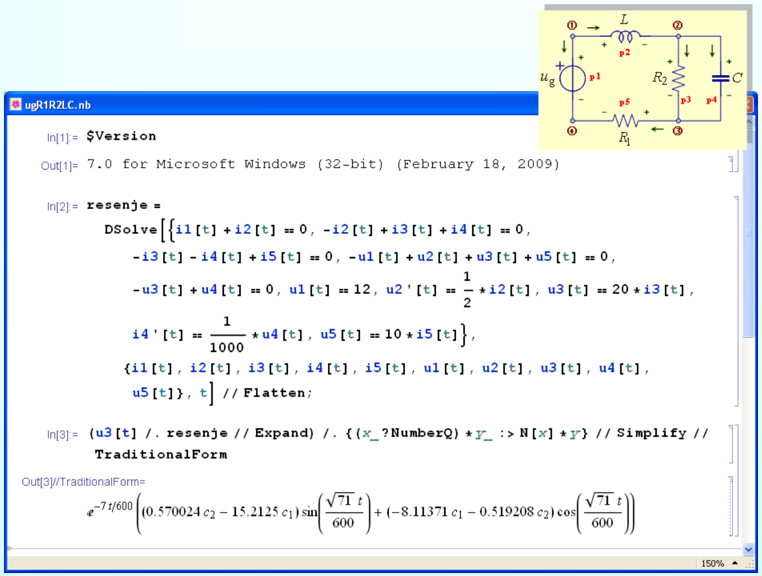
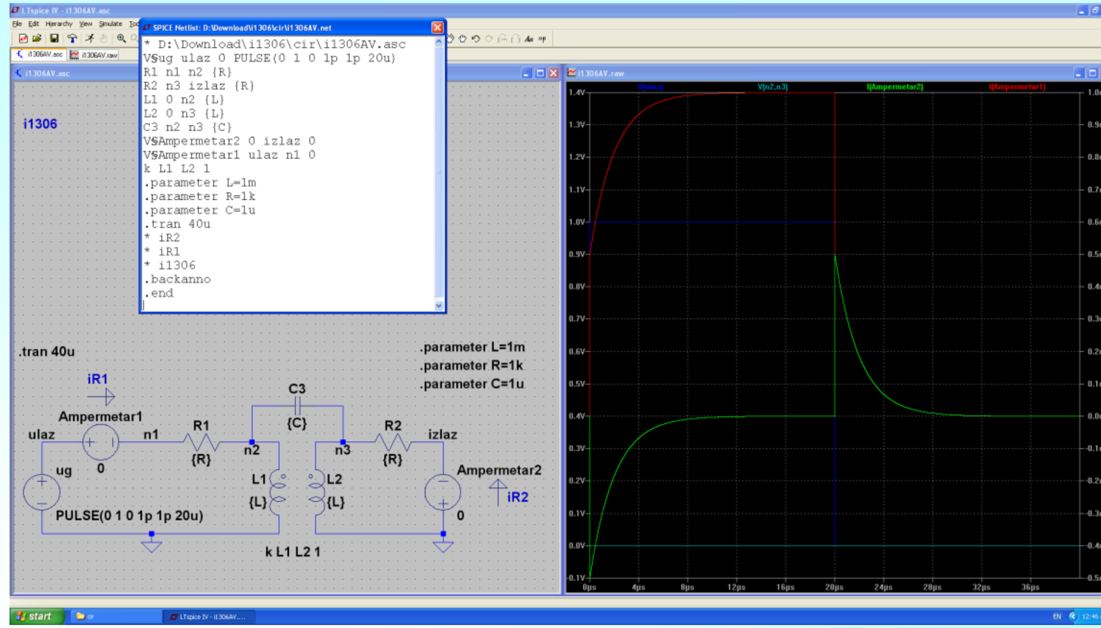
Теорија електричних кола



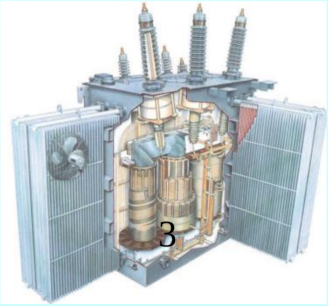
Милка Потребић



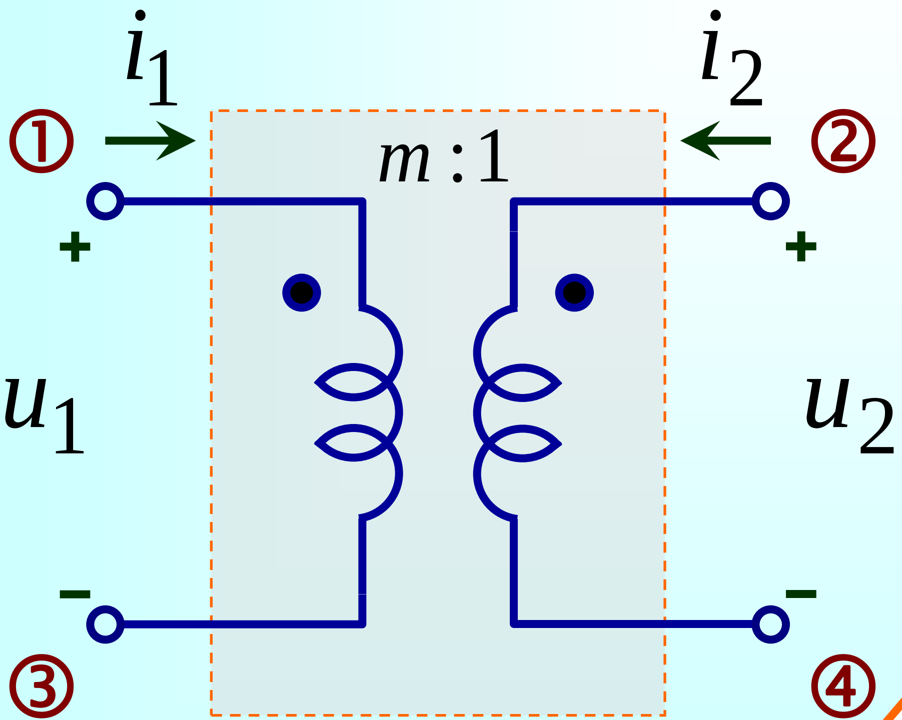
Решавање у временском домену

Трансформатори

Идеалан трансформатор, Индуктиван линеаран трансформатор



Једначине и шема ИТ

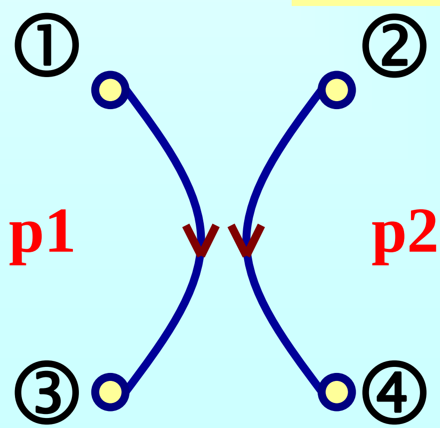


$$\begin{cases} u_1 = m u_2 + 0 \cdot (-i_2) \\ i_1 = 0 \cdot u_2 + \dfrac{1}{m}(-i_2) \end{cases}$$

реципрочан елемент

$$\det(a) = 1$$

Једначине важе за произвољне временске промене напона и струја



Преносни број ИТ

- ***Преносни број*** је параметар ИТ, вредност елемента, и представља однос броја завојака намотаја примара и секундара

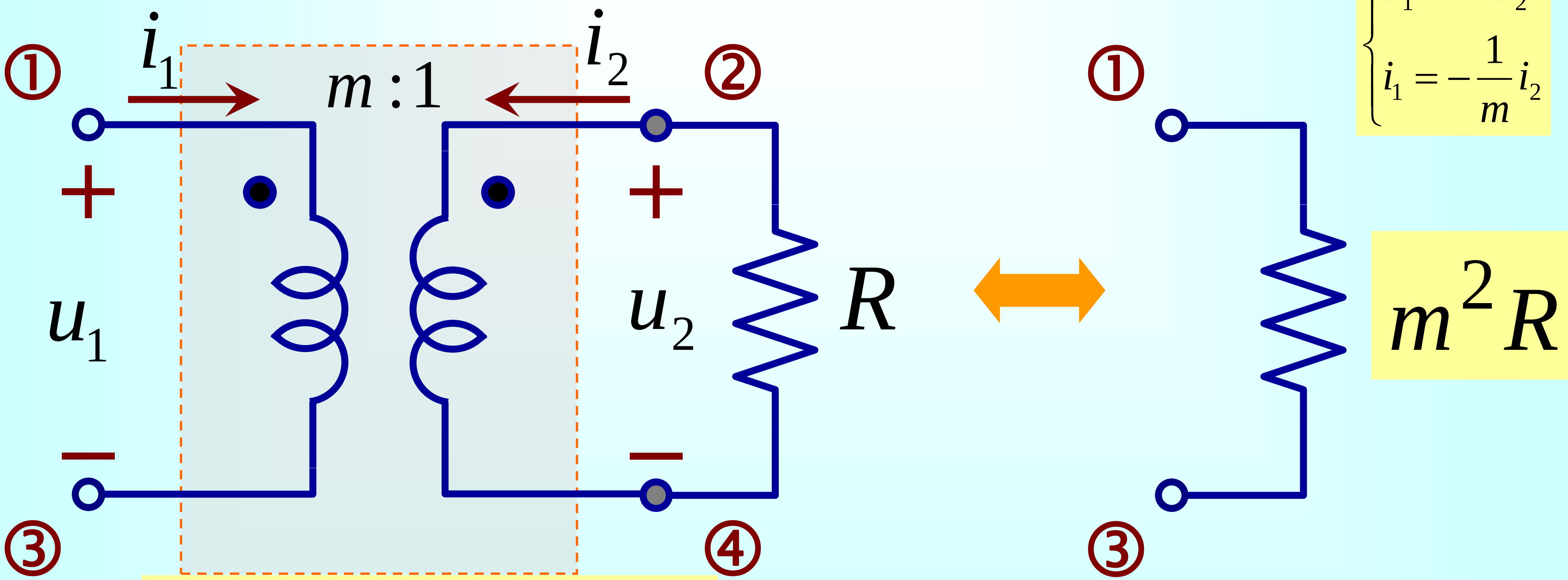
$$m = \frac{N_1}{N_2}$$

- *Преносни број* је реалан позитиван број
- Улазна снага ИТ је идентички једнака нули у сваком тренутку времена

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$

Својство претварања (конверзије) отпорности ИТ

$$\begin{cases} u_1 = m u_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{m} i_2 \end{cases}$$

