

# Теорија електричних кола



```
StateSpaceEqns.nb
In[1]:=
Solve[{i1 + i2 == 0, -i2 + i3 + i4 == 0, -i3 - i4 + i5 == 0,
      -u1 + u2 + u3 + u5 == 0, -u3 + u4 == 0,
      u1 == ug, u2 == L*Di2, u3 == R2*i3,
      i4 == C*Du4, u5 == R1*i5}, {Di2, Du4},
      {i1, i3, i4, i5, u1, u2, u3, u5}] /.
Rule -> Equal /.
{i2 -> i2, u4 -> u4, R1 -> R1, R2 -> R2, ug -> u"g"[t],
 Di2 -> D[i2[t], t], Du4 -> D[u4[t], t]} //
Expand // First // Column // TraditionalForm

Out[1]//TraditionalForm=

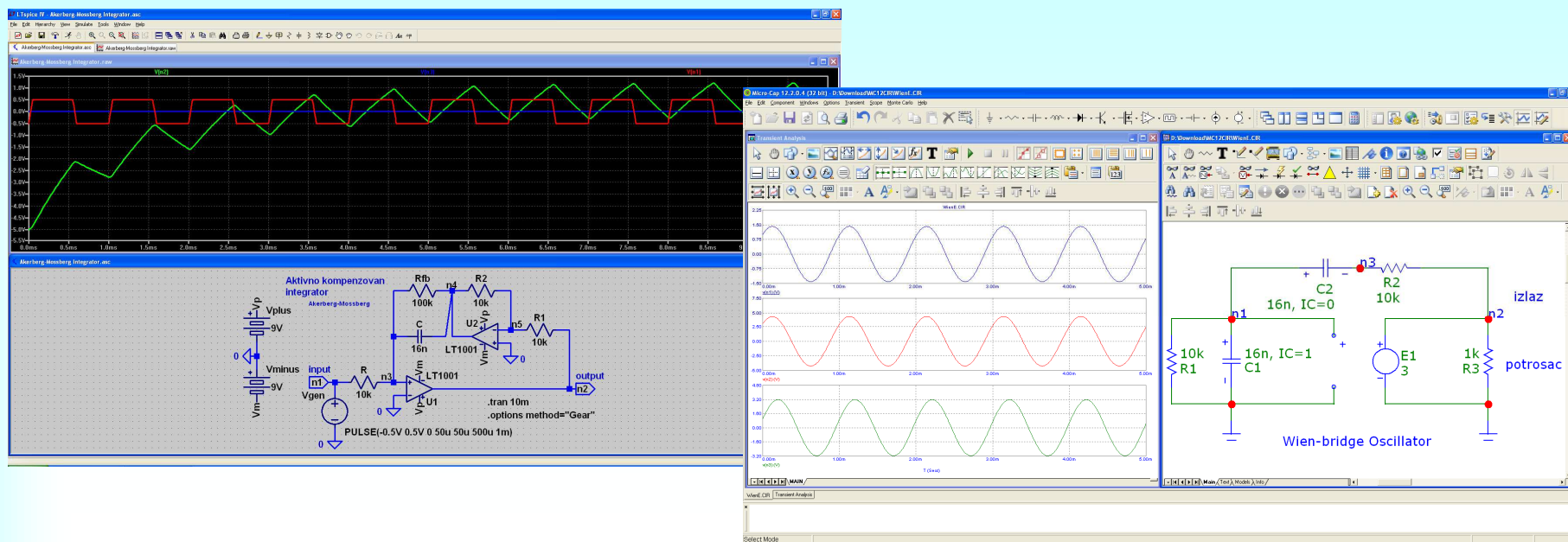
$$i_2'(t) = \frac{u_g(t)}{L} - \frac{i_2 R_1}{L} - \frac{u_4}{L}$$


$$u_4'(t) = \frac{i_2}{C} - \frac{u_4}{C R_2}$$

```

Користите само  
материјале које вам  
достави и  
препоручи  
предметни  
наставник у текућој  
школској години.

Дејан Тошић

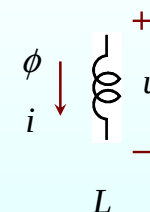
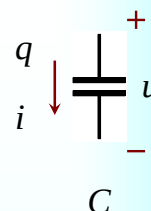


# Решавање у временском домену

Једначине стања и  
једначина одзива  
(Transient Analysis)

# Непрекидност струје калема и напона кондензатора

- **Напон кондензатора** је непрекидна функција времена ако је струја кондензатора ограничена функција времена.
- **Струја калема** је непрекидна функција времена ако је напон калема ограничена функција времена.
- Сва електрична кола која представљају моделе практичних система задовољавају ове ставове.



$$y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}, \quad K = \text{const}, \quad x(t) = x(t_0) + \frac{1}{K} \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau$$

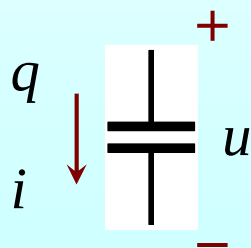
# Напон кондензатора

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

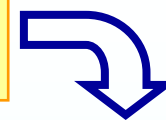
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

$$u_C(-\infty) = 0$$

Initially relaxed



$$\forall t \quad |i_C(t)| < I_{\max}$$



$$u_C(t_0^-) = u_C(t_0) = u_C(t_0^+)$$

$$u_C(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} u_C(t)$$

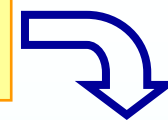
$$u_C(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} u_C(t)$$

У далекој прошлости  $t = -\infty$  усвајамо да елементи немају енергију.

# Струја калема

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

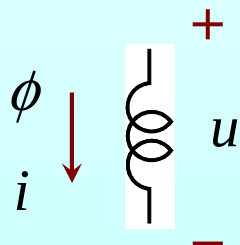
$$\forall t \quad |u_L(t)| < U_{\max}$$



$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0) = i_L(t_0^+)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

$$i_L(-\infty) = 0$$



Initially relaxed

L

Смерови за напоне и  
струје су стандардни  
(усаглашени)

У далекој прошлости  $t = -\infty$  усвајамо да елементи немају енергију.

# Акумулисана енергија

- Калем и кондензатор могу да **акумулишу** (нагомилавају) енергију.

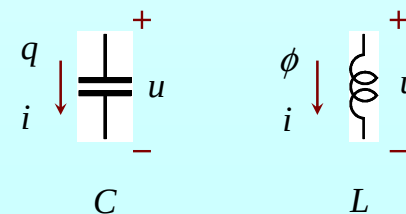
- Енергија калема се може изразити преко струје калема.

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

- Енергија кондензатора се може изразити преко напона кондензатора.

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$$

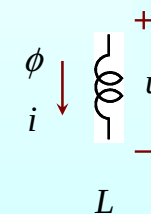
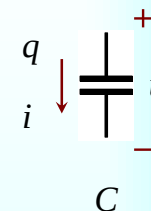
- Калем и кондензатор се још називају **динамички елементи**.



У далекој прошлости  $t = -\infty$  усвајамо да елементи немају никакву енергију.

# Стање електричног кола

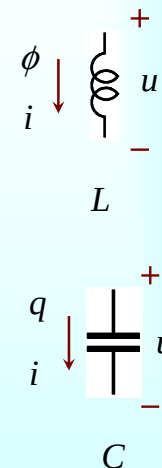
- Стање ел. кола је **информација** у посматраном тренутку времена која заједно са познатим побудама омогућава да се одреди одзив кола после посматраног тренутка времена.
- Напони кондензатора и струје калемова чине **стање кола**.
- Напони кондензатора и струје калемова не могу да се тренутно промене ако у колу нема делта-импулса напона и струја.
- Каже се да ове величине памте (меморишу) стање кола.



$$u_C(t), \quad i_L(t)$$

# Једначине стања

- **Једначине стања** су једначине кола по струјама калемова и напонима кондензатора, и побудама, написане у договореном облику (*Кошијева нормална форма*).
- Са **леве** стране једнакости је **први извод** струје калема или напона кондензатора.
- Са **десне** стране једнакости су **алгебарски** чланови струја калемова, напона кондензатора и **побуда** (струја и напона извора).

