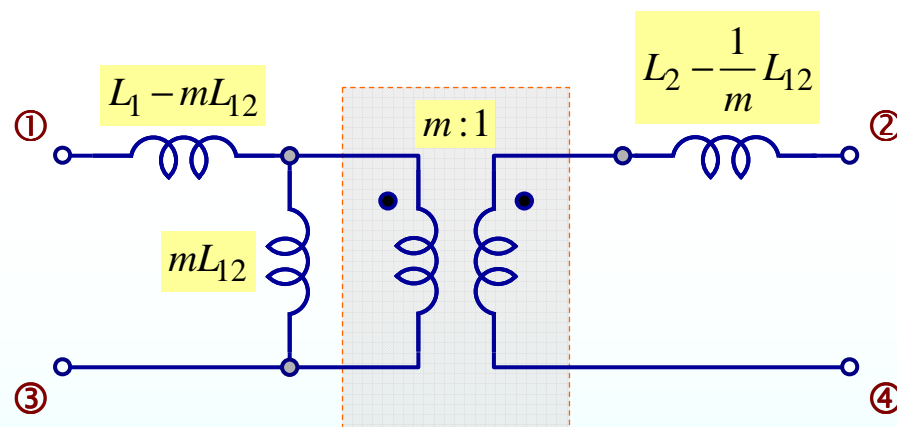


Теорија електричних кола



Користите само материјале које вам достави и препоручи предметни наставник у текућој школској години.



Дејан Тошић

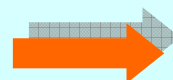
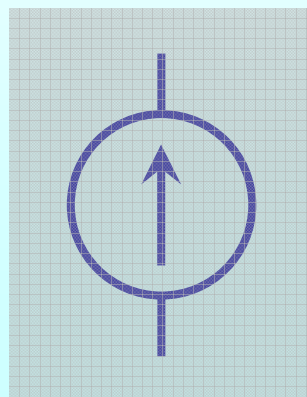
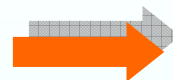
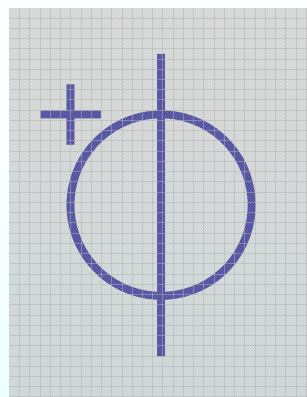
Основне теореме

Тевененова, Мајер-Нортонова,
Прилагођење по снази,
Реципрочност

Искључивање извора

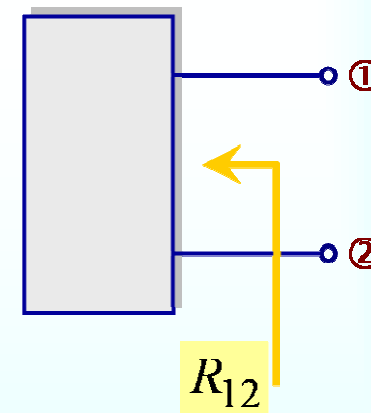
- **Напонски** извор се искључује тако што се замењује **кратком** везом.
- **Струјни** извор се искључује тако што се замењује **отвореном** везом.
- Када се каже да су у мрежи искључени извори (генератори), подразумева се да су искључени **независни** извори.

Шема искључених извора



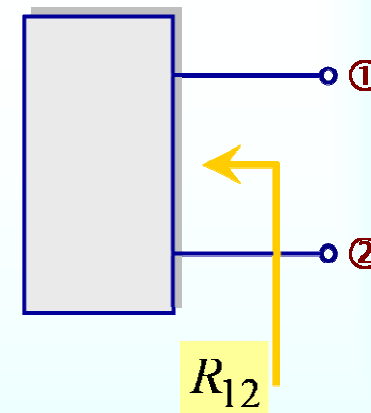
Улазна отпорност

- Дефинисаћемо улазну отпорност линеарне **резистивне** мреже са једним приступом у којој нема независних извора.
- **Улазна отпорност** је количник напона и струје приступа мреже за стандардне смерове напона и струје.
- Мрежа се побуђује **струјним** тест извором у поступку одређивања улазне отпорности.