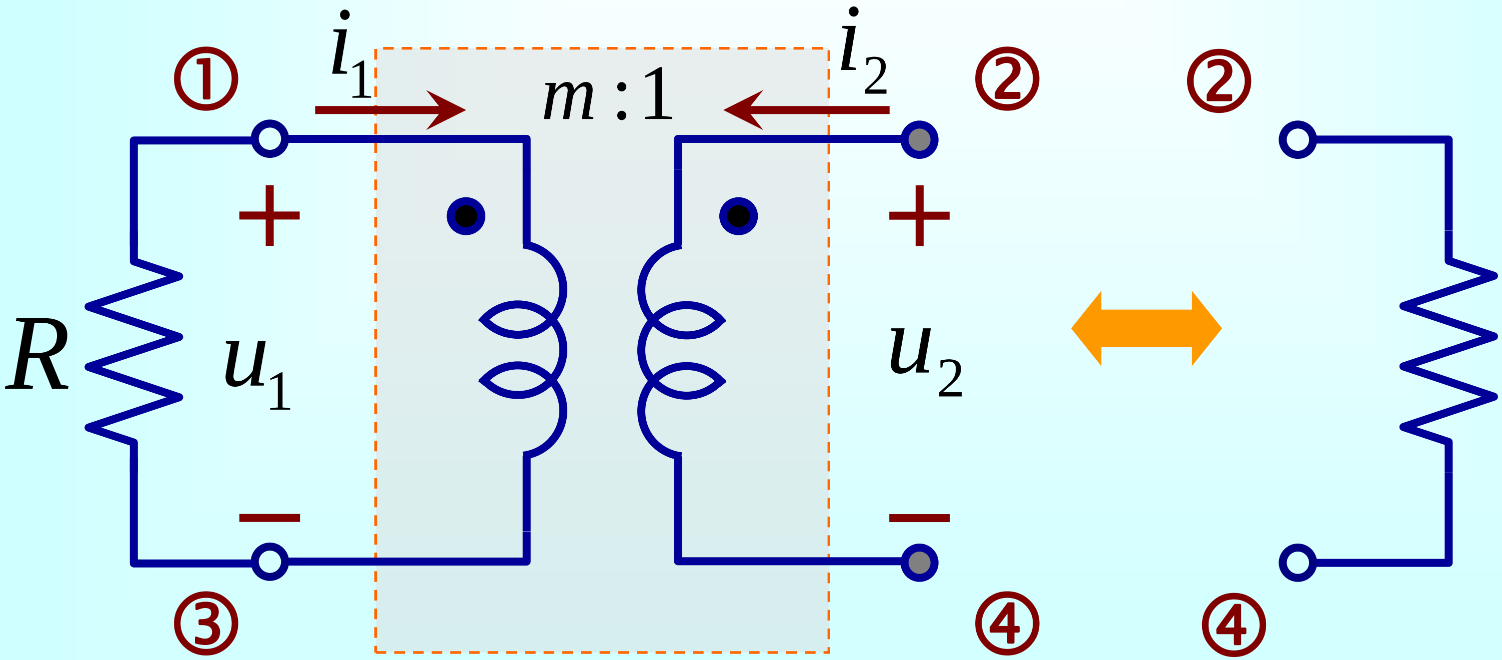


$$R_{13} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{m u_2}{-\dfrac{1}{m} i_2} = -m^2 \frac{u_2}{i_2} = m^2 R$$

Идеалан трансформатор чији је секундар затворен отпорником се понаша, гледано са стране примара, као отпорник чија је отпорност сразмерна квадрату преносног броја

Својство претварања (конверзије) отпорности ИТ

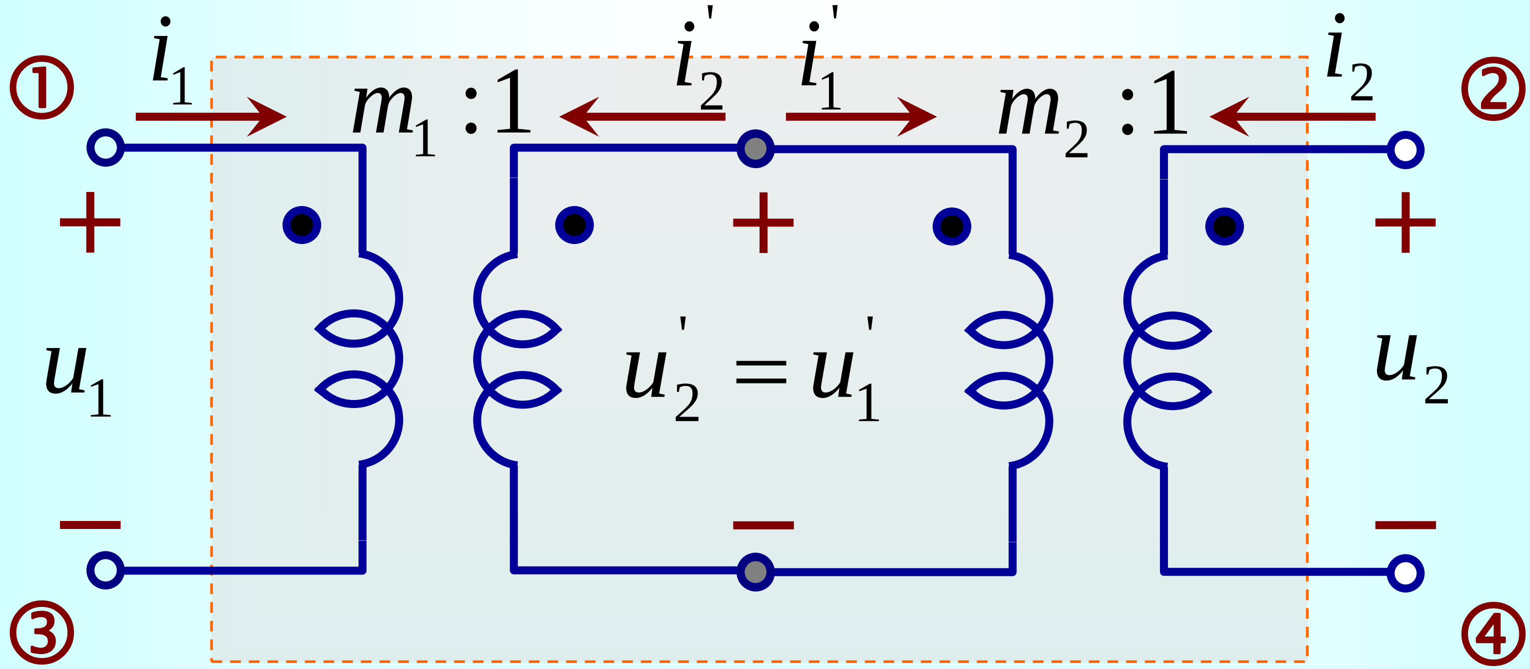
$$\begin{cases} u_1 = m u_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{m} i_2 \end{cases}$$



$$\frac{R}{m^2}$$

$$R_{24} = \frac{u_2}{i_2} = \frac{\dfrac{u_1}{m}}{-m i_1} = -\frac{1}{m^2}\frac{u_1}{i_1} = \frac{R}{m^2}$$

a-параметри мреже



$$u_1 = m_1 u_2'$$
$$i_1 = -\frac{1}{m_1} i_2'$$

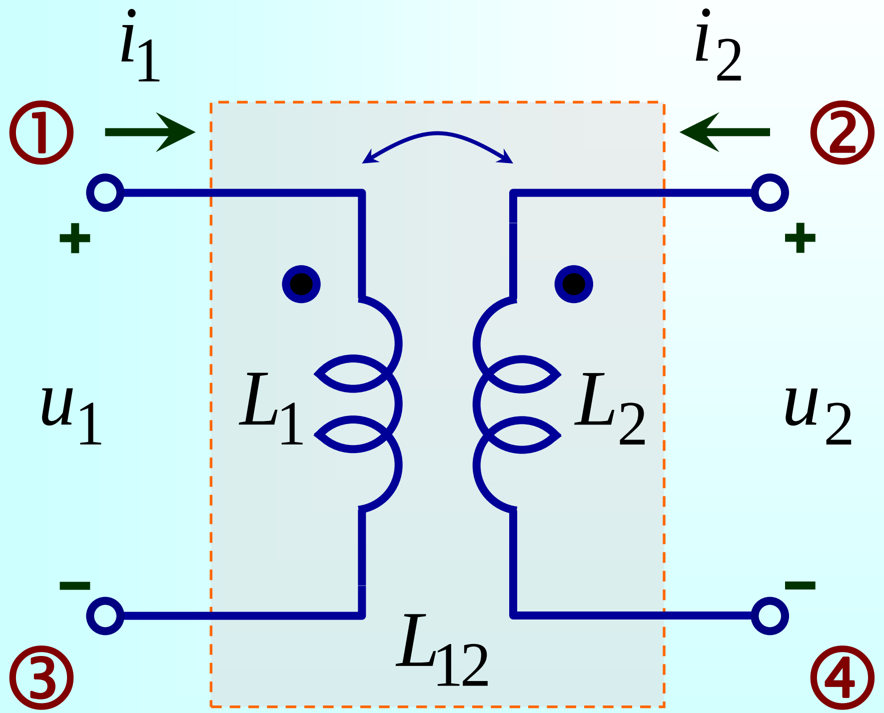
$$u_2' = u_1'$$
$$i_2' = -i_1'$$

$$u_1' = m_2 u_2$$
$$i_1' = -\frac{1}{m_2} i_2$$

$$u_1 = m_1 u_2' = m_1 u_1' = m_1\left(m_2 u_2\right) = m_1 m_2 u_2$$
$$i_1 = -\frac{1}{m_1} i_2' = -\frac{1}{m_1}\left(-i_1'\right) = \frac{1}{m_1 m_2}\left(-i_2\right)$$

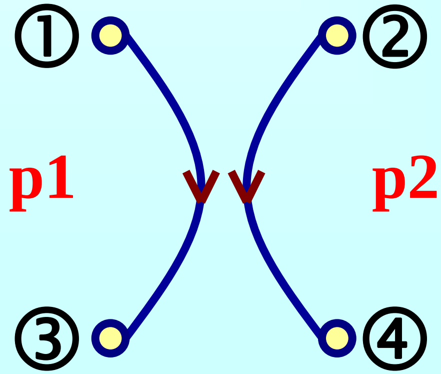
$$a = \begin{bmatrix} m_1 m_2 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_1 m_2} \end{bmatrix}$$

Једначине и шема линеарног индуктивног трансформатора



$$\begin{cases} u_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12} \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = L_{12} \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$$