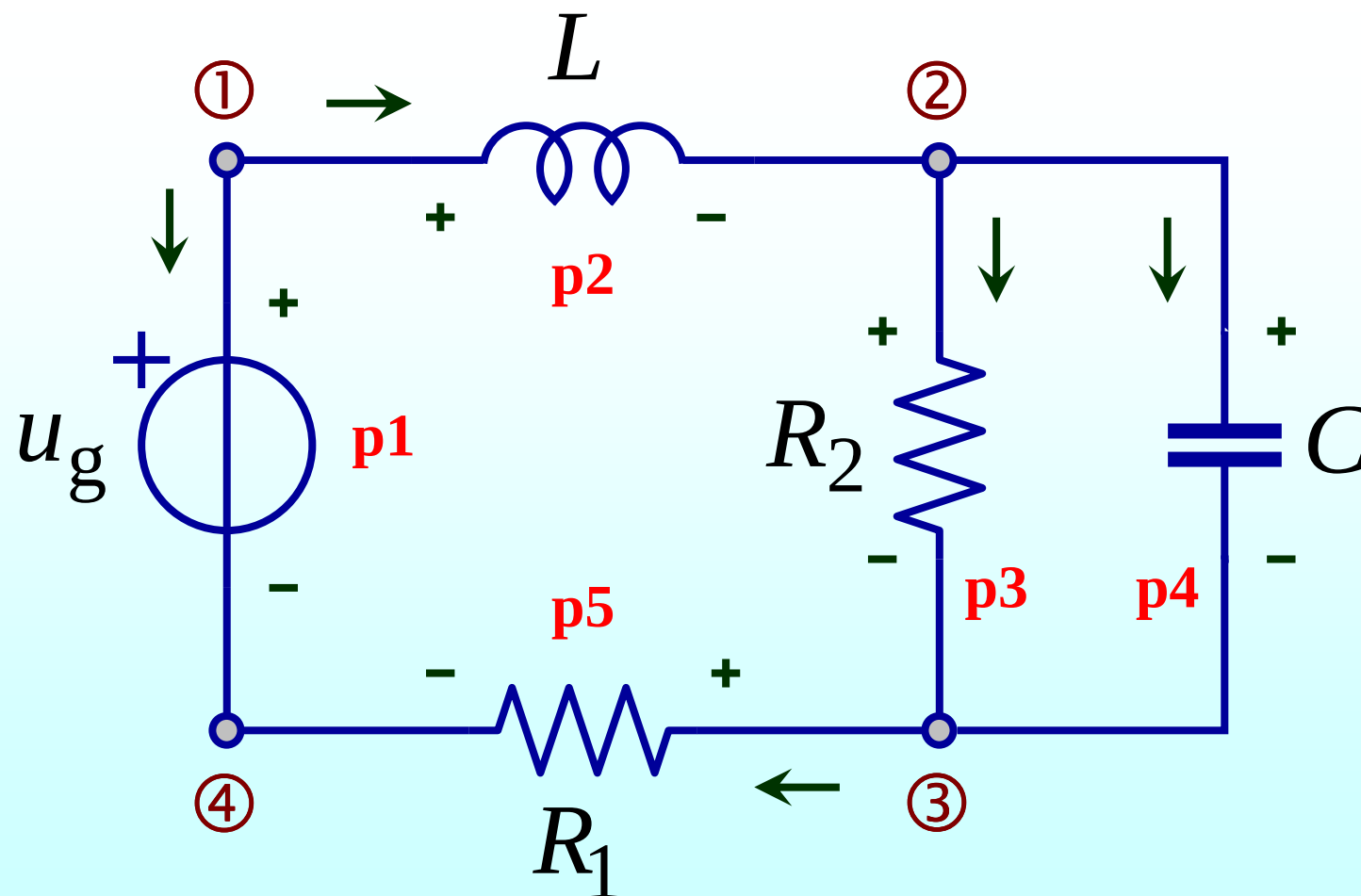


$$u_C(t), \quad i_L(t)$$

State equations



## Пример једначина стања кола

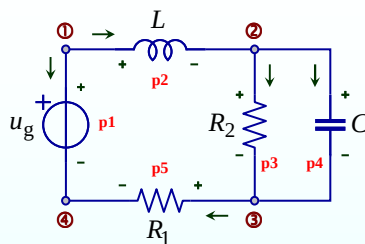


## Систем једначина кола

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$-i_3 - i_4 + i_5 = 0$$



$$u_1 = u_g$$

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt}$$

$$u_3 = R_2 i_3$$

$$i_4 = C \frac{du_4}{dt}$$

$$u_5 = R_1 i_5$$

Уклонимо све променљиве осим  
струје калема и напона кондензатора.

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

$$-u_3 + u_4 = 0$$

# Mathematica

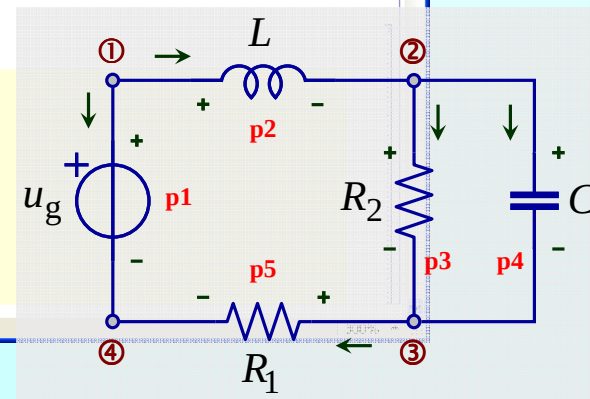
```

StateSpaceEqns.nb
In[1]:=
Solve[{i1 + i2 == 0, -i2 + i3 + i4 == 0, -i3 - i4 + i5 == 0,
      -u1 + u2 + u3 + u5 == 0, -u3 + u4 == 0,
      u1 == ug, u2 == L * Di2, u3 == R2 * i3,
      i4 == C * Du4, u5 == R1 * i5}, {Di2, Du4},
      {i1, i3, i4, i5, u1, u2, u3, u5}] /.
Rule -> Equal /.
{i2 -> i2, u4 -> u4, R1 -> R1, R2 -> R2, ug -> u" g" [t],
 Di2 -> D[i2[t], t], Du4 -> D[u4[t], t]} //
Expand // First // Column // TraditionalForm
    
```

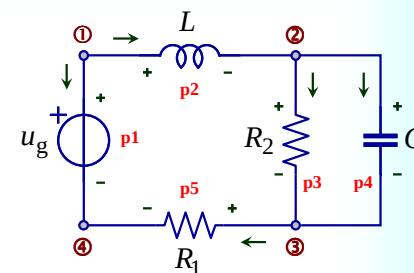
Out[1]//TraditionalForm=

$$i_2'(t) = \frac{u_g(t)}{L} - \frac{i_2 R_1}{L} - \frac{u_4}{L}$$

$$u_4'(t) = \frac{i_2}{C} - \frac{u_4}{C R_2}$$



# Једначине стања



$$\begin{cases} \frac{di_2}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_2 - \frac{1}{L}u_4 + \frac{1}{L}u_g \\ \frac{du_4}{dt} = \frac{1}{C}i_2 - \frac{1}{CR_2}u_4 \end{cases}$$

Једначине стања у матричном облику

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}u_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Систем једначина стања се може одредити на разне начине, али је за ручно решавање “помоћу папира и оловке” најједноставније увести **смене** првих извода променљивих стања,  $dx_1/dt = D_{x1}$ ,  $dx_2/dt = D_{x2}$ , ..., и решити тако добијени систем **алгебарских** једначина по променљивама  $D_{x1}$ ,  $D_{x2}$ , ... .

Променљиве  $x_1$ ,  $x_2$ , ..., су струје калемова и напони кондензатора. Када се одреде променљиве стања, струје калемова и напони кондензатора, сви остали напони и струје се одређују из њих решавањем алгебарских једначина.

# Општи облик једначина стања

Једначине стања су једначине по променљивама стања и побудама написане у договореном облику, у Кошијевој нормалној форми. Са десне стране једначине стања је линеарна нехомогена комбинација променљивих стања, а нехомогени део зависи од побуда и параметара. Са леве стране једначине стања је први **извод** по времену променљиве стања или, ако постоје алгебарске везе променљивих стања и побуда, **нула**. Број једначина стања је једнак броју динамичких елемената.

$$Z_1 \frac{dx_1}{dt} = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots A_{1r}x_r + F_1(t)$$

$$Z_2 \frac{dx_2}{dt} = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots A_{2r}x_r + F_2(t)$$

⋮

$$Z_r \frac{dx_r}{dt} = A_{r1}x_1 + A_{r2}x_2 + \cdots A_{rr}x_r + F_r(t)$$

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_r \in \{0,1\} \quad x_1, x_2, \dots, x_r \in \{i_L, u_C\}$$

Коефицијенти **Z** узимају у обзир алгебарске дегенерације једначина стања. Коефицијенти **A** зависе од **параметара** кола. Функције **F(t)** зависе од **параметара** и **побуда** кола.