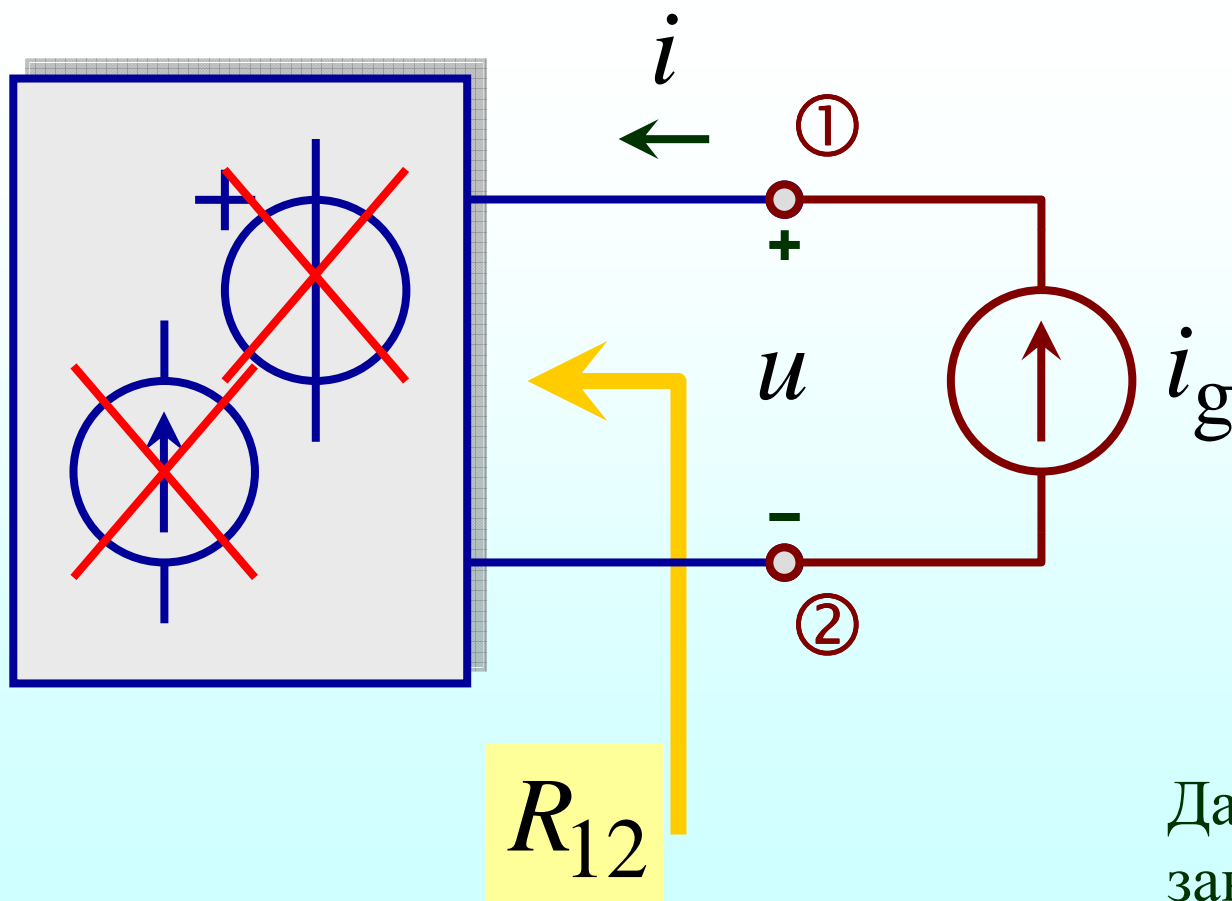


Како се налази улазна отпорност?

1. Одредити приступ (два краја).
2. Искључити независне изворе.
3. Усвојити стандардне смерове струје и напона приступа.
4. Прикључити струјни извор на приступ.
5. Одредити напон и струју приступа.
6. Одредити количник напона и струје.



Налажење улазне отпорности

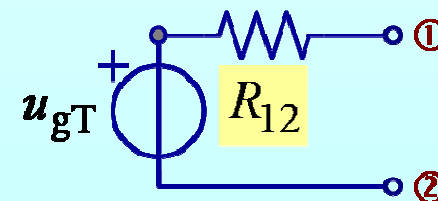


$$R_{12} = \frac{u}{i}$$

Да ли се искључују
зависни извори? **Не.**

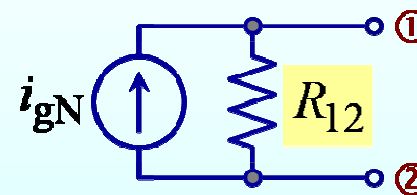
Тевененова теорема

- Линеарна резистивна мрежа са једним приступом може се заменити **редном** везом **отпорника** и **напонског** извора.
- Отпорност отпорника је улазна отпорност мреже.
- Напон напонског извора једнак је напону **отвореног** приступа.