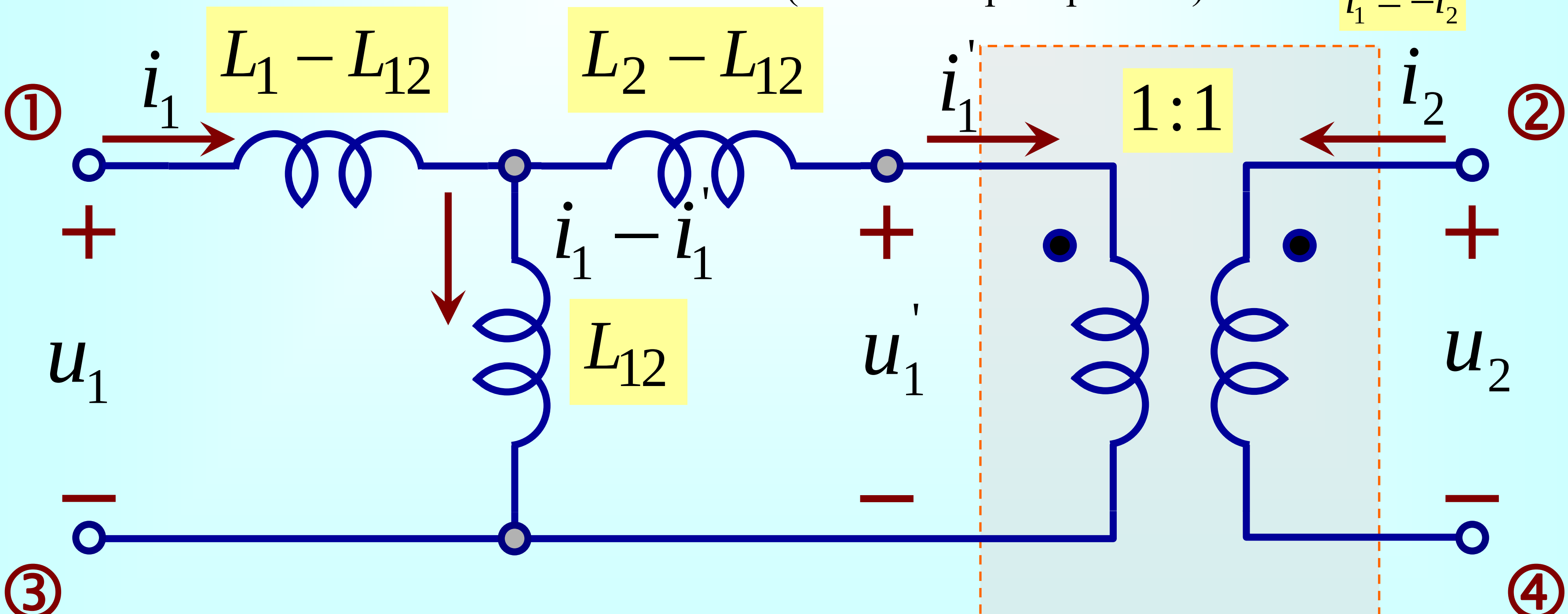
Заменска (еквивалентна) шема

- Две мреже су ***заменске*** (или ***еквивалентне***) ако имају исти број приступа и ако и једна и друга мрежа, када се повежу у коло, узрокују исте напоне и струје у остатку кола
- Заменске шеме уводимо да би поједноставили шему кола или да би представили коло у подеснијем облику

Заменска шема са Т-мрежом калемова који нису у спрези

Ова шеме нема спрегнуте калемове

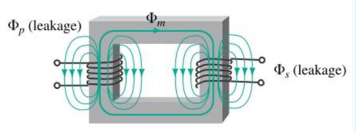
Служи за раздвајање приступа (галванско распрезање) $u_1^{'} = u_2$ $i_1^{'} = -i_2$



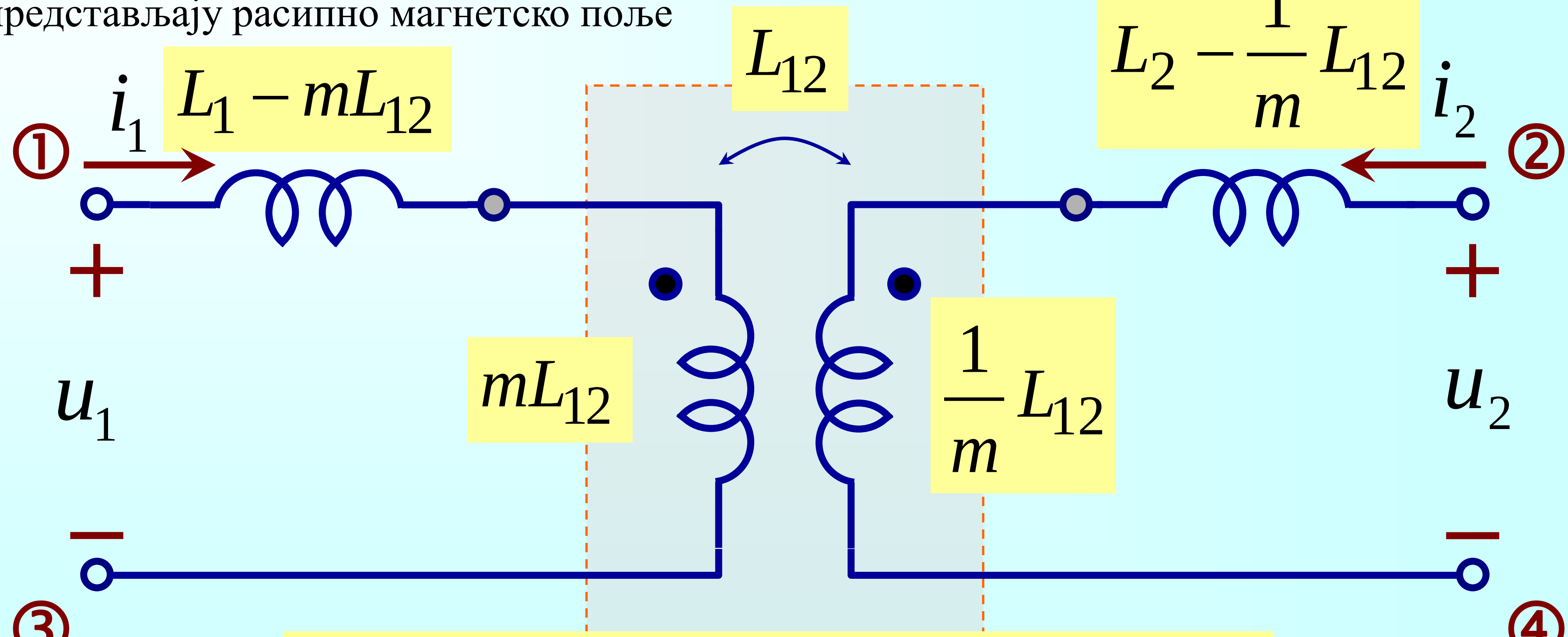
$$u_1 = (L_1 - L_{12})\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}(i_1 - i_1^{'})}{\mathrm{d}t} = (L_1 - L_{12})\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = u_1^{'} = L_{12}\frac{\mathrm{d}(i_1 - i_1^{'})}{\mathrm{d}t} - (L_2 - L_{12})\frac{\mathrm{d}i_1^{'}}{\mathrm{d}t} = L_{12}\frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t} + (L_2 - L_{12})\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Заменска шема са индуктивним савршеним трансформатором



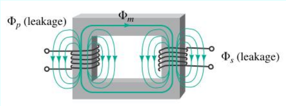
Калемови који нису у спрези (редни калемови) представљају расипно магнетско поље



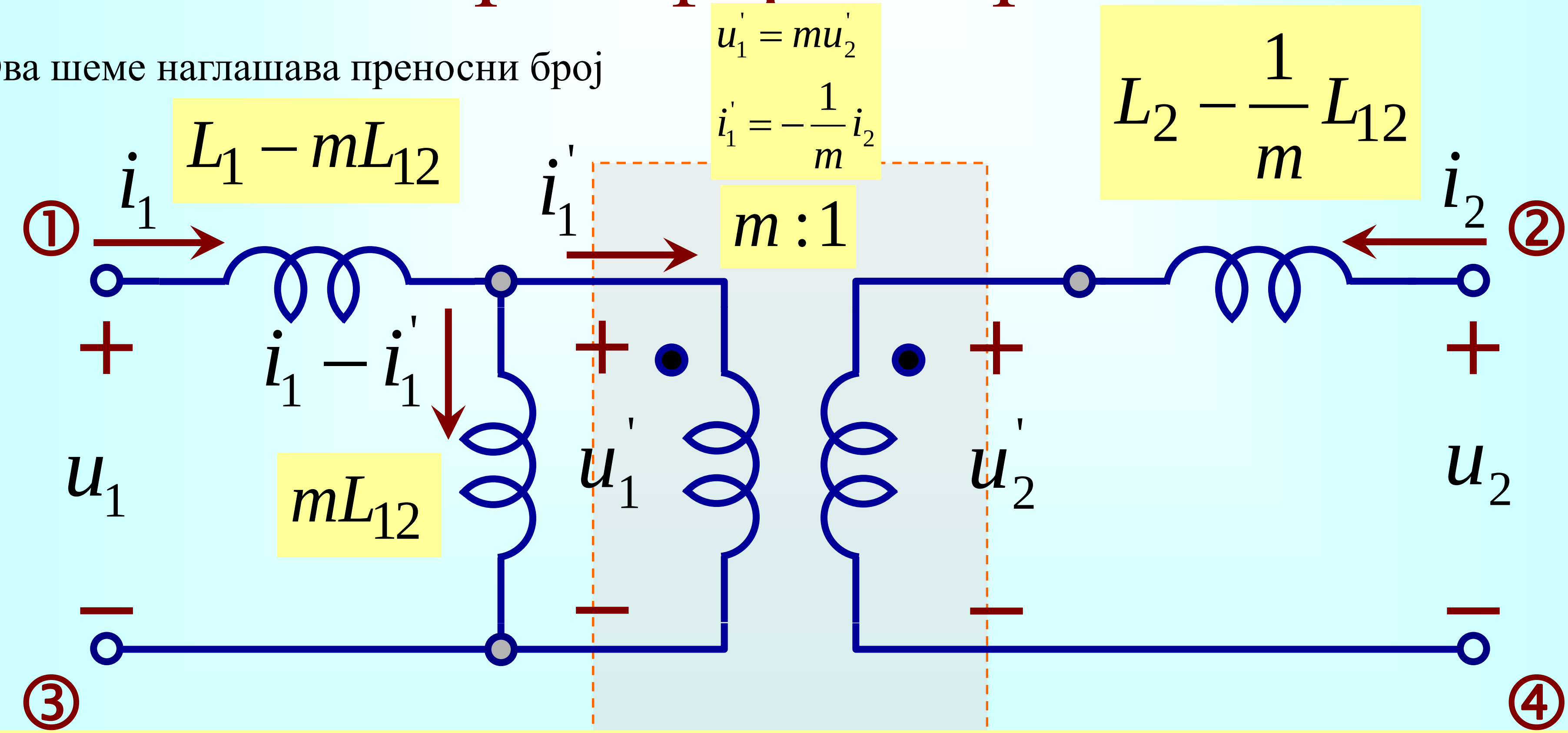
$$u_1 = (L_1 - mL_{12})\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + mL_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = \left(L_2 - \frac{1}{m}L_{12}\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{m}L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Заменска шема са идеалним трансформатором