# Ред кола

- Једначине стања у општем случају чине нехомоген **систем** линеарних алгебарско-диференцијалних једначина првог реда са константним реалним коефицијентима.
- **Ред кола** је број диференцијалних једначина у систему једначина стања.
- Ред кола је **једнак или мањи** од броја динамичких елемената.
- Ред кола физички значи колико можемо да задамо независних почетних услова – колико имамо степена слободе.

Ако је ред кола **једнак** броју динамичких елемената, онда сваки динамички елемент калем или кондензатор може имати **произвољну** почетну енергију – **произвољан** почетни услов.

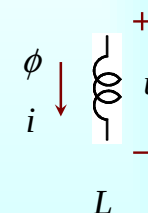
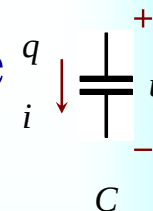
## Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

- Ако постоје **алгебарске** једначине у којима се појављују **само** струје калемова, напони кондензатора, и побуде, ред кола ће бити **мањи** од броја динамичких елемената.
- Ред кола је једнак разлици броја динамичких елемената и броја оваквих независних алгебарских једначина, које чине да одређени број диференцијалних једначина стања дегенерише у алгебарске једначине.

$$\sum K_1 i_L + K_2 u_C + K_3 u_g + K_4 i_g = 0$$

## Кондензаторске контуре и калемски пресеци

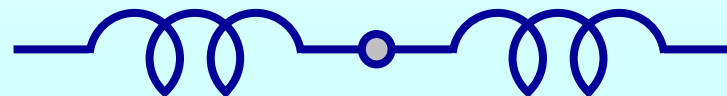
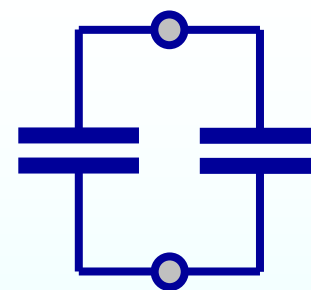
- Контуре које садрже кондензаторе, кратке везе и напонске изворе су *кондензаторске контуре* и оне везују почетне услове кроз једначине КЗН
- Пресеци који садрже калемове, отворене везе и струјне изворе су *калемски пресеци* и они везују почетне услове кроз једначине КЗС.
- Кондензаторске контуре и калемски пресеци смањују ред кола – број степена слобode кола.





## Пример смањеног реда кола

- Краткоспојени кондензатор
- Паралелна веза кондензатора
- Просто редно коло од калема и струјног извора
- Просто редно коло од кондензатора и напонског извора
- Редна веза калемова



# Примена једначина стања

- Одређивање напона и струја кола (решавање кола).
- Анализа својстава кола (понашања) за разне вредности елемената.
- Приближно налажење бројчаних вредности напона и струја у програмима за симулацију електричних кола.

## Шта се тражи на испиту?

- Да се објасни, кроз пример по избору, **шта су једначине стања** и која је њихова примена
- Да се **поставе једначине стања** за дато коло и одреди **ред кола**
- Да се **матрично** напишу једначине стања за дато коло
- **Не решавамо** једначине стања на испиту

## Једначина одзива

- **Одзив** је напон или струја у колу настао услед енергије динамичких елемената, или побуда, или и једног и другог.
- **Једначина одзива** је у општем случају диференцијална једначина по траженом одзиву, коју изводимо из једначина кола, а која је написана у договореном облику.

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{L} + \frac{1}{CR_2} \right) \frac{di_2}{dt} + \left( \frac{1}{CL} + \frac{R_1}{CLR_2} \right) i_2 = \frac{1}{L} \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{CLR_2} u_g$$

# Пример једначине одзива

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

$$u_1 = u_g$$

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt}$$

$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

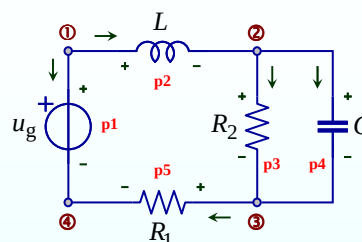
$$-u_3 + u_4 = 0$$

$$u_3 = R_2 i_3$$

$$i_4 = C \frac{du_4}{dt}$$

$$-i_3 - i_4 + i_5 = 0$$

$$u_5 = R_1 i_5$$



Уклонимо све променљиве осим тражене струје калема, на пример.

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{L} + \frac{1}{CR_2} \right) \frac{di_2}{dt} + \left( \frac{1}{CL} + \frac{R_1}{CLR_2} \right) i_2 = \frac{1}{L} \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{CLR_2} u_g$$

# Својства једначине одзива

- Линеарна нехомогена диференцијална једначина са реалним константним коефицијентима.
- Ред једначине је једнак реду кола.
- За коло од пасивних елемената (отпорника, калемова, кондензатора, ...) сви коефицијенти имају исти знак.

# Општи облик једначине одзива

$$\frac{d^r i}{dt^r} + a_{r-1} \frac{d^{r-1} i}{dt^{r-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = F(t)$$

Карактеристична једначина

$$s^r + a_{r-1} s^{r-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Нуле (корени) карактеристичне једначине су *сопствене учестаности (природне учестаности, сопствене вредности, својствене вредности, eigenvalues)*.

# Почетни тренутак кола

- Тренутак времена од кога почињемо да одређујемо напоне и струје приступа је *почетни тренутак кола*.
- Једначине кола решавамо за временске тренутке који су **после** почетног тренутка.
- *Предисторија кола* је временски интервал **пре** почетног тренутка.

$$t_0$$

$$t > t_0$$

$$t < t_0$$

У далекој прошлости  $t = -\infty$  усвајамо да елементи немају енергију.



## Почетни тренутак је обично ...

- Тренутак образовања (састављања) кола
- Тренутак промене положаја прекидача: укључивање или искључивање приступа
- Тренутак укључења извора (генератора)
- Тренутак скоковите промене побуде (напона и струја извора)
- Нулти тренутак на оси времена  $t_0 = 0$

# Природни почетни услови

- Струје калемова и напони кондензатора у почетном тренутку кола су *природни почетни услови кола*.
- Сви остали почетни услови су *изведени почетни услови*.
- Природни почетни услови се задају у тренутку непосредно **пре** почетног тренутка.

$$i_L(t_0^-) = I_0$$

$$u_C(t_0^-) = U_0$$

Initial conditions, IC, Initial state

## Са којим почетним условима решавамо једначине кола?

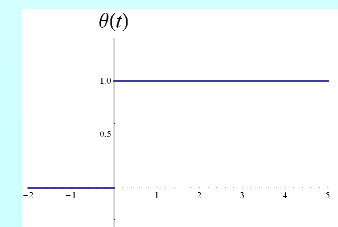
- Једначине кола решавачмо за почетне услове непосредно **после** почетног тренутка (у тренутку *t*-нула-плус).
- Диференцијалну једначину одзива решавачмо са почетним условима за променљиву и њене изводе у тренутку ***t*-нула-плус**.

$$t_0^+$$

$$i(t_0^+), \frac{di}{dt}(t_0^+), \frac{d^2i}{dt^2}(t_0^+), \dots, \frac{d^{r-1}i}{dt^{r-1}}(t_0^+)$$

# Описивање укључивања извора

- Стварни извори почињу да обезбеђују потребан напон и струју после неког тренутка времена, а то је *тренутак укључивања извора*.
- Пре тренутка укључивања извора, побуда је једнака **нули**.
- Укључивање описујемо Хевисајдовом функцијом а изворе чији су напони или струје једнаки нули за негативно време зовемо *каузалним*.



# Примери каузалних побуда

$$u_g(t) = U \vartheta(t)$$

Одскачна побуда (step input)

$$u_g(t) = U e^{-at} \vartheta(t)$$

Каузална експоненцијална побуда

$$i_g(t) = t \frac{I}{T} \vartheta(t)$$

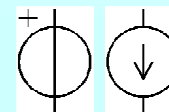
Успонска побуда (ramp input)

$$i_g(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t) \vartheta(t)$$

Каузална простопериодична побуда

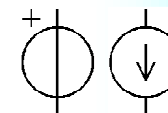
$$u_g(t) = U_m e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) \vartheta(t)$$

Каузална псеудопериодична побуда



$$u_C(t_0^-) = U_0$$

$$i_L(t_0^-) = I_0$$



## Потпуни одзив

- **Потпуни одзив** је напон или струја приступа, за тренутке времена после  $t$ -нула-плус, наста(о)ла услед природних почетних услова и побуда.
- Потпуни одзив је збир два сабирка: одзива на природне почетне услове, (почетну енергију) и одзива на побуду.