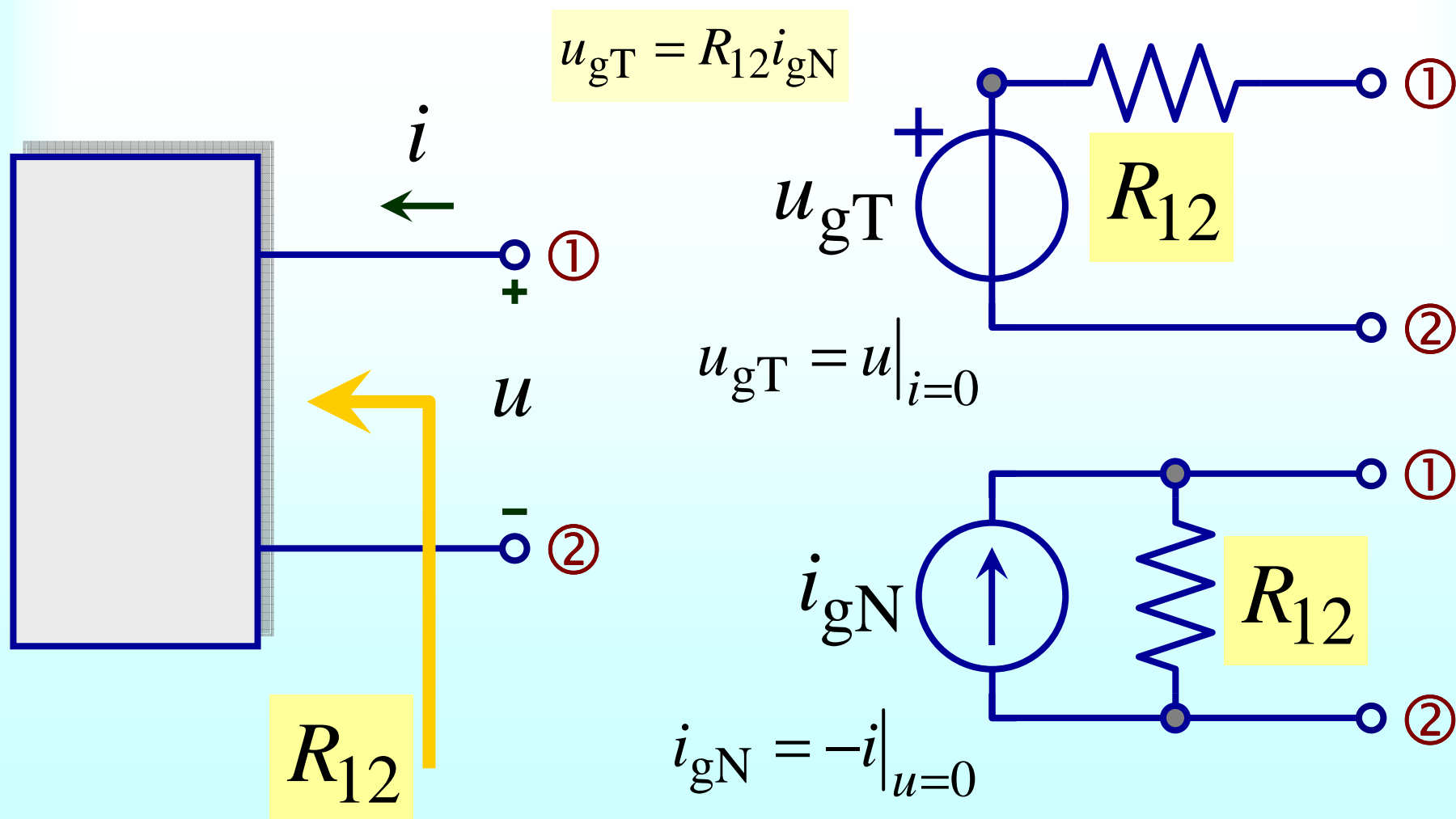
Мајер-Нортонова теорема

- Линеарна резистивна мрежа са једним приступом може се заменити **паралелном везом отпорника и струјног** извора.
- Отпорност отпорника је улазна отпорност мреже.
- Струја струјног извора једнака је струји **краткоспојеног** приступа.



Став (теорема) је познат и под називом Нортонова теорема

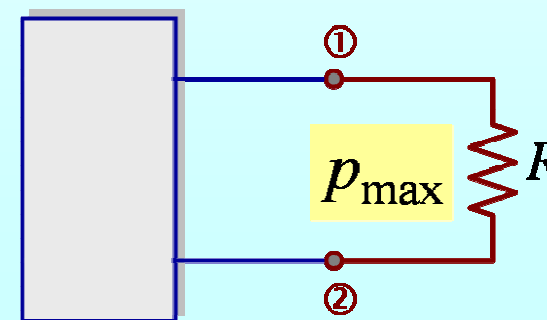
Тевенен-Мајер-Нортонова теорема



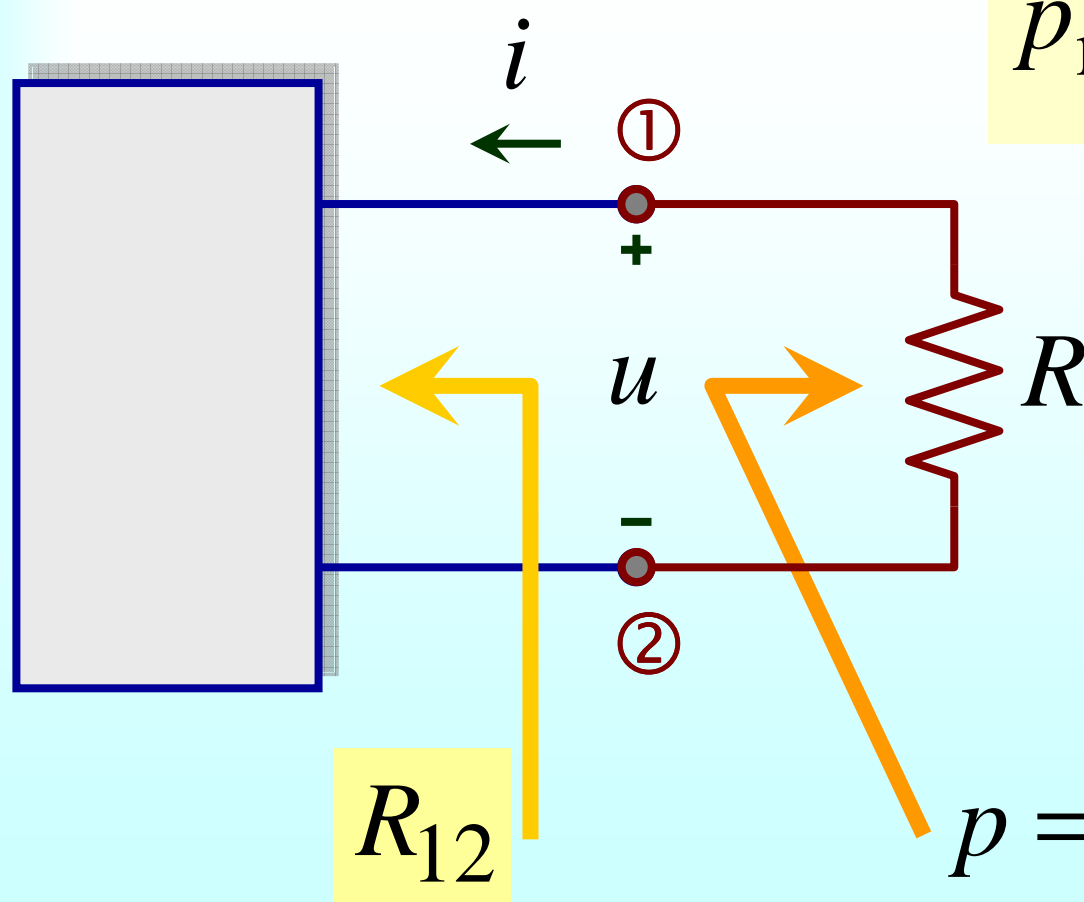
Прилагођење по снази

- Посматрајмо линеарну резистивну мрежу са једним приступом.
- Прикључимо на мрежу отпорник.
- Колика треба да буде отпорност отпорника да би његова снага била највећа могућа?
- Колика је та снага?