Ова шеме наглашава преносни број



$$u_1 = \left(L_1 - mL_{12}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + mL_{12}\frac{\mathrm{d}\left(i_1 - i_1^{'}\right)}{\mathrm{d}t} = \left(L_1 - mL_{12}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + mL_{12}\frac{\mathrm{d}\left(i_1 + \frac{1}{m}i_2\right)}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

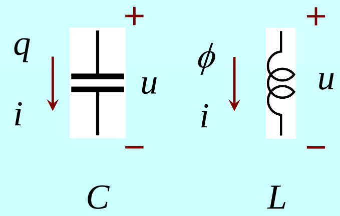
$$u_2 = u_2^{'} + \left(L_2 - \frac{1}{m}L_{12}\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{u_1^{'}}{m} + \left(L_2 - \frac{1}{m}L_{12}\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}mL_{12}\frac{\mathrm{d}\left(i_1 - i_1^{'}\right)}{\mathrm{d}t} + \left(L_2 - \frac{1}{m}L_{12}\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Питања

(5) Шта је стање електричног кола? Шта су једначине стања електричног кола?

Стање електричног кола

- Стање ел. кола је **информација** у посматраном тренутку времена, која заједно са познатим побудама омогућава да се одреди понашање кола после посматраног тренутка времена.
- Струје калемова и напони кондензатора чине ***стање кола***.
- Напони кондензатора и струје калемова не могу да се тренутно промене ако у колу нема делта-импулса напона и струја.
- Каже се да ове величине памте (меморишу) стање кола.

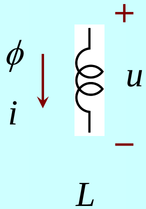


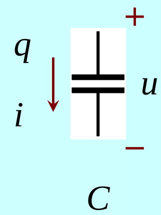
(5) Шта је стање електричног кола? Шта су једначине стања електричног кола?

(4) Шта су једначине стања? Шта је ред кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

Једначине стања

- ***Једначине стања*** су једначине кола по струјама калемова и напонима кондензатора, и побудама, написане у договореном облику (*Кошијева нормална форма*).
- Са **леве** стране једнакости је **први извод** струје калема или напона кондензатора.
- Са **десне** стране једнакости су **алгебарски** чланови струја калемова, напона кондензатора и **побуда** (струја и напона извора).





State equations

(5) Шта је ред електричног кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

(4) Шта су једначине стања? Шта је ред кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

Ред кола

- Једначине стања у општем случају чине нехомоген **систем** линеарних диференцијалних једначина првог реда са константним коефицијентима.
- ***Ред кола*** је број **диференцијалних** једначина у систему једначина стања.
- Ред кола је **једнак или мањи** од броја динамичких елемената.

(4) Шта су једначине стања? Шта је ред кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

(5) Шта је ред електричног кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

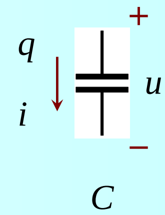
- Ако постоје **алгебарске** једначине у којима се појављују **само** струје калемова, или напони кондензатора, или побуде, ред кола ће бити **мањи** од броја динамичких елемената.
- Ред кола је једнак разлици броја динамичких елемената и броја оваквих независних алгебарских једначина, које чине да одређени број диференцијалних једначина стања **дегенерише** у алгебарске једначине.

$$\sum K_1 i_L + K_2 u_C + K_3 u_\mathrm{g} + K_4 i_\mathrm{g} = 0$$

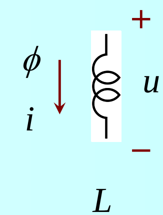
(4) Шта су једначине стања? Шта је ред кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

(5) Шта је ред електричног кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

Кондензаторске контуре и калемски пресеци



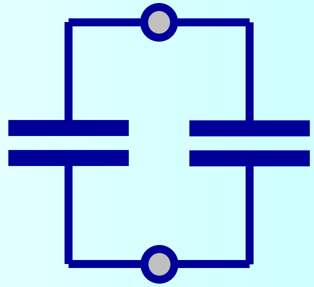
- Контуре које садрже кондензаторе, кратке везе и напонске изворе су *кондензаторске контуре* и оне везују почетне услове кроз једначине КЗН

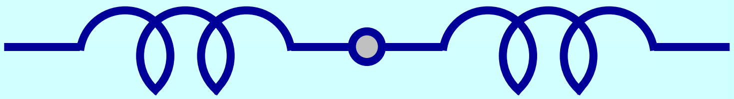


- Пресеци који садрже калемове, отворене везе и струјне изворе су *калемски пресеци* и они везују почетне услове кроз једначине КЗС.

Пример смањеног реда кола

- Краткоспојени кондензатор
- Паралелна веза кондензатора
- Просто редно коло од калема и струјног извора
- Просто редно коло од кондензатора и напонског извора
- Редна веза калемова





(4) Шта су природни почетни услови електричног кола? Они се задају у тренутку времена	**(5)** Шта су природни почетни услови електричног кола? (а) $t=+\infty$ (б) $t=t_0^-$, t-нула-минус, t_0 коначно (в) $t=t_0^+$, t-нула-плус, t_0 коначно

Природни почетни услови

- Струје калемова и напони кондензатора у почетном тренутку кола су ***природни почетни услови кола***.
- Сви остали почетни услови су *изведени почетни услови*.
- Природни почетни услови се задају у тренутку непосредно **пре** почетног тренутка.

$$i_L(t_0^-)=I_0$$

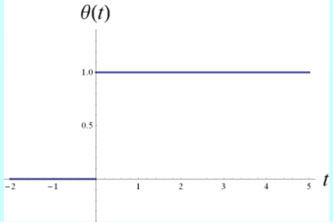
$$u_C(t_0^-)=U_0$$

Initial conditions, IC, Initial state

(5) Шта су каузални извори?

Описивање укључивања извора

- Стварни извори почињу да обезбеђују потребан напон и струју после неког тренутка времена који је ***тренутак укључивања извора***.
- Пре тренутка укључивања извора, побуда је једнака **нули**.
- Укључивање описујемо Хевисајдовом функцијом а те изворе зовемо *каузалним*.



(5) Шта су каузални извори?

Примери каузалних побуда

$$u_{\mathrm{g}}(t) = U\,\vartheta(t)$$

$$u_{\mathrm{g}}(t) = U\,\mathrm{e}^{-a\,t}\,\vartheta(t)$$

$$i_{\mathrm{g}}(t) = t\,\frac{I}{T}\,\vartheta(t)$$

$$i_{\mathrm{g}}(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t)\,\vartheta(t)$$

$$u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\cos(\omega t + \theta)\,\vartheta(t)$$

Потпуни одзив

- ***Потпуни одзив*** је напон или струја приступа, за тренутке времена после *t*-нула-плус, наста(о)ла услед природних почетних услова и побуда.
- Потпуни одзив је збир **два** сабирка: одзива на природне почетне услове, сакупљену енергију, и одзива на побуду.

Ово је последица линеарности диференцијалних једначина и константности њихових коефицијената.

(5) Шта је одзив на сакупљену (акумулисану) енергију?
Како се он одређује?

Одзив на сакупљену енергију

- ***Одзив на природне почетне услове*** (*одзив на сакупљену енергију*, одзив на акумулисану енергију) је напон или струја приступа, за тренутке времена после *t*-нула-плус, у колу у коме су
- независни извори **искључени**.
- То је одзив настао због почетних услова.

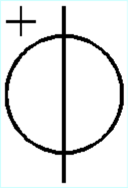
$i_L(t_0^-) = I_0$ $u_C(t_0^-) = U_0$

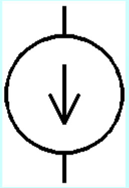
Zero-input response

(5) Шта је одзив на побуду? Како се он одређује?

Одзив на побуду

- ***Одзив на побуду*** (*одзив на екситацију*, одзив на укључење извора) је напон или струја приступа, за тренутке времена после *t*-нула-плус, у колу у коме су
- почетни услови једнаки **нули**.
- То је одзив настао због извора (независних генератора, стимулуса, екситација, инпута, побуда).





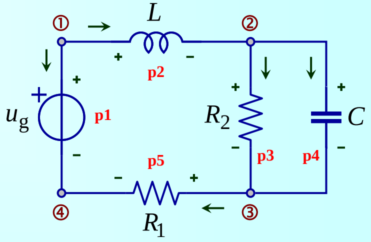
Zero-state response

Суперпозиција одзива

- ***Суперпозиција*** (преклапање, сабирање) ***одзива*** је последица линеарности диференцијалних једначина и константности њихових коефицијената.
- Потпуни одзив је збир одзива на почетне услове и побуде када делују појединачно.
- Одзив је увек **каузалан**, не може почети пре побуде, и једнак је нули када нема сакупљене енергије и побуда.

Пример суперпозиције

- Посматрајмо коло са напонским и струјним извором и калемом и кондензатором који имају енергију (почетни услови нису једнаки нули).
- Потпуни одзив у колу ће бити једнак збиру четири одзива:
- Одзив на енергију калема
- Одзив на енергију кондензатора
- Одзив на напонски извор
- Одзив на струјни извор



У свим случајевима је исти упоредни смер одзива

(6) Шта је импулсни одзив (Гринова функција, јединични импулсни одзив)? Описати поступак за одређивање импулсног одзива. Који је домен импулсног одзива, односно на ком интервалу времена је дефинисан?

ежб

(5) Шта је импулсни одзив (Гринова функција)? Описати поступак за одређивање импулсног одзива.

(4) Шта је одскочни одзив (индициона функција, step response)? Описати поступак за одређивање одскочног одзива. Који је домен (област дефинисаности) одскочног одзива?