Ово је последица линеарности диференцијалних једначина и константности њихових коефицијената.

## Одзив на почетне услове

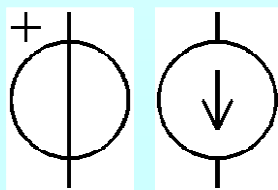
- *Одзив на природне почетне услове* (одзив на акумулисану енергију) је напон или струја приступа, за тренутке времена после  $t$ -нула-плус, у колу у коме су
- независни извори **искључени**.
- То је одзив настао због почетних услова.
- Ако нема почетне енергије, онда је овај одзив идентички једнак нули.

$$i_L(t_0^-) = I_0 \quad u_C(t_0^-) = U_0$$

Zero-input response

## Одзив на побуду

- **Одзив на побуду** (одзив на екситацију, одзив на укључење извора) је напон или струја приступа, за тренутке времена после  $t$ -нула-плус, у колу у коме су
- почетни услови једнаки **нули**.
- То је одзив настао због извора (независних генератора, стимулуса, екситација, инпута, побуда).



Zero-state response



## Облик одзива на побуду

$$i(t) = \psi(t) \vartheta(t) + H_1 \delta(t) + H_2 \frac{d\delta(t)}{dt} + \dots + H_N \frac{d^{(N)}\delta(t)}{dt}$$

$$H_1, H_2, \dots, H_N = \text{const}$$

Претпостављамо да је побуда каузална – једнака нули за негативно време.

Елементарна (обична)  
функција од полинома,  
тригонометријских,  
експоненцијалних, ...,  
функција

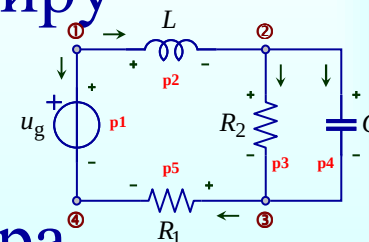
Број импулсних сабирака  $N$  зависи од реда кола  $r$  и нехомогеног дела једначине одзива  $F(t)$ . Ако је ред кола  $r$  већи или једнак од највећег реда извода Хевисајдове одскочне функције у нехомогеном делу  $F(t)$ , онда **нема** импулсних сабирака. У противном, број импулсних сабирака  $N$  је једнак разлици највећег реда извода Хевисајдове одскочне функције у  $F(t)$  и реда кола  $r$ .

# Суперпозиција одзива

- *Суперпозиција* (преклапање, сабирање) *одзива* је последица линеарности диференцијалних једначина и константности њихових коефицијената.
- Потпуни одзив је збир (1) одзива на почетне услове и (2) одзива на побуде, када они делују појединачно.
- Одзив је увек **каузалан**, не може почети пре побуде, и једнак је идентички нули када нема акумулисане енергије и побуда.

# Пример суперпозиције

- Посматрајмо неко коло са напонским извором, струјним извором, калемом и кондензатором који имају почетну енергију (природни почетни услови нису једнаки нули).
- Потпуни одзив у колу ће бити једнак збиру следећа четири одзива:
- Одзива на почетну енергију калема
- Одзива на почетну енергију кондензатора
- Одзива на напонски извор
- Одзива на струјни извор



У свим случајевима  
је исти упоредни  
смер одзива

# Импулсни и одскочни одзив

- Посматрајмо коло **без** почетне енергије (сви природни почетни услови су једнаки нули) у коме постоји само **један** напонски или струјни извор (један независан генератор).

Импулсни одзив се обележава и са  $h(t)$

- **Импулсни одзив** (*Гринова функција*, impulse response) је одзив на јединичну импулсну побуду (Диракову делта-функцију).

$$g(t)$$

- **Одскочни одзив** (*индициона функција*, step response) је одзив на јединичну одскочну побуду (Хевисајдову одскочну функцију).

$$f(t)$$

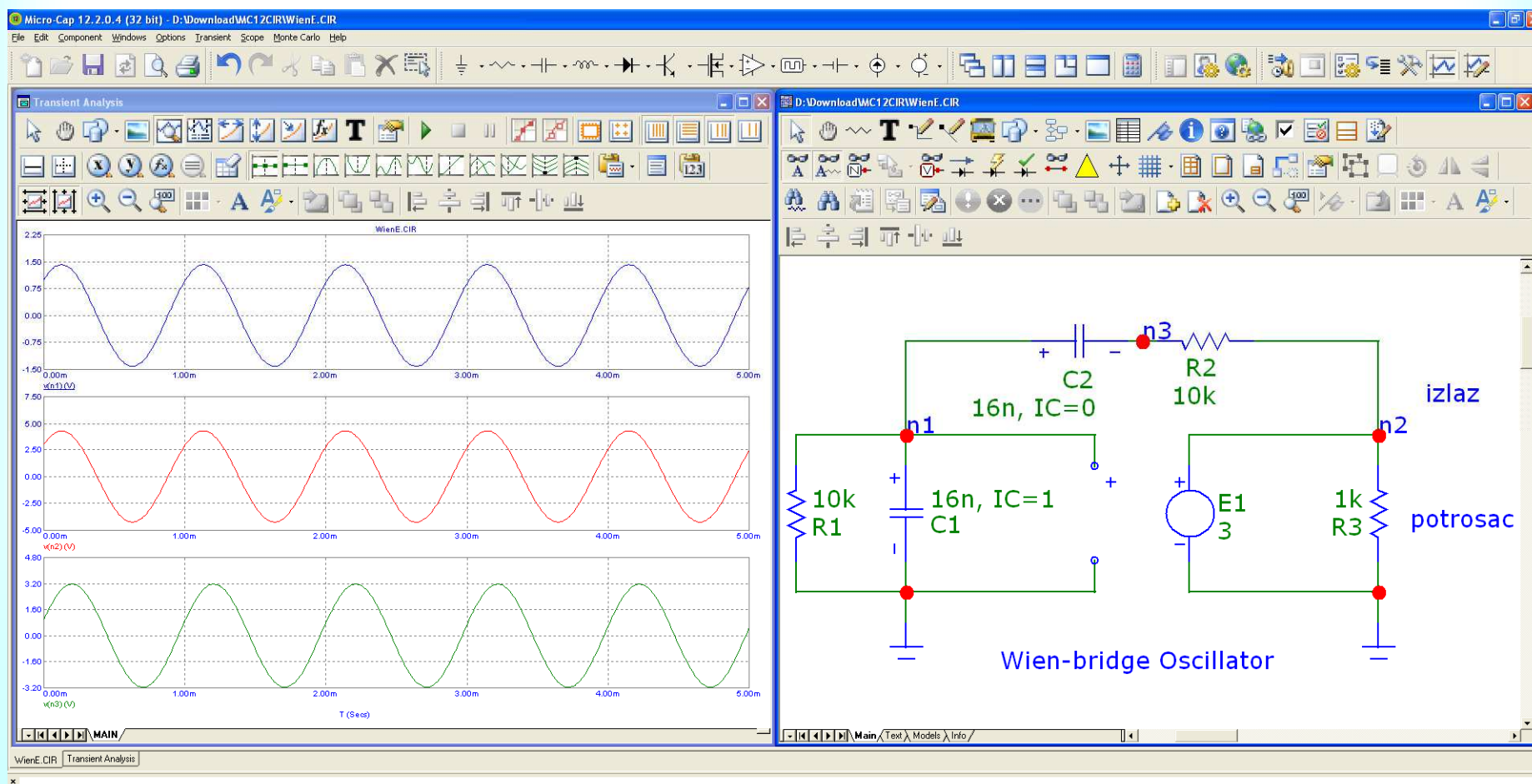
Импулсни одзив и одскочни одзив су дефинисани у сваком тренутку времена зато што представљају одзив на побуду и њихов домен је цела реална оса.