Највећа могућа снага отпорника прикљученог на мрежу се зове расположива снага мреже (*maximum available power*).



Теорема о прилагођењу по снази

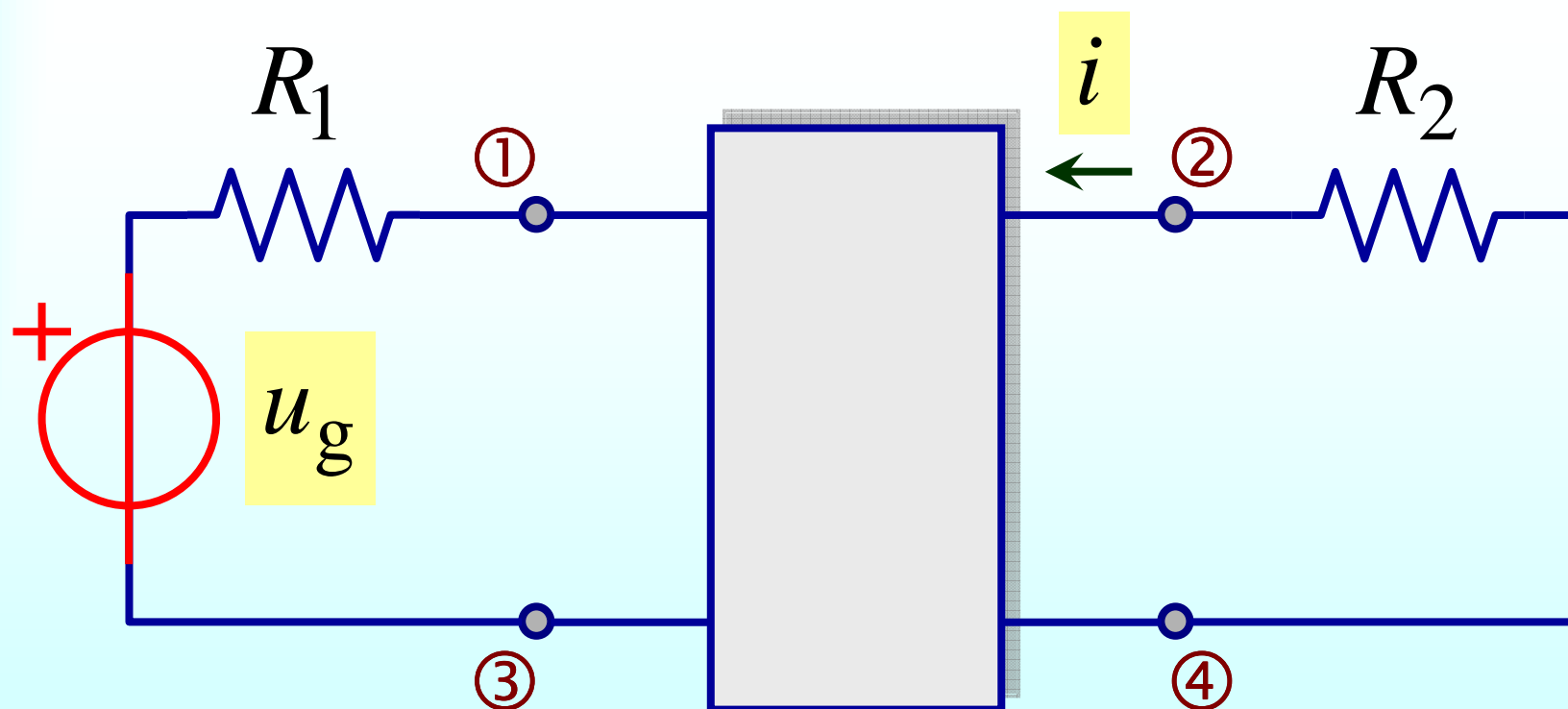


$$P_{\max} = p(R) \Big|_{R=R_{12}}$$

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \frac{u_{gT}^2}{R_{12}}$$

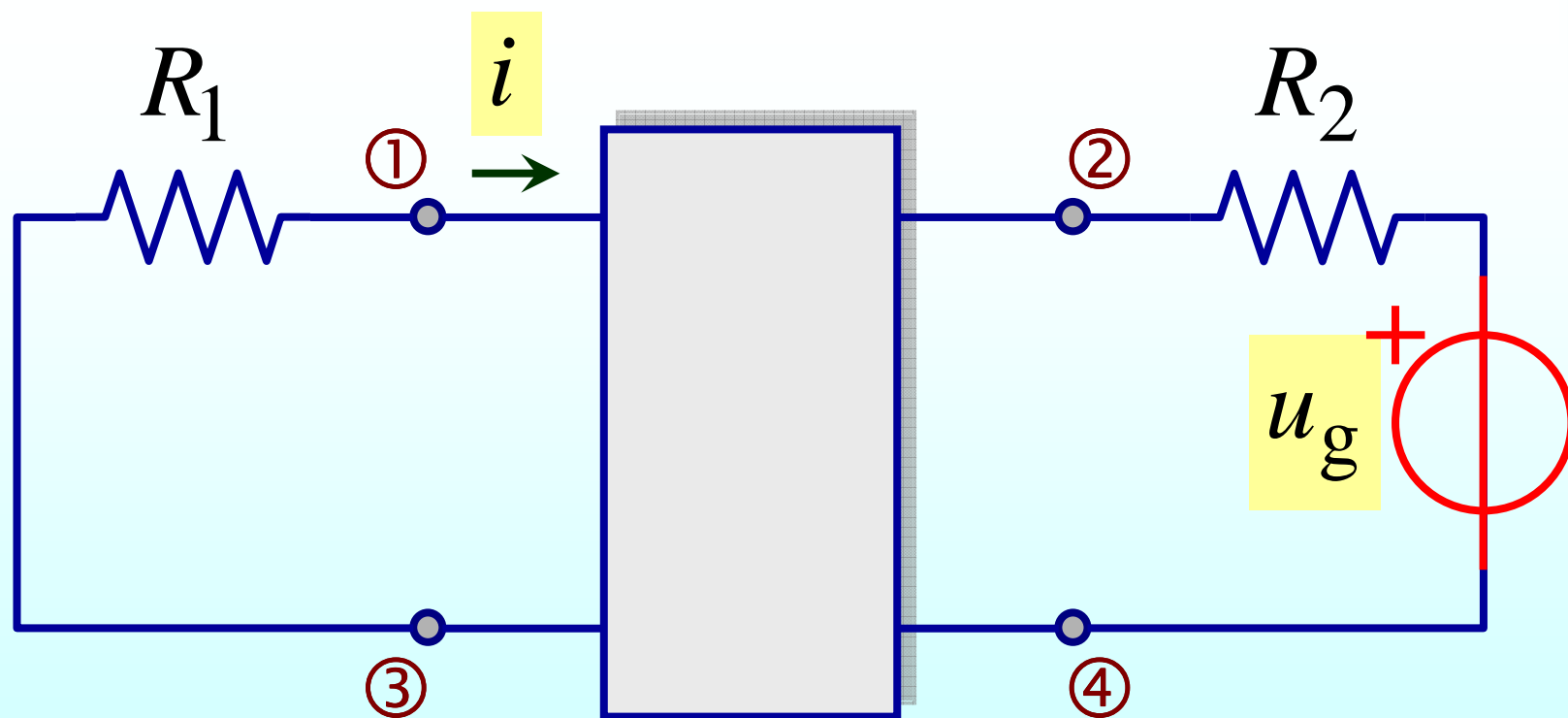
$$p = p(R) = u \cdot (-i)$$

Став о реципрочности, шема 1



Линеарна резистивна мрежа са два приступа у којој **нема** независних извора.