Импулсни и одскочни одзив

- Посматрајмо коло **без** енергије (почетни услови једнаки нули) са **једним** извором.
- ***Импулсни одзив*** (*Гринова функција*) је одзив на јединичну импулсну побуду (Диракову делта побуду).
- ***Одскочни одзив*** (*индициона функција*) је одзив на јединичну одскочну побуду (Хевисајдову побуду).

$g(t)$

$f(t)$

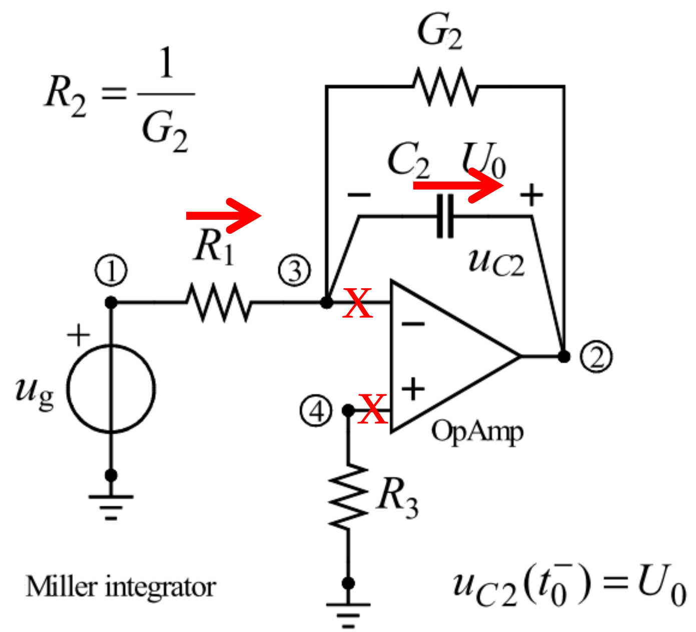
Импулсни одзив се уобичајено обележава и са $h(t)$.

(6) Колики је импулсни одзив идеалног интегратора, за напон v_2, када је $G_2 = 0$, и који је његов домен?

Одговор:

Импулсни одзив је $g(t) = -\dfrac{1}{R_1 C_2} h(t)$

Домен је $-\infty < t < \infty$

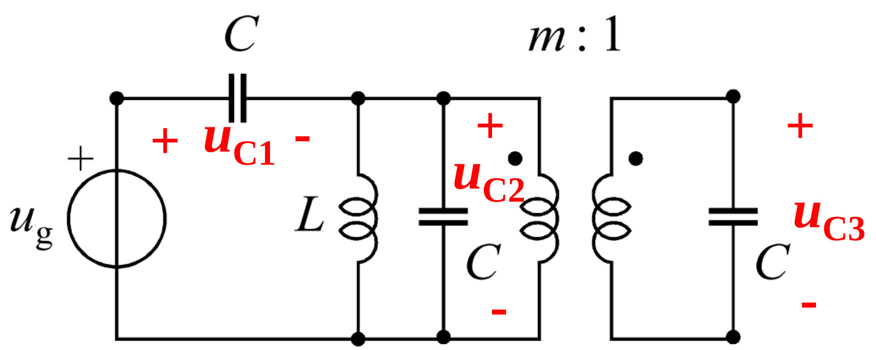


$$V_1 = u_g$$
$$V_4 = V_3 = 0$$
$$i_{R_1} = i_{C_2}$$
$$i_{R_1} = \frac{u_g}{R_1}$$
$$i_{C_2} = -C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$$
$$V_2 = u_{C_2}$$
$$\frac{u_g}{R_1} = -C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$$
$$\frac{du_{C_2}}{dt} = -\frac{u_g}{R_1 C_2}$$
$$\frac{dg(t)}{dt} = -\frac{\delta(t)}{R_1 C_2}$$

$$g(t) = \varphi(t) h(t) + H_1 \delta(t)$$
$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} h(t) + \varphi(t) \frac{dh(t)}{dt} + H_1 \frac{d\delta(t)}{dt}$$
$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} h(t) + \varphi(0^+) \delta(t) + H_1 \frac{d\delta(t)}{dt}$$
$$\frac{d\varphi(t)}{dt} h(t) + \varphi(0^+) \delta(t) + H_1 \frac{d\delta(t)}{dt} = -\frac{\delta(t)}{R_1 C_2}$$

$$h(t): \frac{d\varphi(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \varphi(t) = K = \mathrm{const} = -\frac{1}{R_1 C_2} \Rightarrow g(t) = -\frac{1}{R_1 C_2} h(t)$$
$$\delta(t): \varphi(0^+) = -\frac{1}{R_1 C_2}$$
$$\frac{d\delta(t)}{dt}: H_1 = 0$$

(5) Ред електричног кола са слике је



(а) 1,
(б) 2,
(в) 3,
(г) 4,
(д) 5,
(ђ) 6 ?

$$u_g = u_{C_1} + u_{C_2}$$
$$u_{C_2} = m \cdot u_{C_3}$$

2 алгебарске једначине

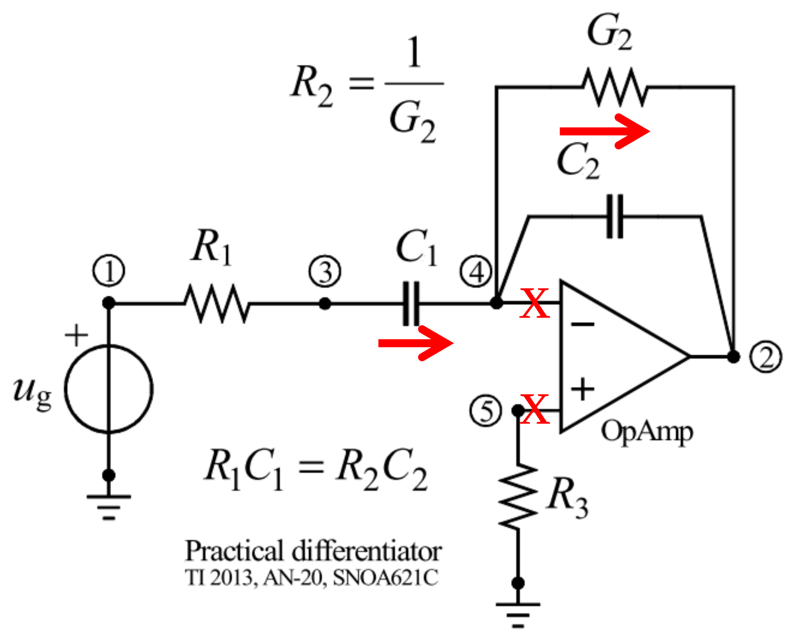
3**C* + 1**L* = 4 динамичка елемента

4 – 2 = 2 ред кола

(7) Колики је одскочни одзив идеалног диференцијатора, за напон v_2, када је $R_1 = 0$, $C_2 = 0$ и који је његов домен?

Одговор: $f(t) = -R_2 C_1 \delta(t)$

$-\infty < t < \infty$



$$V_1 = V_3 = u_g$$
$$V_4 = V_5 = 0$$
$$i_{C_1} = i_{R_2}$$
$$i_{R_2} = -\frac{V_2}{R_2}$$
$$i_{C_1} = C_1\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} = C_1\frac{\mathrm{d}u_g}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{V_2}{R_2} = C_1\frac{\mathrm{d}u_g}{\mathrm{d}t}$$
$$V_2 = -C_1R_2\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$f(t) = -C_1R_2\delta(t)$$

$$f(t) = \varphi(t)h(t) + H_1\delta(t)$$

$$\varphi(t)h(t) + H_1\delta(t) = -C_1R_2\delta(t)$$

$$h(t): \varphi(t) = 0 \Rightarrow f(t) = -R_2C_1\delta(t)$$
$$\delta(t): H_1 = -R_2C_1$$

(5) Импулсни одзив (Гринова функција) електричног кола је $g(t) = A\vartheta(t)$. Одредити одзив на побуду у овом колу када је побуда $B\delta(t-T)$. Сматрати да су A, B и T реални и позитивни параметри.	$AB\vartheta(t-T)$ Одзив се може одредити, на пример, применом **својства линеарности** и **својства померања у времену**, што представља најједноставнији и најделотворнији начин у овом случају.

$$\delta(t) \to g(t) = Ah(t)$$

$$\delta(t-T) \to g(t-T) = Ah(t-T)$$

$$B\delta(t-T) \to Bg(t-T) = ABh(t-T)$$

Задаци

Задатак (2)

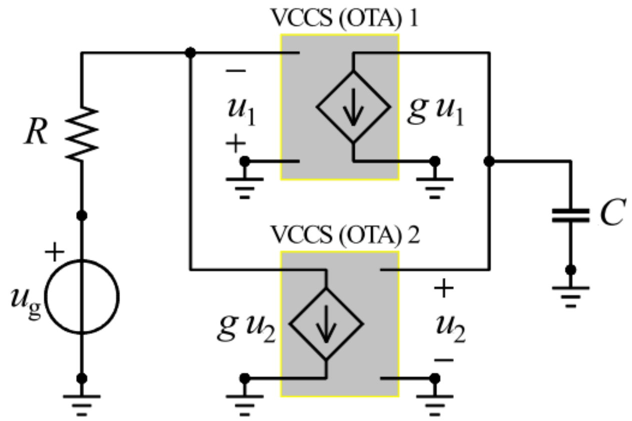
Задатак 1

Вредности елемената електричног кола са слике су познате, $g = 1/R$, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$.

(5) Нацртати граф кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека.

(5) Одредити напон кондензатора.

(5) Одредити граничну вредност струје отпорника после бесконачно дугог времена ($t \to +\infty$). $\vartheta(t)$ је јединична одскочна функција (Хевисајдова функција) која се обележава и са $\mathrm{h}(t)$.