$$-\infty < t < +\infty$$

# Како одређујемо импулсни и одскочни одзив?

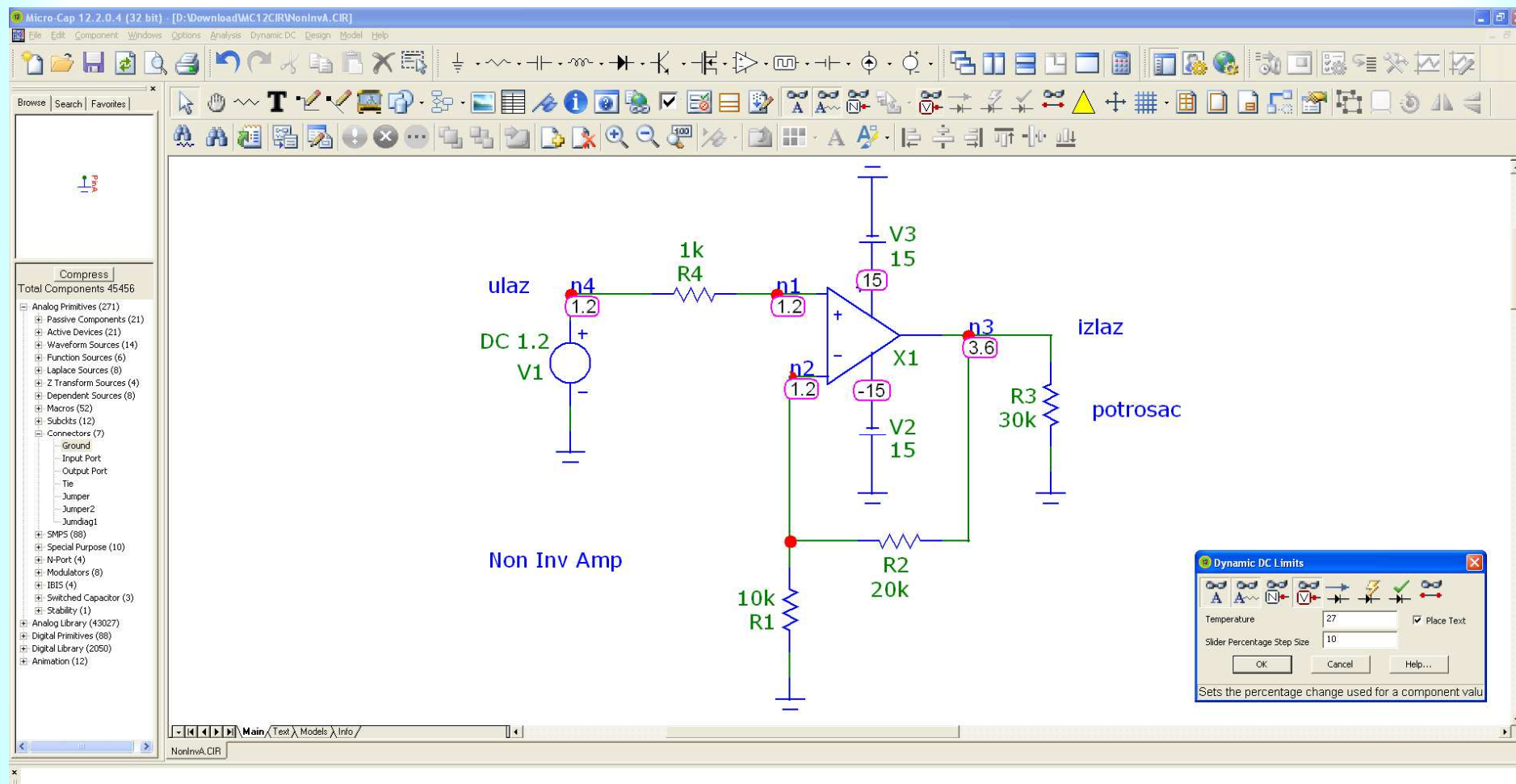
- Уочимо напон приступа или струју приступа и усвојимо упоредни смер.
- Сматрамо да нема почетне енергије и да су сви природни почетни услови једнаки нули.
- Треба да постоји само **један** напонски или струјни извор (један независан генератор). Ако има више генератора, онда све осим једног искључимо и за неискључени генератор рачунамо тражени одзив.
- За **импулсни одзив** усвајамо да је побуда **Диракова** делта-функција.
- За **одскочни одзив** усвајамо да је побуда **Хевисајдова** одскочна функција.
- Постављамо једначине кола, решавамо их, и одређујемо уочен напон приступа или струју приступа.
- Импулсни и одскочни одзив су одзиви на каузалну побуду, тако да су и они каузални, једнаки нули са негативно време, и дефинисани за сваки тренутак времена, на целој реалној оси.
- По правилу, импулсни и одскочни одзив се најделотворније и најучинковитије одређују применом Лапласове трансформације.

# Симулација електричног кола



Алтернатива решавању електричног кола решавањем једначина, са жељом да се нађе опште аналитичко решење (*симболичка анализа*), јесте симулација електричног кола рачунарским алатима (*нумеричка анализа*), програмима, на пример софтвером **Micro-Cap 12 free**.

# Non Inv Amp



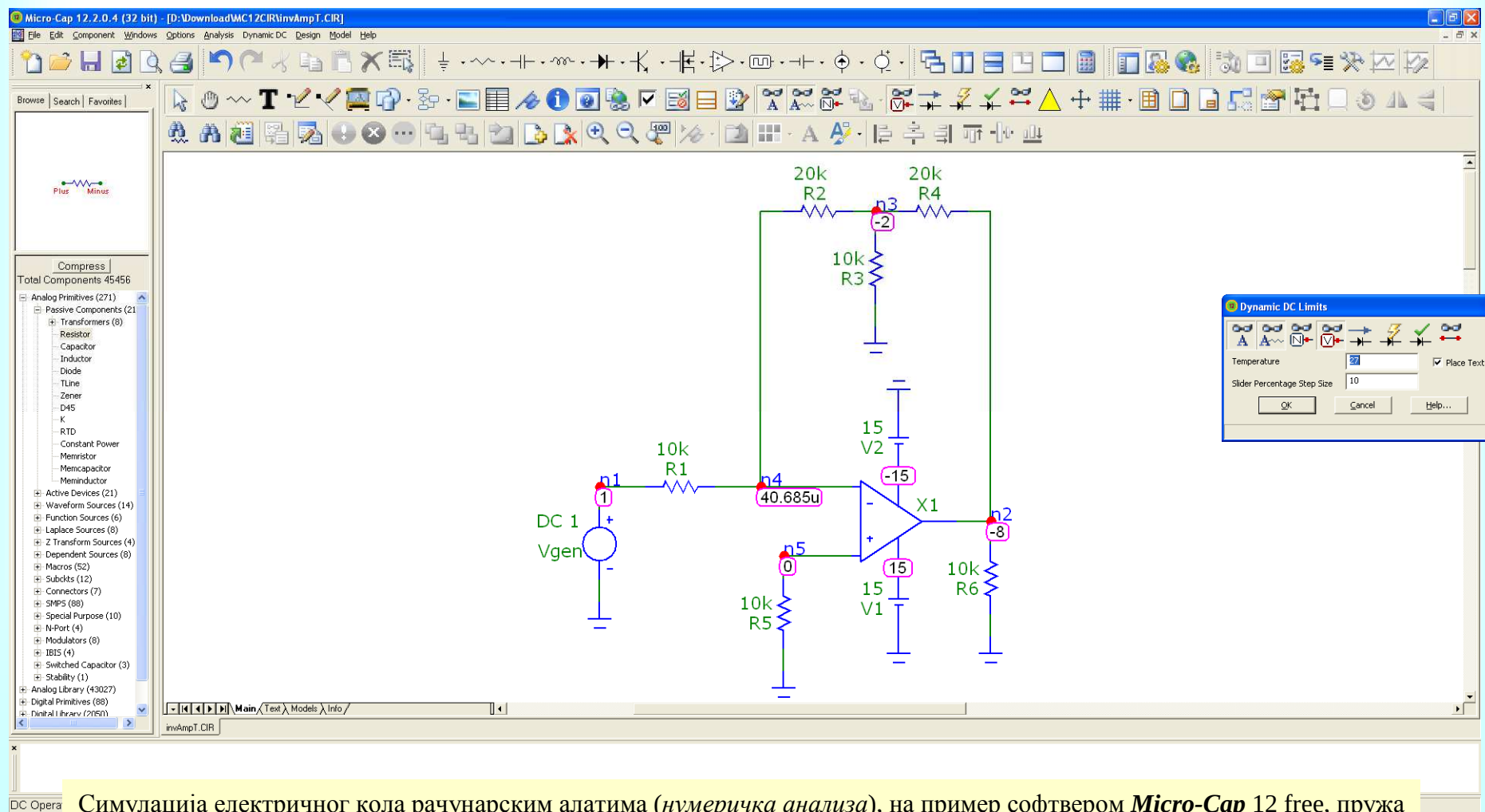
Симулација електричног кола рачунарским алатима (нумеричка анализа), програмима, на пример софтвером **Micro-Cap** 12 free, пружа могућност да се коло зада сликовно, шемом. Резултат, одзив, је бројчани и отежава увид у функционалност кола и утицај параметара.