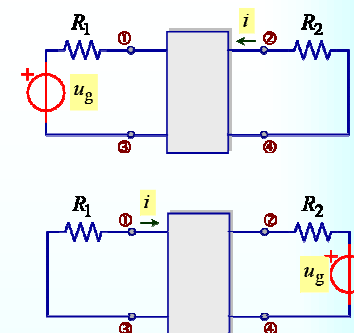
Став о реципрочности, шема 2



Линеарна резистивна мрежа са два приступа у којој **нема** независних извора.

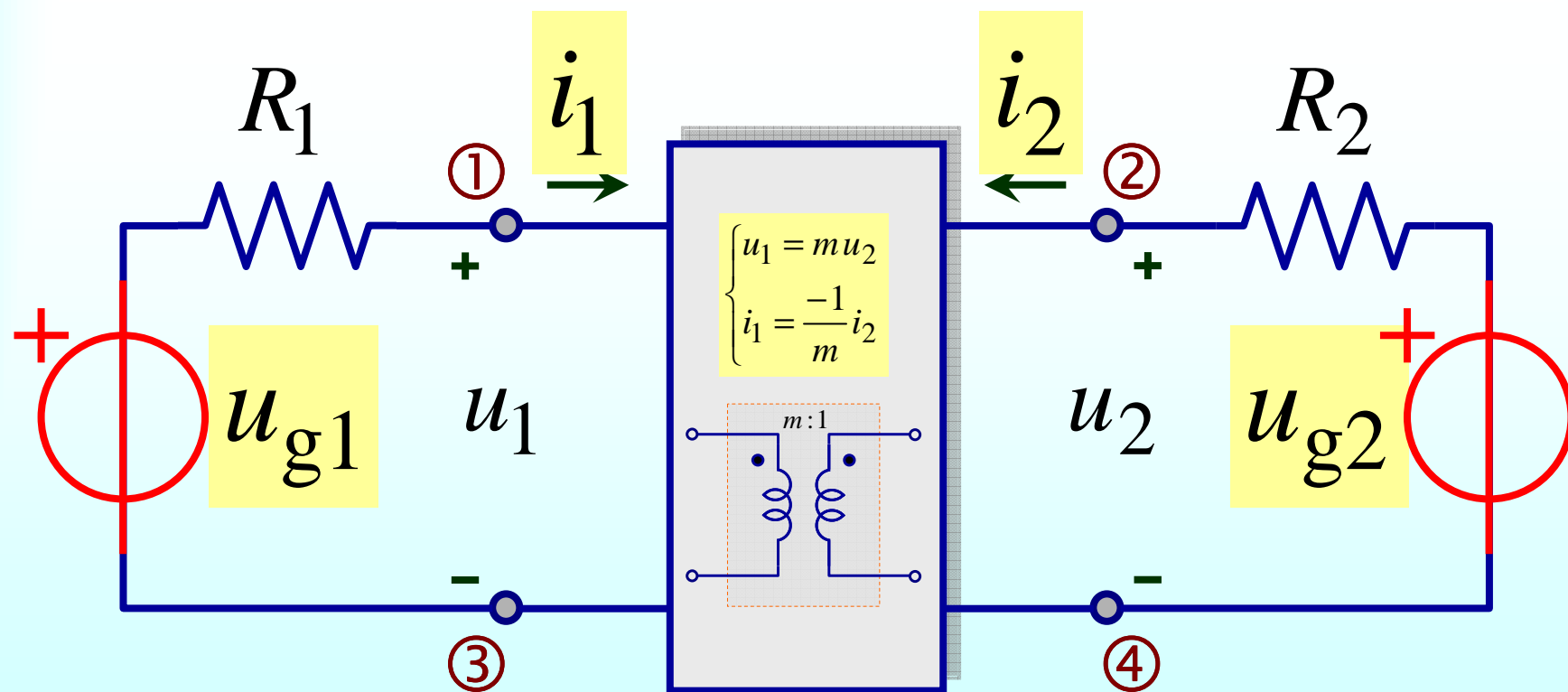
Реципрочна резистивна мрежа

- Посматрајмо линеарну резистивну мрежу са два приступа у којој **нема** независних извора.
- Мрежа се сматра **реципрочно** ако важе везе напона и струја приступа као што је приказано на претходне две шеме.
- Реципрочност значи узајамност приступа при замени места извора и места одзива.