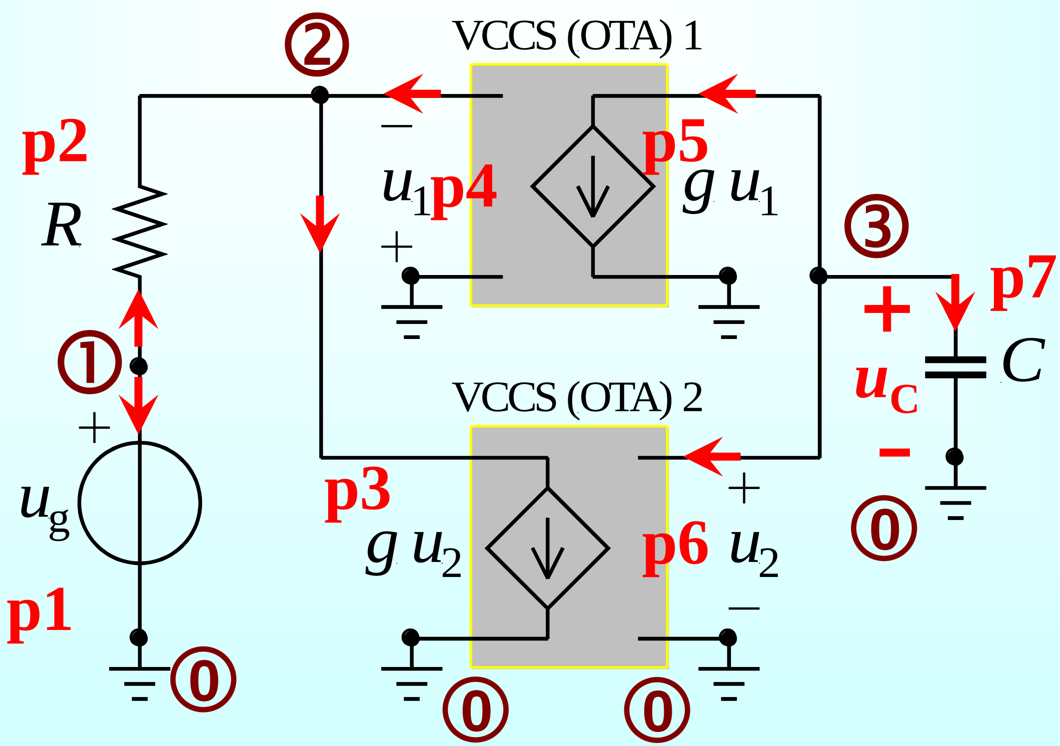
Граф кола је

Број главних пресека је

Напон кондензатора је

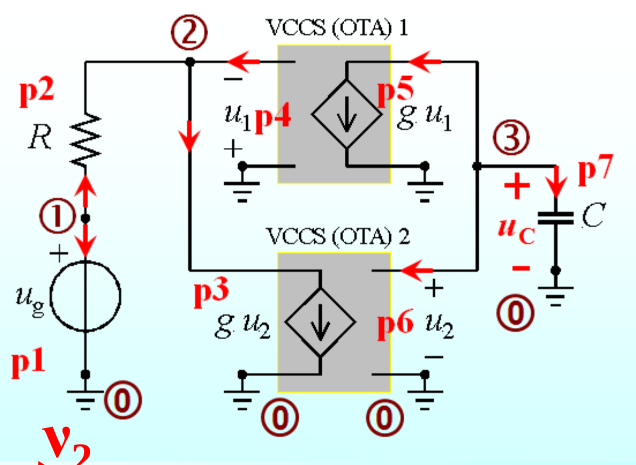
Гранична вредност струје је

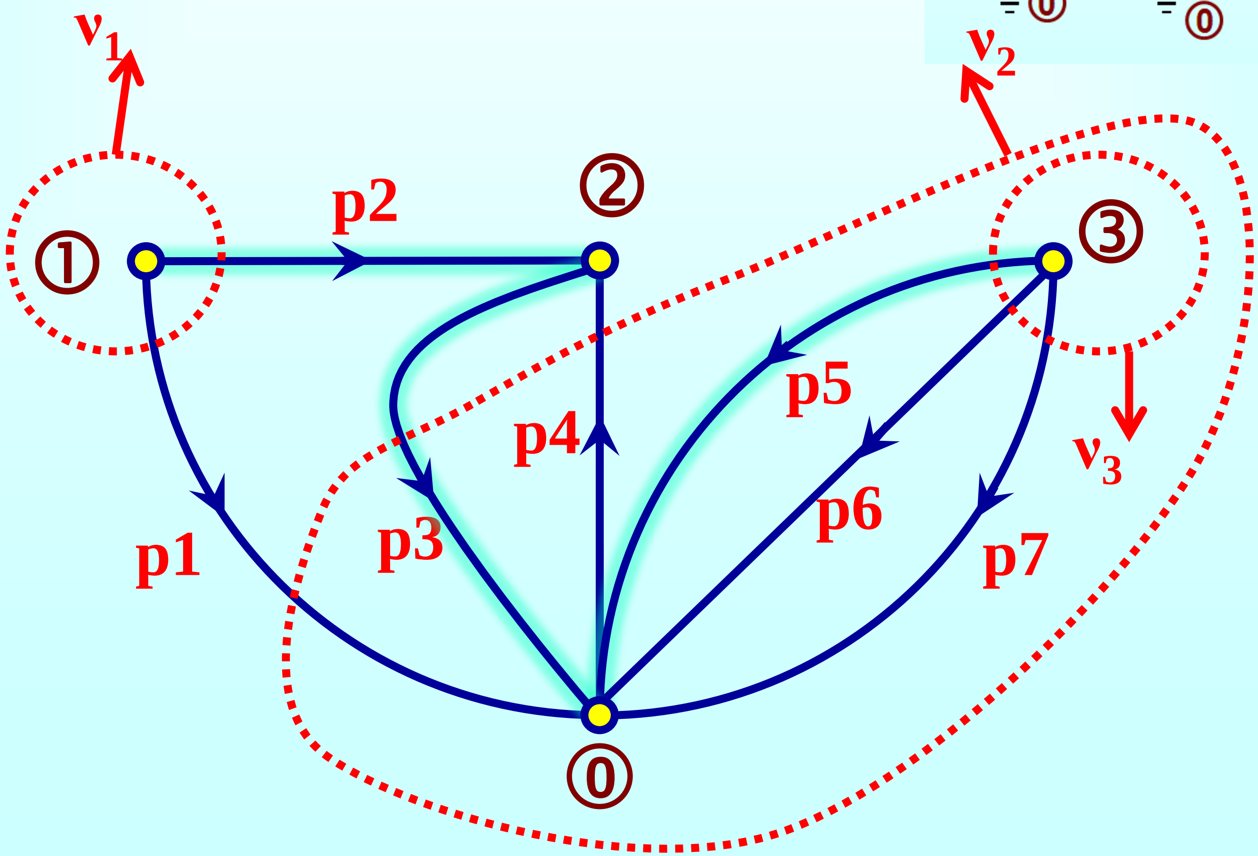
Задатак (2)



VCCS (OTA) 1
VCCS (OTA) 2
②
①
③
⓪
p1
p2
p3
p4
p5
p6
p7
R
C
u_g
u_1
$g\,u_1$
u_2
$g\,u_2$
u_C
+
–

Граф електричног кола





Својства одзива на побуду

Временски непромењивог линеарног кола без сакупљене енергије

Својство линеарности

- Нека једна побуда ствара одзив у линеарном временски непроменљивом колу у коме нема сакупљене енергије
- Линеарна трансформација побуде ће стварати исту линеарну трансформацију одзива
- Пример линеарних трансформација су множење константом, извод по времену и интеграл по времену
- Ако је побуда дата збиром више сабирака, одзив је збир одзива на сваки сабирак понаособ

$$i_{\mathrm{g}}(t) \to u_{\mathrm{e}}(t)$$

$$\boxed{K\, i_{\mathrm{g}}(t) \to K\, u_{\mathrm{e}}(t)}$$

$K = \mathrm{const}$

Својство померања у времену

- Нека једна побуда ствара одзив у линеарном временски непромењивом колу у коме нема сакупљене енергије
- Временски померена побуда ће стварати одзив на исти начин померен у времену
- Ово својство се примењује у решавању кола са сложеним обликом побуде

$$i_{\mathrm{g}}(t) \to u_{\mathrm{e}}(t)$$

$$i_{\mathrm{g}}(t-T) \to u_{\mathrm{e}}(t-T)$$

Линеарност и померање у времену

$$i_{\mathrm{g}}(t) \rightarrow u_{\mathrm{e}}(t)$$

$$K\, i_{\mathrm{g}}(t) \rightarrow K\, u_{\mathrm{e}}(t)$$

$$K = \mathrm{const}$$

- Коло је линеарно
- временски непромењиво
- без сакупљене енергије (почетни услови су једнаки нули)
- делује само један каузалан извор (генератор)

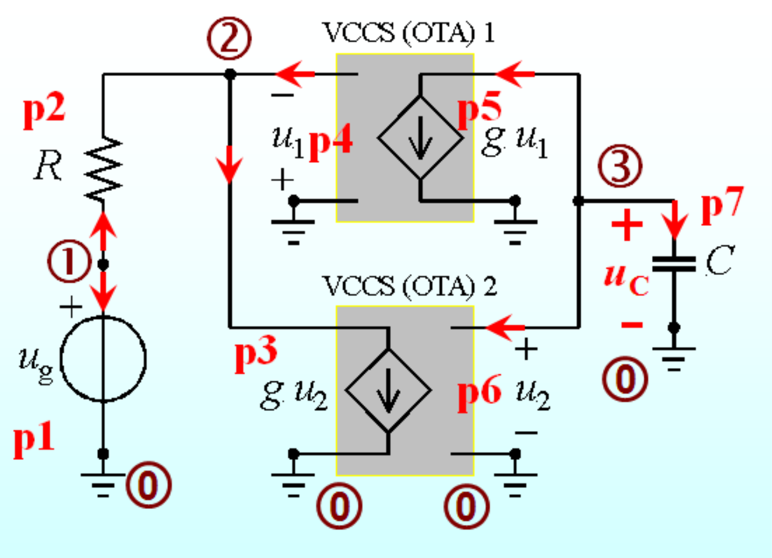
$$\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{g}}(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{e}}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^t i_{\mathrm{g}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \rightarrow \int_0^t u_{\mathrm{e}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$i_{\mathrm{g}}(t-T) \rightarrow u_{\mathrm{e}}(t-T)$$

Одзив на побуду

$$-u_1 = u_{\mathrm{g}} - R \cdot g \cdot u_2$$



$$u_2 = u_C$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -g \cdot u_1 \Rightarrow \boxed{u_1 = -\frac{1}{g} C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$$

$$\frac{1}{g} C \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = u_{\mathrm{g}} - R \cdot g \cdot u_2$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC} u_2 = \frac{1}{RC} u_{\mathrm{g}}}$$

Једначина одзива

Својства једначине одзива

- Линеарна нехомогена диференцијална једначина са константним коефицијентима
- Ред једначине је једнак реду кола
- За коло од пасивних елемената (отпорника, калемова, кондензатора, ...) сви коефицијенти имају исти знак

Општи облик једначине одзива

$$\frac{\mathrm{d}^r i}{\mathrm{d}t^r} + a_{r-1}\frac{\mathrm{d}^{r-1} i}{\mathrm{d}t^{r-1}} + \cdots + a_2\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + a_0\, i = F(t)$$