# Inv Amp T



Симулација електричног кола рачунарским алатима (*нумеричка анализа*), на пример софтвером **Micro-Cap 12 free**, пружа могућност да се брзо провери (верификује) функционалност објављене шеме или замисли пројектанта (*proof of concept*).

# Питања (1)

- Исказати став о непрекидности струје калема и напона кондензатора.
- Шта је акумулисана енергија? Написати формуле за тренутну енергију калема и кондензатора.
- Шта је стање кола?
- Шта су једначине стања?
- Шта је ред кола?
- Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

## Питања (2)

- Шта је одзив? Шта је једначина одзива?
- Шта су сопствене учестаности (природне учестаности)?
- Какво је опште решење диференцијалне једначине одзива?
- Шта је почетни тренутак кола?
- Који тренутак се најчешће узима за почетни тренутак?
- Шта су природни почетни услови?
- Шта су изведени почетни услови?

## Питања (3)

- Шта су каузални извори?
- Шта је потпуни одзив?
- Шта је одзив на акумулисану енергију?  
Како се он одређује?
- Шта је одзив на побуду? Како се он одређује?
- Исказати принцип суперпозиције одзива.
- Шта је импулсни одзив (Гринова функција)?
- Шта је одскочни одзив (индициона функција)?

## Питања (4)

(5) Шта је стање електричног кола? Шта су једначине стања електричног кола?

(5) Шта су природни почетни услови електричног кола?

(5) Шта је ред електричног кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

## Питања (5)

(5) Шта су каузални извори?

(5) Шта је импулсни одзив (Гринова функција)? Описати поступак за одређивање импулсног одзива.

(5) Шта је одзив на побуду? Како се он одређује?

## Питања (6)

(4) Шта су природни почетни услови електричног кола?

Они се задају у тренутку времена

(a)  $t = +\infty$

(б)  $t = t_0^-$ ,  $t$ -нула-минус,  $t_0$  коначно

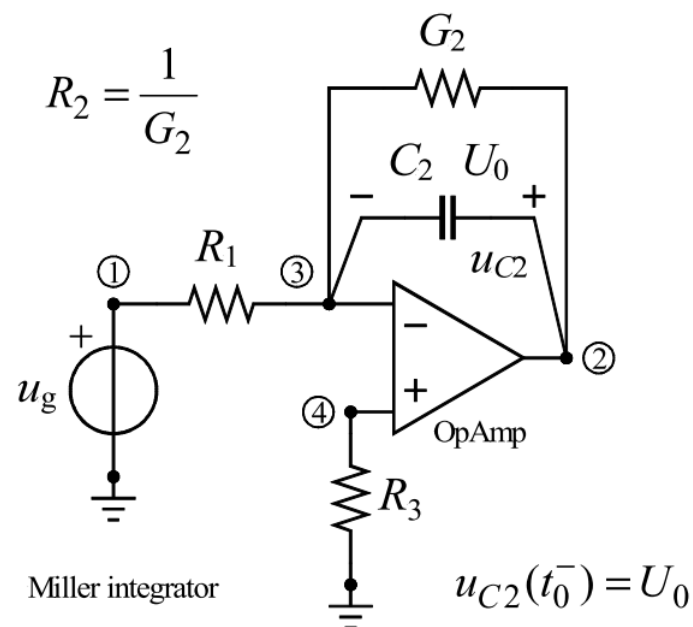
(в)  $t = t_0^+$ ,  $t$ -нула-плус,  $t_0$  коначно

(6) Колики је импулсни одзив идеалног интегратора, за напон  $v_2$ , када је  $G_2 = 0$ , и који је његов домен?

Одговор:

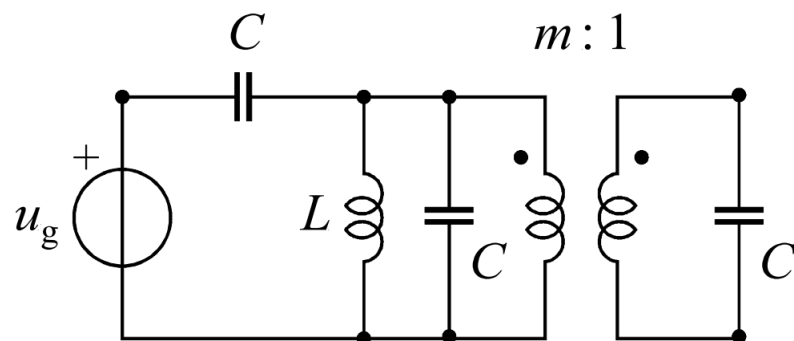
Импулсни одзив је

Домен је



## Питања (7)

(5) Ред електричног кола са слике је



- (a) 1,
- (б) 2,
- (в) 3,
- (Г) 4,
- (д) 5,
- (ђ) 6 ?

(4) Шта су једначине стања? Шта је ред кола? Када је ред кола мањи од броја динамичких елемената?

(6) Шта је импулсни одзив (Гринова функција, јединични импулсни одзив)? Описати поступак за одређивање импулног одзива. Који је домен импулног одзива, односно на ком интервалу времена је дефинисан?

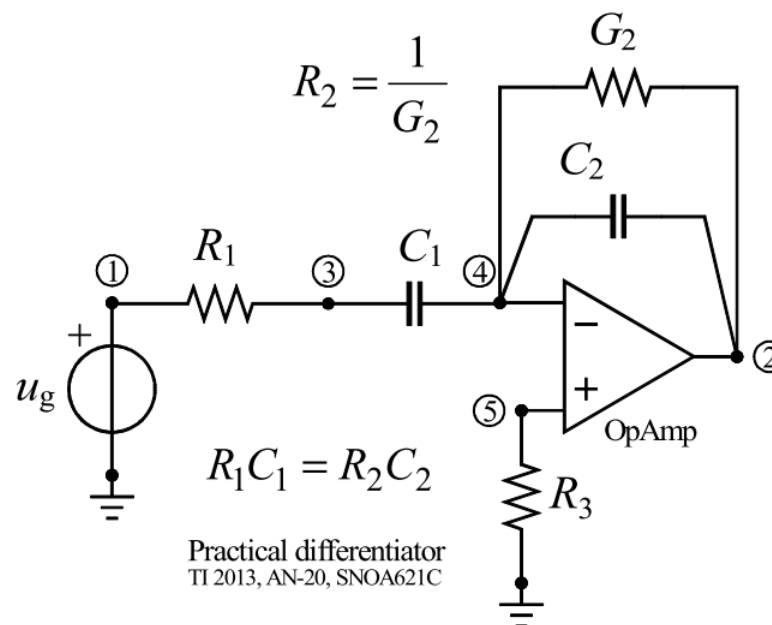
(4) Шта је одскочни одзив (индициона функција, step response)? Описати поступак за одређивање одскочног одзива. Који је домен (област дефинисаности) одскочног одзива?



## Питања (8)

(7) Колики је одскочни одзив идеалног диференцијатора, за напон  $v_2$ , када је  $R_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  и који је његов домен?

Одговор:



(5) Импулсни одзив (Гринова функција) електричног кола је  $g(t) = A\vartheta(t)$ .

Одредити одзив на побуду у овом колу када је побуда  $B\delta(t - T)$ . Сматрати да су  $A$ ,  $B$  и  $T$  реални и позитивни параметри.

$$AB\vartheta(t - T)$$

Одзив се може одредити, на пример, применом **својства линеарности** и **својства померања у времену**, што представља најједноставнији и најделотворнији начин у овом случају.

# Задатак (1)

## Задатак 1

Електрично коло са ОТА (Operational Transconductance Amplifier) жиратором има познате вредности елемената и

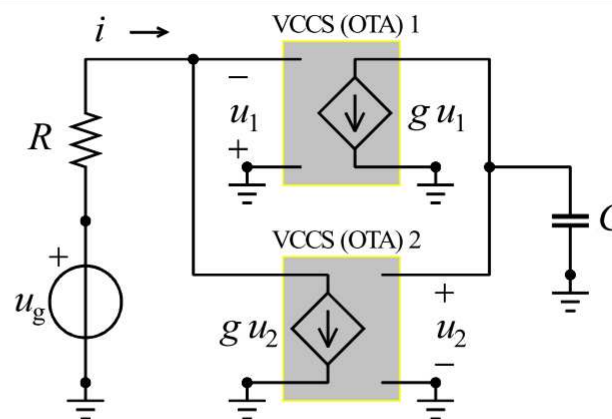
$$u_g(t) = U \vartheta(t).$$

(3) Нацртати граф кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека и број главних петљи (фундаменталних контура).