Постоје и други искази реципрочности којима се нећемо бавити.

Испитивање реципрочности програмом Maxima



$$i_2(u_{g1} = u_g, u_{g2} = 0) = i_1(u_{g1} = 0, u_{g2} = u_g)$$

Да ли је ИТ реципрочан?

Да ли је идеалан трансформатор реципрочан елемент?

```
(%i1)  jednacine: [ug1 = R1*i1 + u1,
                  ug2 = R2*i2 + u2,
                  u1 = m*u2,
                  i1 = (-1/m)*i2];
```

```
(jednacine) [ug1=u1+R1 i1, ug2=u2+R2 i2, u1=m u2, i1=- i2/m ]
```

```
(%i2)  promenljive: [i1, i2, u1, u2];
```

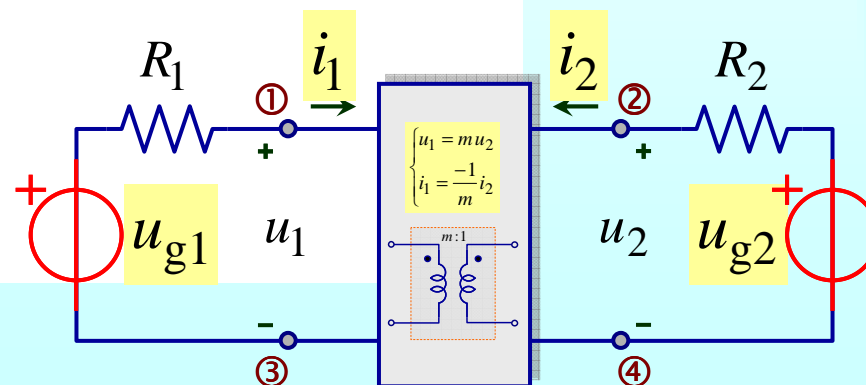
```
(promenljive) [i1, i2, u1, u2]
```

```
(%i3)  odziv: linsolve(jednacine,promenljive);
```

```
(odziv) [ i1 = (ug1 - m ug2) / (R2 m^2 + R1), i2 = - (m ug1 - m^2 ug2) / (R2 m^2 + R1), u1 = (R1 m ug2 + R2 m^2 ug1) / (R2 m^2 + R1), u2 = (R1 ug2 + R2 m ug1) / (R2 m^2 + R1) ]
```

```
(%i4)  i2ug1: ev(i2, odziv), [ug1=ug, ug2=0];
```

```
(i2ug1) - m ug / (R2 m^2 + R1)
```



ИТ јесте реципрочан

```
(%i3) odziv: linsolve(jednacine,promenljive);
(odziv) [ i1 =  $\frac{u_{g1} - m u_{g2}}{R2 m^2 + R1}$ , i2 =  $-\frac{m u_{g1} - m^2 u_{g2}}{R2 m^2 + R1}$ , u1 =  $\frac{R1 m u_{g2} + R2 m^2 u_{g1}}{R2 m^2 + R1}$ , u2 =  $\frac{R1 u_{g2} + R2 m u_{g1}}{R2 m^2 + R1}$  ]

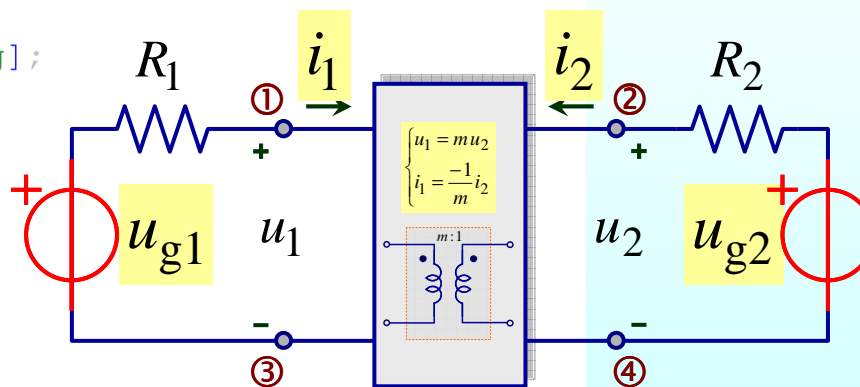
(%i4) i2ug1: ev(i2, odziv), [ug1=ug, ug2=0];
(i2ug1)  $-\frac{m u g}{R2 m^2 + R1}$ 

(%i5) ilug2: ev(i1, odziv), [ug1=0, ug2=ug];
(ilug2)  $-\frac{m u g}{R2 m^2 + R1}$ 

(%i6) is(equal(i2ug1,ilug2));
(%o6) true

(%i7) is(i2ug1=ilug2);
(%o7) true

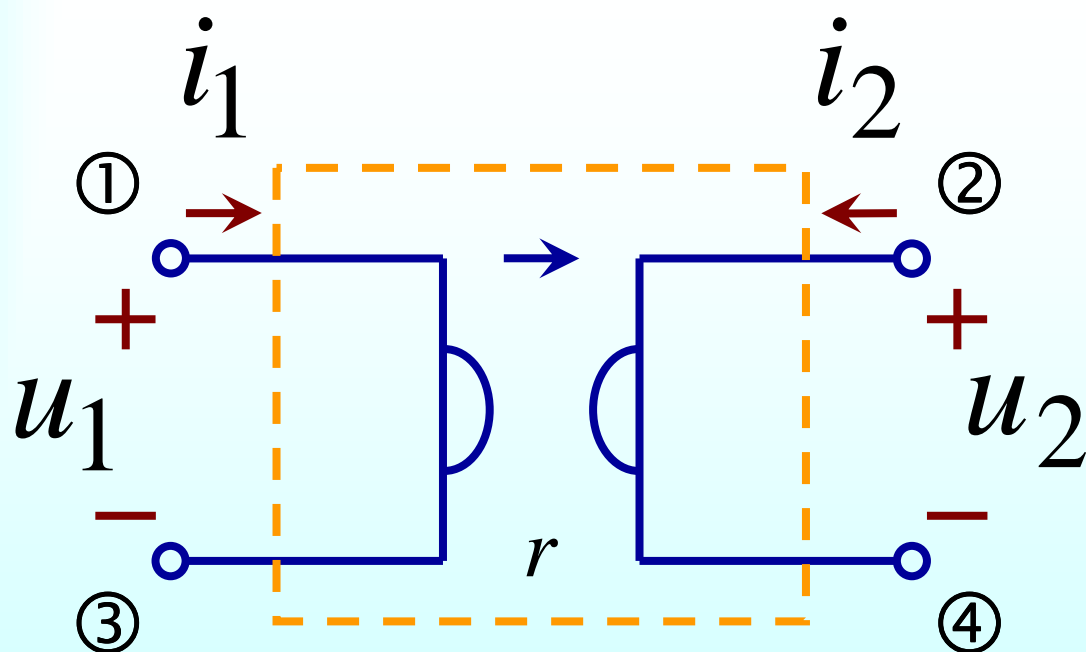
(%i8) ratsimp(i2ug1-ilug2);
(%o8) 0
```