Карактеристична једначина

$$s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Нуле (корени) карактеристичне једначине су ***сопствене учестаности*** (***природне учестаности***, сопствене вредности, својствене вредности, eigenvalues)

Решење једначине одзива

$$i(t) = \psi(t)\,\vartheta(t) + H_1\delta(t) + H_2\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots$$

$$H_1, H_2, \ldots = \mathrm{const}$$

Елементарна (обична) функција од полинома, триг, експ, ..., функција

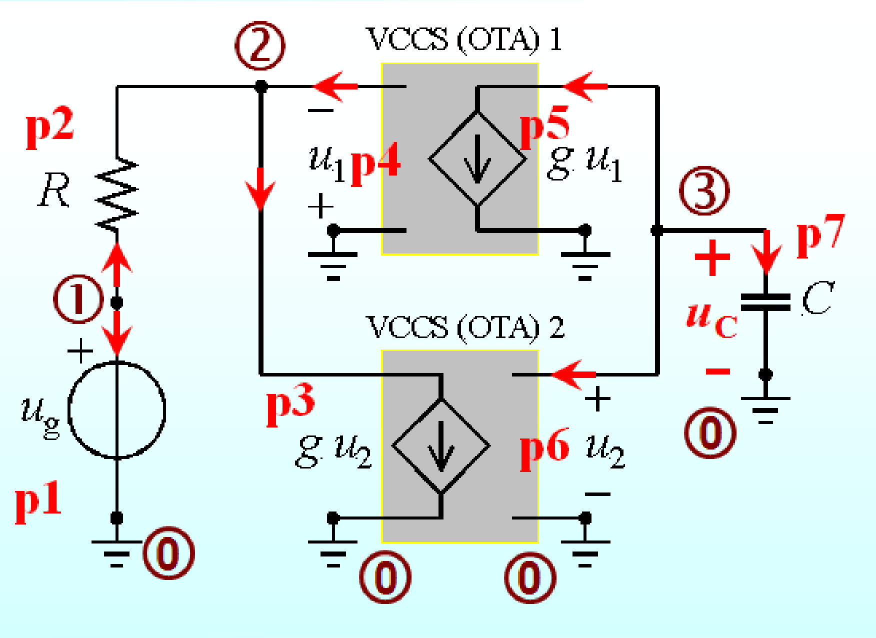
Број импулсних сабирака зависи од реда кола и нехомогеног дела

Импулсни и одскочни одзив

- Посматрајмо коло **без** енергије (почетни услови једнаки нули) са **једним** извором
- ***Импулсни одзив*** (*Гринова функција*) је одзив на јединичну импулсну побуду (Диракову делта побуду) $g(t)$
- ***Одскочни одзив*** (*индициона функција*) је одзив на јединичну одскочну побуду (Хевисајдову побуду) $f(t)$

Импулсни одзив се уобичајено обележава и са $h(t)$.

Одзив на побуду



$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_2=\frac{1}{RC}u_\mathrm{g}$$

$$u_\mathrm{g}(t)=Uh(t)\Rightarrow u_2(t)=Uf(t)$$

$$f(t)=z(t)h(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}h(t)+z(t)\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}h(t)+z(t)\delta(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}h(t)+z(0^+)\delta(t)$$

Одзив на побуду

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_2=\frac{1}{RC}u_\mathrm{g}}$$

$$u_\mathrm{g}=h(t)\Rightarrow u_2=f(t)$$

$$f(t)=z(t)h(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}f(t)=\frac{1}{RC}h(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}h(t)+z(0^+)\delta(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}h(t)+z(0^+)\delta(t)+\frac{1}{RC}\left(z(t)h(t)\right)=\frac{1}{RC}h(t)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}z(t)=\frac{1}{RC}}$$

$$\boxed{z(0^+)=0}$$

Одзив на побуду

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}z(t)=\frac{1}{RC}}\qquad \boxed{z(0^+)=0}\qquad u_\mathrm{g}=Uh(t)\Rightarrow u_2=Uf(t)$$

$$z(t)=z_\mathrm{h}(t)+z_\mathrm{p}(t)$$

$$z_\mathrm{p}(t)=K_1=\mathrm{const}\Rightarrow 0+\frac{1}{RC}K_1=\frac{1}{RC}\Rightarrow K_1=1$$

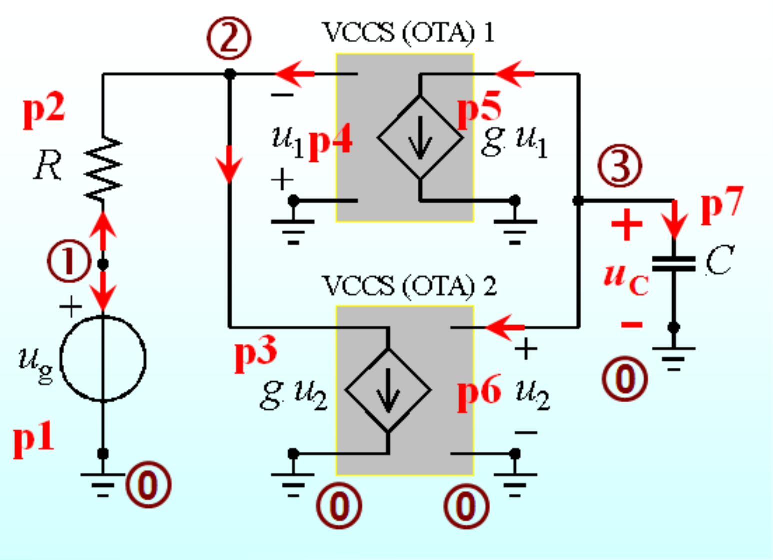
$$A(\underline{s})=\underline{s}+\frac{1}{RC}=0\Rightarrow \underline{s}=-\frac{1}{RC}\Rightarrow z_\mathrm{h}(t)=K_2e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$z(t)=z_\mathrm{h}(t)+z_\mathrm{p}(t)=1+K_2e^{-\frac{1}{RC}t}\Rightarrow z(0^+)=0\Rightarrow K_2=-1$$

$$f(t)=z(t)h(t)=\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)h(t)$$

$$u_\mathrm{g}=Uh(t)\Rightarrow u_2=Uf(t)=U\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)h(t)$$

Одзив на побуду



$$u_g = Uh(t) \Rightarrow u_2 = Uf(t) = U\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)h(t)$$

$$i_R(t) = i_2(t) = gu_2(t) = gU\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)h(t)$$

$$i_R(t \to \infty) = gU$$

Осцилатор са Виновим мостом (1)

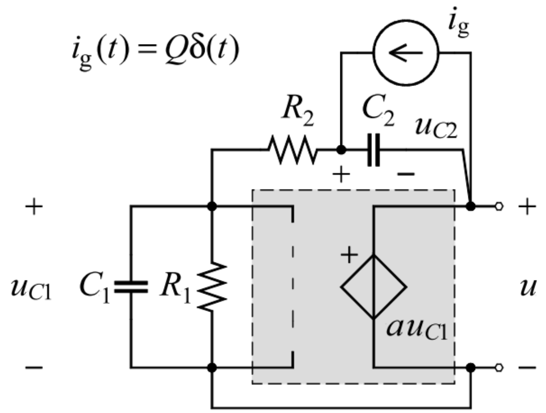
Задатак 2

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) нема почетну енергију и $a=3$, $R_1=R_2=R$, $C_1=C_2=C$, $i_g=Q\,\delta(t)$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(7) Одредити напон u и његов домен.

(3) Нацртати график u у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Једначине стања у матричном облику су

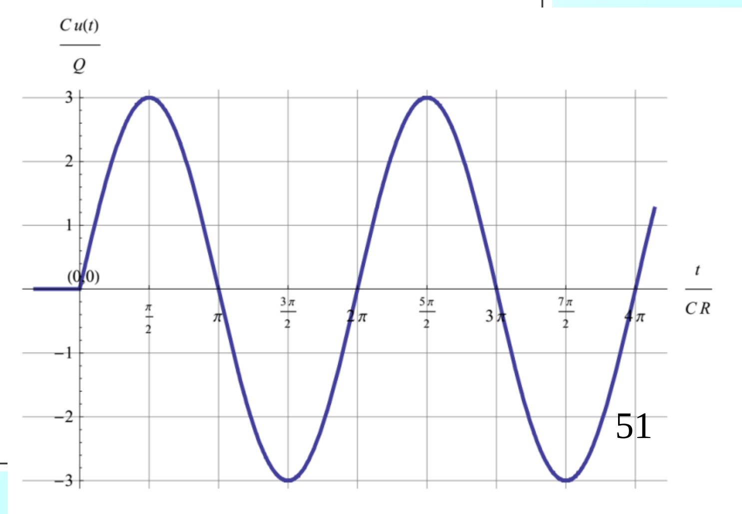
$$\begin{pmatrix} u_{C1}'(t) \\ u_{C2}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{CR} & \frac{1}{CR} \\ -\frac{2}{CR} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i_g}{C} \end{pmatrix}$$

Ред кола је 2

Напон u и његов домен су

$$u(t) = \frac{3\,Q \sin\left(\frac{t}{CR}\right)}{C}\vartheta(t), \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

График напона u је



Осцилатор са Виновим мостом (2)

Задатак 1

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) је приказан на слици и

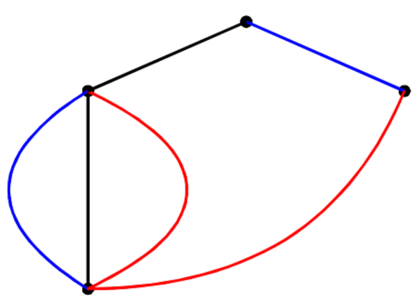
$R_1 = R_2 = R$, $a = 3$, $C_1 = C_2 = C$, $t_0 = 0$.

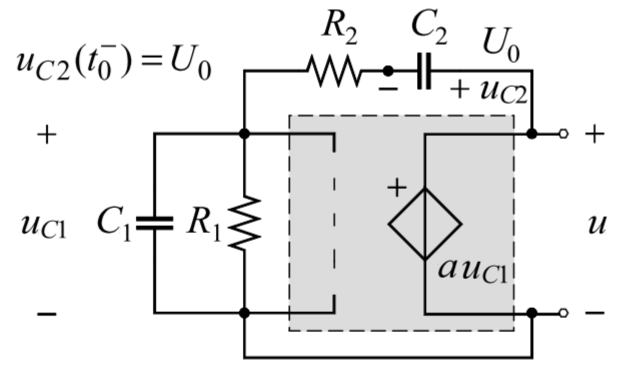
(4) Нацртати граф овог електричног кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека и главних петљи (фундаменталних контура).

(7) Одредити напон u за $t > t_0$.