(7) Одредити напон кондензатора и његов домен (област дефинисаности).

(5) Одредити граничну вредност струје отпорника после бесконачно дугог времена ( $t \rightarrow +\infty$ ).

Граф кола је



Број главних пресека је      а петљи

Напон кондензатора је

Гранична вредност струје отпорника је

## Задатак (2)

### Задатак 2

Аналогни електронски одузимач је шематски приказан на слици. Вредности елемената су познате и постоји веза

$$\text{параметара } \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} = 1.$$

(7) Одредити напон (потенцијал)  $v_3$  и његов домен (област дефинисаности).

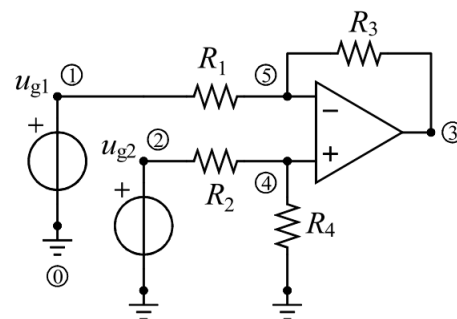
(5) Одредити снагу (тренутну улазну снагу) операционог појачавача.

(3) Нацртати напон  $v_3$  у функцији времена ако су побуде  $u_{g1}(t) = U \vartheta(t)$ ,  
 $u_{g2}(t) = 2U \vartheta(t - T)$ ,  $U > 0$ ,  $T > 0$ .

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Напон (потенцијал)  $v_3$  и његов домен су

Снага операционог појачавача је



Напон  $v_3$  у функцији времена је

## Задатак (3)

### Задатак 1

Електроенергетски трансформатор је у колу познатих параметара,  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 2R$ ,

$$L_1 = L, L_2 = 4L, k = \frac{1}{2}, u_g(t) = U \vartheta(t),$$

$$i_1(t_0^-) = I_{01}, t_0 = 0.$$

(6) Одредити струју секундару  $i_2$  и њен домен.

(6) Одредити напон отворене везе  $u$  и његов домен.

(3) Нацртати график напона  $u$ .

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

-----  
Струја секундару  $i_2$  и њен домен су

Напон отворене везе  $u$  и његов домен су

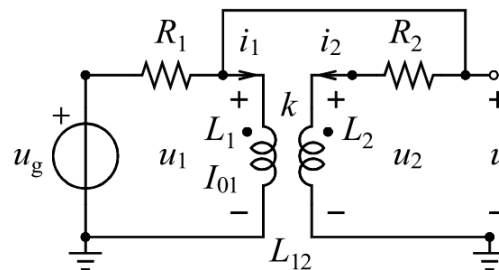


График напона  $u$  је

## Задатак (4)

### Задатак 2

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) нема почетну енергију и  $a = 3$ ,  $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ,  $i_g = Q\delta(t)$ .

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(7) Одредити напон  $u$  и његов домен.

(3) Нацртати график  $u$  у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Једначине стања у матричном облику су

Ред кола је

Напон  $u$  и његов домен су

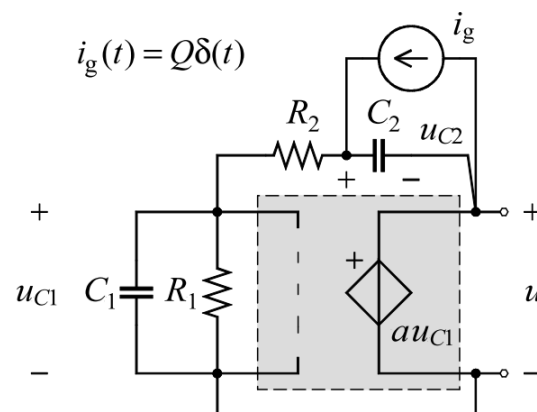


График напона  $u$  је

## Задатак (5)

### Задатак 1

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) је приказан на слици и

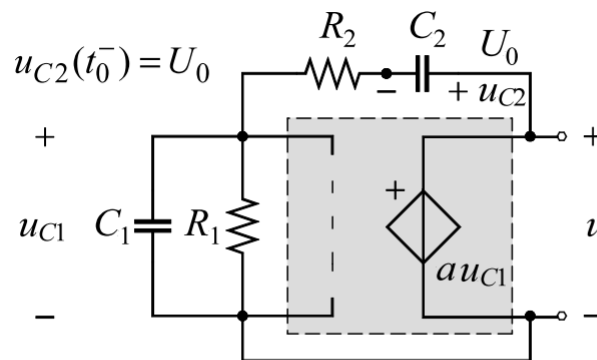
$$R_1 = R_2 = R, \quad a = 3, \quad C_1 = C_2 = C, \quad t_0 = 0.$$

(4) Нацртати граф овог електричног кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека и главних петљи (фундаменталних контура).

(7) Одредити напон  $u$  за  $t > t_0$ .

(4) Нацртати график  $u$  у функцији времена за  $t > t_0$ . Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Граф електричног кола је



Главних пресека има , а петљи .

Напон  $u$  за  $t > t_0$  је

График  $u$  у функцији времена за  $t > t_0$  је

## Задатак (6)

### Задатак 2

Аналогни електронски сабирач познатих параметара је приказан на слици. Одредити (3) број главних пресека графа кола и (7) напон (потенцијал)  $v_4$  и његов домен.

(5) Нацртати напон  $v_4$  у функцији времена ако су побуде  $u_{g1}(t) = U \vartheta(t)$ ,

$$u_{g2}(t) = -2U \vartheta(t - T), \quad u_{g3}(t) = U \vartheta(t - 2T),$$

$U > 0$ ,  $T > 0$ , и ако су отпорности свих отпорника једнаке  $R$ .

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Број главних пресека је .

Напон (потенцијал)  $v_4$  и његов домен су

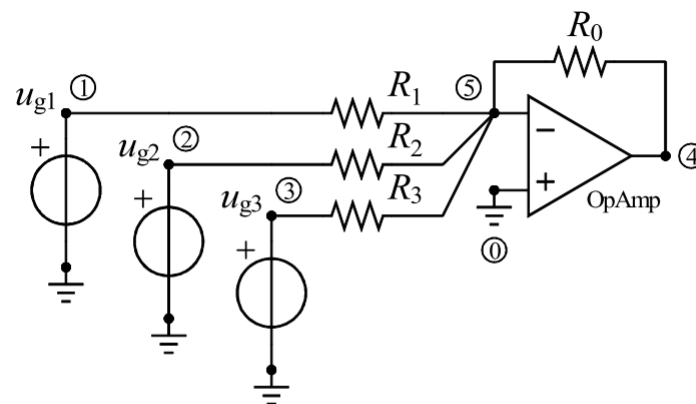


График напона  $v_4$  у функцији времена је

## Задатак (7)

### Задатак 1

LC-реализација филтра (Butterworth maximally flat highpass approximation) има познате параметре и  $L = \frac{R}{\sqrt{2}\Omega}$ ,  $C = \frac{1}{\sqrt{2}R\Omega}$ ,

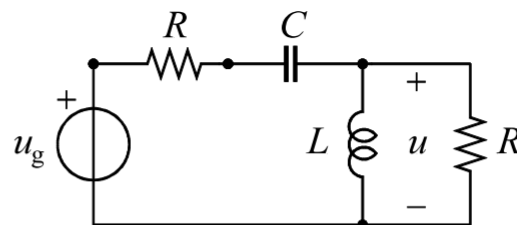
$\Omega > 0$ . Одредити

(6) импулсни одзив (Гринову функцију) за излазни напон  $u(t)$  и његов домен,

(6) одскачни одзив (индициону функцију) за излазни напон  $u(t)$  и његов домен.