$$i_2(u_{g1} = u_g, u_{g2} = 0) = i_1(u_{g1} = 0, u_{g2} = u_g)$$

Идеалан трансформатор јесте реципрочан елемент.

Да ли је жиратор реципрочан?



$$\begin{cases} u_1 = -r \cdot i_2 \\ u_2 = r \cdot i_1 \end{cases}$$

Самостална вежба: Да ли је жиратор реципрочан елемент?



Трансформатори

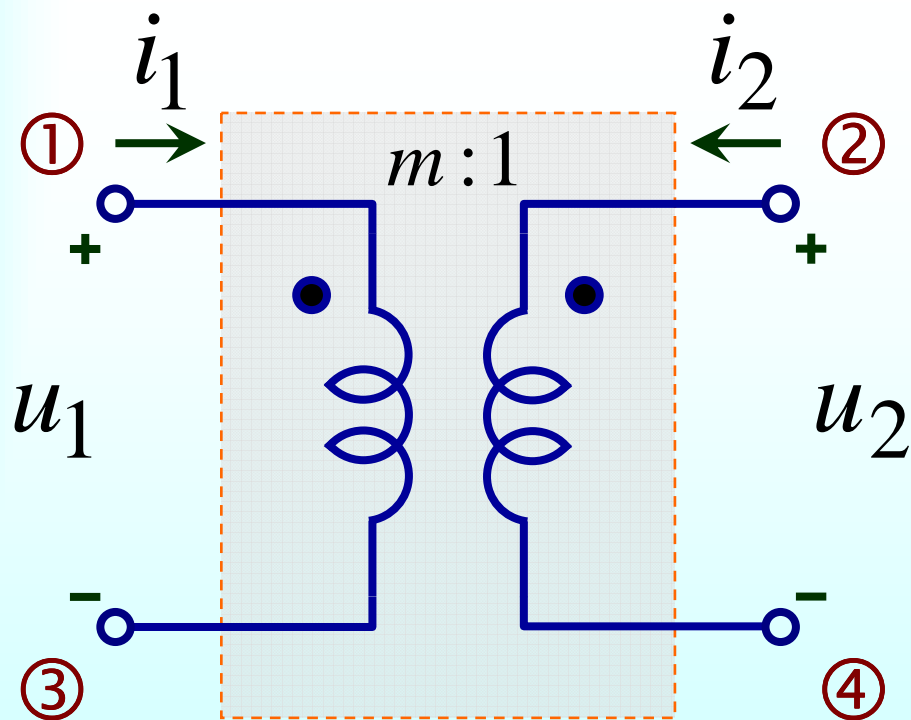
Идеалан трансформатор,
Индуктиван линеаран
трансформатор

На слици је приказан трофазни уљни трансформатор снаге 1600 kVA домаћег произвођача Енергомонт д.о.о.

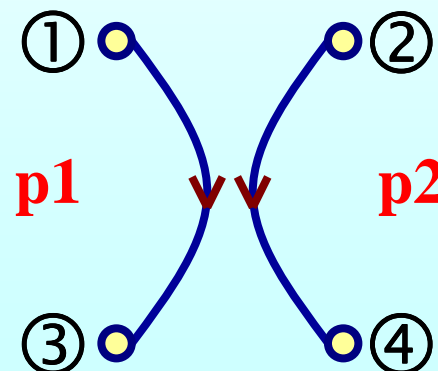
Идеалан трансформатор

- *Идеалан трансформатор* (ИТ) је највећа идеализација утемељена на спрегнутим калемовима.
- ИТ је елемент са два приступа описан паром **алгебарских** једначина које повезују напоне и струје приступа.
- ИТ је резистиван елемент **без губитака**.

Једначине и шема ИТ



$$\begin{cases} u_1 = m u_2 \\ i_1 = -\frac{1}{m} i_2 \end{cases}$$



Једначине важе за произвољне временске промене напона и струја.