(4) Нацртати график u у функцији времена за $t > t_0$. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Граф електричног кола је





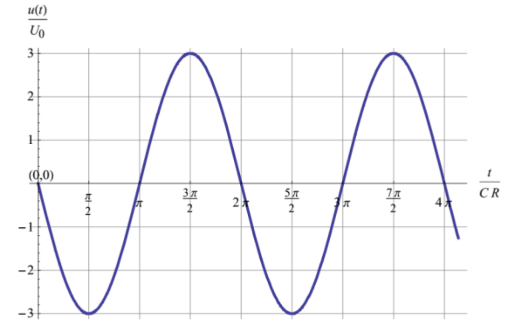
Главних пресека има , а петљи .

3 главна пресека, 3 главне петље.

Напон u за $t > t_0$ је

$$u(t) = -3U_0 \sin\left(\frac{t}{CR}\right)$$

График u у функцији времена за $t > t_0$ је



Осцилатор са Виновим мостом (3)

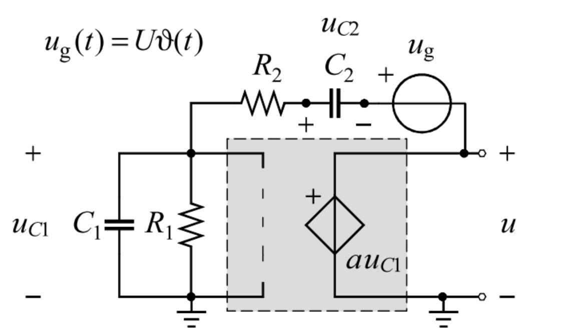
Задатак 2

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) нема почетну енергију и $a=3$, $R_1=R_2=R$, $C_1=C_2=C$, $u_g=U\vartheta(t)$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(7) Одредити напон u и његов домен.

(3) Нацртати график u у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Једначине стања у матричном облику су

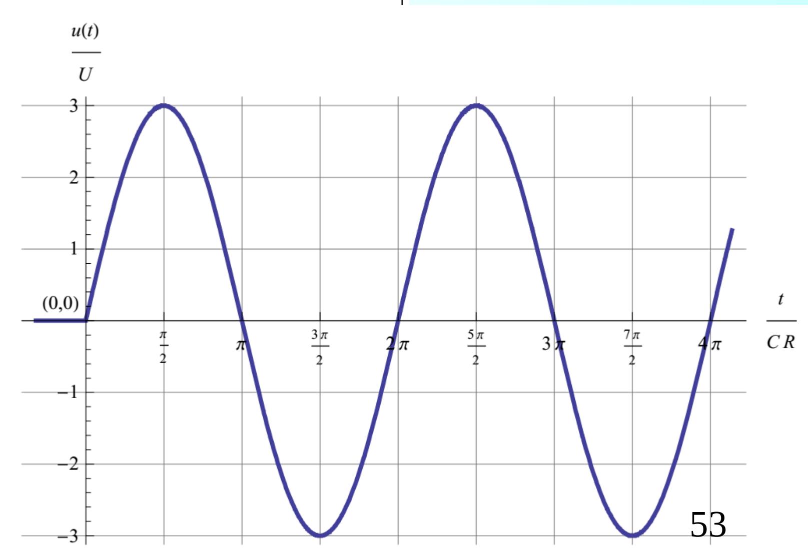
$$\boxed{\begin{pmatrix} u_{C1}'(t) \\ u_{C2}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{CR} & \frac{1}{CR} \\ -\frac{2}{CR} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u_g}{CR} \\ -\frac{u_g}{CR} \end{pmatrix}}$$

Ред кола је 2

Напон u и његов домен су

$$\boxed{u(t) = 3\,U_m \sin\left(\frac{t}{CR}\right)\vartheta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

График напона u је



LC-реализација филтра

Задатак 1

LC-реализација филтра (Butterworth maximally flat highpass approximation) има познате параметре и $L = \dfrac{R}{\sqrt{2}\,\Omega}$, $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,R\Omega}$, $\Omega > 0$. Одредити

(6) импулсни одзив (Гринову функцију) за излазни напон $u(t)$ и његов домен,

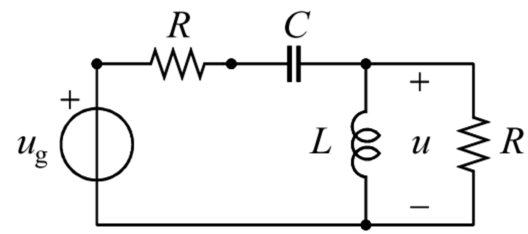
(6) одскочни одзив (индициону функцију) за излазни напон $u(t)$ и његов домен.

(3) Нацртати график одскочног одзива. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Импулсни одзив и његов домен су

$$g(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{\Omega}{\sqrt{2}} e^{\frac{-t\Omega}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{t\Omega}{\sqrt{2}}\right) \vartheta(t)$$

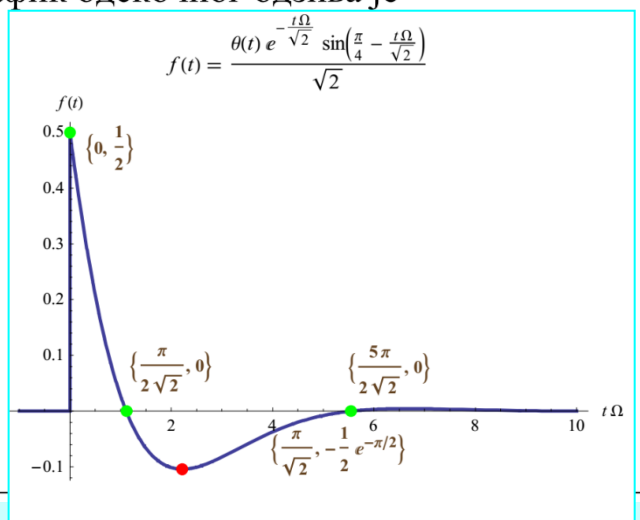
$$-\infty < t < +\infty$$



Одскочни одзив и његов домен су

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-t\Omega}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t\Omega}{\sqrt{2}}\right) \vartheta(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

График одскочног одзива је



Коло са електроенергетским трансформатором

Задатак 2

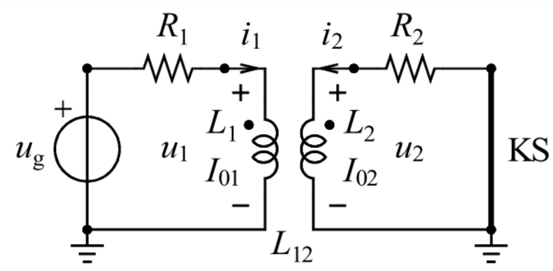
Електроенергетски трансформатор је идеализовано представљен линеарним индуктивним трансформатором $L_1 = L$, $L_2 = L$, $k = \dfrac{1}{2}$ и отпорностима губитака у намотајима $R_1 = R$, $R_2 = R$. Секундар је краткоспојен а примар је побуђен напонским извором импулсног напона $u_\mathrm{g}(t) = \Phi\,\delta(t)$. Почетне струје примара и секундара су $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $i_2(t_0^-) = 0$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити ред овог електричног кола и једначине стања у матричном облику.

(5) Одредити струју примара i_1 и њен домен.

(5) Одредити струју секундара i_2 и њен домен.

Ред кола је **2** (два)



Једначине стања у матричном облику су

$$\mathrm{D}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-4R}{3L} & \dfrac{2R}{3L} \\ \dfrac{2R}{3L} & \dfrac{-4R}{3L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{4}{3L}u_\mathrm{g} \\ \dfrac{-2}{3L}u_\mathrm{g} \end{bmatrix}$$

Струја примара i_1 и њен домен су

$$i_1(t) = \frac{I_{01}}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{-2Rt}{3L}} + \mathrm{e}^{\frac{-2Rt}{L}}\right) + \frac{\Phi}{L}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-2Rt}{3L}} + \mathrm{e}^{\frac{-2Rt}{L}}\right)\vartheta(t), \quad t \geq t_0$$

Струја секундара i_2 и њен домен су

$$i_2(t) = +\frac{I_{01}}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{-2Rt}{3L}} - \mathrm{e}^{\frac{-2Rt}{L}}\right) + \frac{\Phi}{L}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-2Rt}{3L}} - \mathrm{e}^{\frac{-2Rt}{L}}\right)\vartheta(t), \quad t \geq t_0$$

Резонантни одзив

Задатак 2

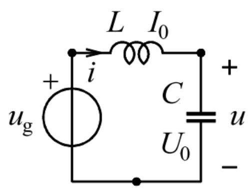
Вредности елемената електричног кола са слике су познате, $u_\mathrm{g}(t) = U_\mathrm{m}\sin(\omega t)\,\vartheta(t)$,

$i(t_0^-) = I_0,\ u(t_0^-) = U_0,\ t_0 = 0,\ C = \dfrac{1}{\omega^2 L}$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(5) Одредити напон кондензатора u и

(5) скицирати његов график у функцији времена за $t > t_0$.



Једначине стања у матричном облику су

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-1}{L} \\ \omega^2 L & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L}u_\mathrm{g} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ред кола је 2 (два).

Напон кондензатора u је

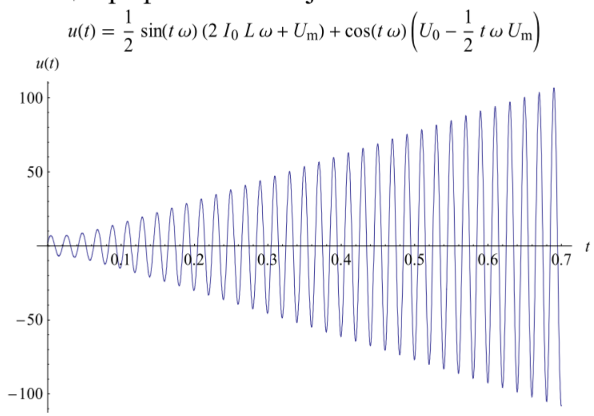
$$u(t) = \omega L I_0 \sin(\omega t) + U_0\cos(\omega t)$$

$$+\frac{1}{2}U_\mathrm{m}(\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t))\,\vartheta(t)$$

$t \geq t_0$

Предисторија електричног кола није позната јер не знамо како су настали почетни услови. Не познајемо одзив за $t < t_0$, $t_0 = 0$.

Скица графика напона је



Цртамо га само за $t \geq t_0$ јер не познајемо предисторију кола за $t < t_0$.

Уочити да одзив на почетне услове **не садржи** као множилац $\vartheta(t)$, Хевисајдову функцију (јединичну одскочну функцију).