(3) Нацртати график одскочног одзива. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Импулсни одзив и његов домен су



Одскачни одзив и његов домен су

График одскочног одзива је



## Задатак (8)

### Задатак 2

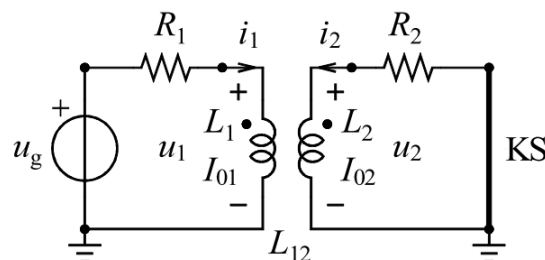
Електроенергетски трансформатор је идеализовано представљен линеарним индуктивним трансформатором  $L_1 = L$ ,  $L_2 = L$ ,  $k = \frac{1}{2}$  и отпорностима губитака у намотајима  $R_1 = R$ ,  $R_2 = R$ . Секундар је краткоспојен а примар је побуђен напонским извором импулсног напона  $u_g(t) = \Phi \delta(t)$ . Почетне струје примара и секундара су  $i_1(t_0^-) = I_{01}$ ,  $i_2(t_0^-) = 0$ ,  $t_0 = 0$ .

(5) Одредити ред овог електричног кола и једначине стања у матричном облику.

(5) Одредити струју примара  $i_1$  и њен домен.

(5) Одредити струју секундара  $i_2$  и њен домен.

Ред кола је



Једначине стања у матричном облику су

Струја примара  $i_1$  и њен домен су

Струја секундара  $i_2$  и њен домен су

## Задатак (9)

### Задатак 1

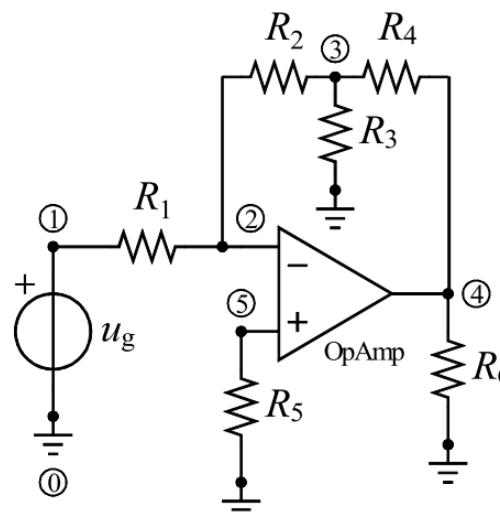
Инвертујући појачавач великог појачања и малог распона познатих отпорности је приказан на слици. Одредити

(8) напонско појачање  $A = \frac{v_4}{u_g}$ .

(3) Нацртати граф појачавача и

(4) одредити број главних (фундаменталних) пресека и петљи (контура).

Напонско појачање је



Граф појачавача је

Број главних (фундаменталних) пресека је ,  
а петљи (контура) је .

# Задатак (10)

## Задатак 2

Осцилатор са Виновим мостом (Wien bridge oscillator) нема почетну енергију и  $a = 3$ ,  $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ,  $u_g = U\vartheta(t)$ .

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(7) Одредити напон  $u$  и његов домен.

(3) Нацртати график  $u$  у функцији времена. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Једначине стања у матричном облику су

Ред кола је

Напон  $u$  и његов домен су

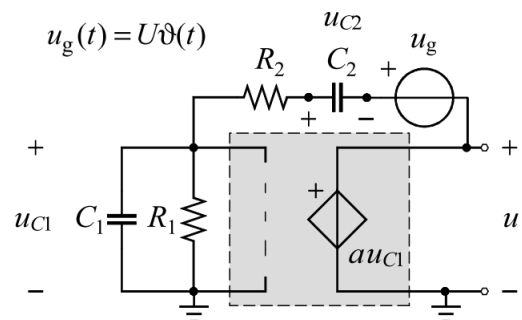


График напона  $u$  је

# Задатак (11)

## Задатак 2

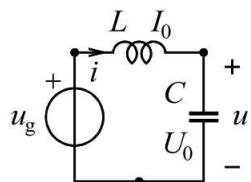
Вредности елемената електричног кола са слике су познате,  $u_g(t) = U_m \sin(\omega t) \vartheta(t)$ ,

$$i(t_0^-) = I_0, u(t_0^-) = U_0, t_0 = 0, C = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(5) Одредити напон кондензатора  $u$  и

(5) скицирати његов график у функцији времена за  $t > t_0$ .



Једначине стања у матричном облику су

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega^2 L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} u_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ред кола је 2 (два).

Напон кондензатора  $u$  је

$$u(t) = \omega L I_0 \sin(\omega t) + U_0 \cos(\omega t)$$

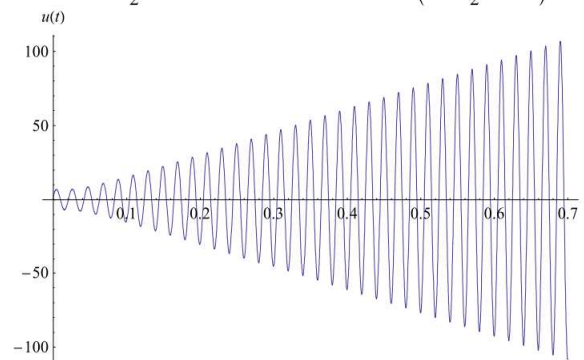
$$+ \frac{1}{2} U_m (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) \vartheta(t)$$

$$t \geq t_0$$

Предисторија електричног кола није позната јер не знамо како су настали почетни услови. Не познајемо одзив за  $t < t_0$ ,  $t_0 = 0$ .

Скица графика напона је

$$u(t) = \frac{1}{2} \sin(t \omega) (2 I_0 L \omega + U_m) + \cos(t \omega) \left( U_0 - \frac{1}{2} t \omega U_m \right)$$



Цртамо га само за  $t \geq t_0$  јер не познајемо предисторију кола за  $t < t_0$ .

Уочити да одзив на почетне услове **не садржи** као множилац  $\vartheta(t)$ , Хевисајдову функцију (јединичну одскочну функцију).

# Задатак (11) MaximaOnAndroid

MaximaOnAndroid

```
(%i2) assume(L > 0, C > 0, omega > 0, Um > 0)
```

$$[L > 0, C > 0, \omega > 0, Um > 0]$$

(%i3) C:1/(L\*omega^2)

$$\frac{1}{L\omega^2}$$

(%i4) eq1:'diff(C\*u(t),t) = i(t)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{L\omega^2} \right) = i(t)$$

MaximaOnAndroid

```
(%i5) eq2:L*'diff(i(t),t) = uL(t)
```

$$L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) = uL(t)$$

(%i6) eqns:[eq1,eq2,uL(t)+u(t) = Um\*sin(omega\*t)]

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{L\omega^2} \right) = i(t), L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) = uL(t), uL(t) + u(t) = Um \sin(\omega t) \right]$$

(%i7) vars:[u(t),uL(t),i(t)]

$$[u(t), uL(t), i(t)]$$

MaximaOnAndroid

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{L\omega^2} \right) = i(t), L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) = uL(t), uL(t) + u(t) = Um \sin(\omega t) \right]$$

(%i7) vars:[u(t),uL(t),i(t)]

$$[u(t), uL(t), i(t)]$$

(%i8) ev(sol:desolve(eqns,vars),expand)

(%i9) u(t) = collectterms(ev(u(t),sol),Um)

$$u(t) = i(0) L \omega \sin(\omega t) + Um \left( \frac{\sin(\omega t)}{2} - \frac{\omega t \cos(\omega t)}{2} \right) + u(0) \cos(\omega t)$$

batch("/data/data/jp.yhonda/cache/userscript1546402717.mac");

data/jp.yhonda/cache/userscript1546402717.mac";

Enter

$u(t) = \omega L I_0 \sin(\omega t) + U_0 \cos(\omega t)$

$+ \frac{1}{2} U_m (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) \vartheta(t)$

$t \geq t_0$

# Augustin-Louis Cauchy

## 1789–1857



Један од највећих светских математичара. Дипломирао на École Polytechnique, где је био и редовни професор. Његово име је исписано на Ајфеловој кули. Рођен у Паризу, Француска.

# Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz 1821–1894

H. Helmholtz, "Über einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche", *Annalen der Physik und Chemie*, vol. 89, no. 6, pp. 211–233, 1853.



Михајло Пупин, истакнути српски научник, је био Хелмхолцов докторант (заједно са Heinrich Hertz).

Лекар и физичар. Први исказао став о суперпозицији (принцип суперпозиције) у електричним колима 1853. Рођен у Потсдаму, Пруска (Немачка).

# George Green 1793–1841



Математичар и физичар. Први исказао став о потенцијалима и увео (Гринове) функције за језгро решења диференцијалне једначине. Рођен у Нотингему, Уједињено Краљевство.