Преносни број ИТ

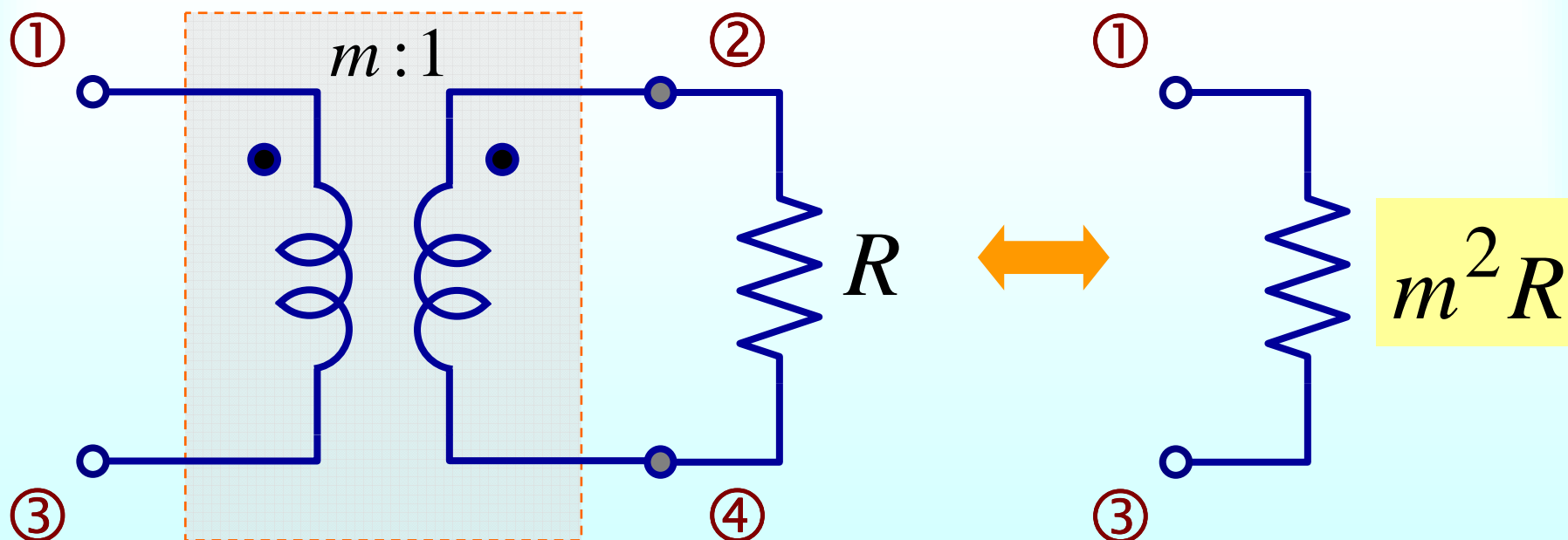
- *Преносни број* је параметар ИТ, вредност елемента, и представља однос броја завојака намотаја примара и секундара.

$$m = \frac{N_1}{N_2}$$

- *Преносни број* је реалан позитиван број.
- Улазна снага ИТ је идентички једнака нули у сваком тренутку времена.

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$

Својство претварања (конверзије) отпорности ИТ



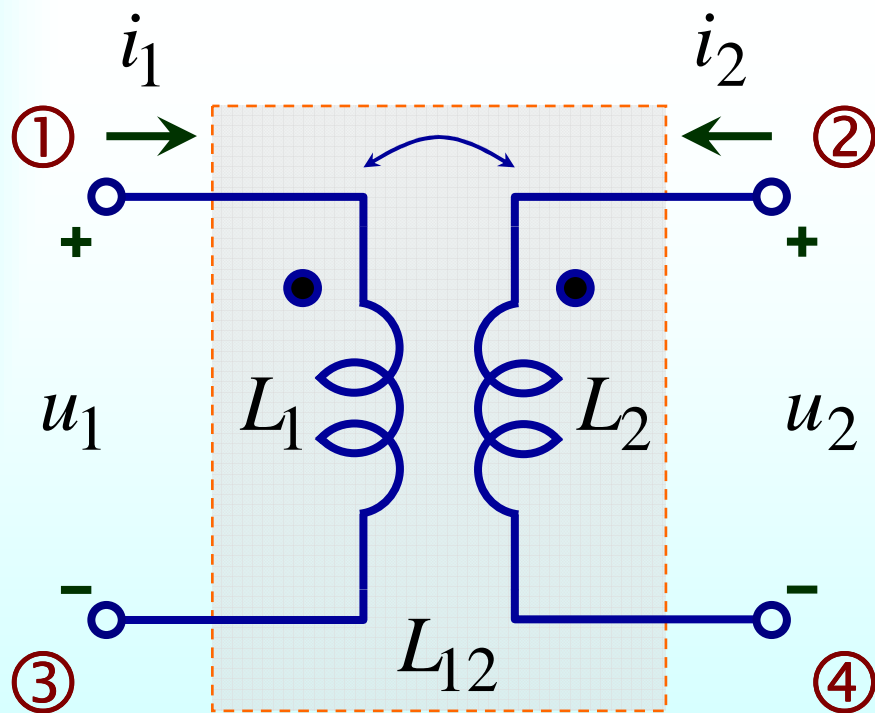
Идеалан трансформатор чији је секундар затворен отпорником се понаша, гледано са стране примара, као отпорник чија је отпорност сразмерна квадрату преносног броја.

Линеаран индуктиван трансформатор

- *Линеаран индуктиван трансформатор* (ЛИТ) је основни индуктиван елемент утемељен на спрегнутим калемовима.
- ЛИТ је елемент са два приступа описан паром **диференцијалних једначина** које повезују напоне и струје приступа.
- ЛИТ је временски непроменљив елемент **без губитака**.

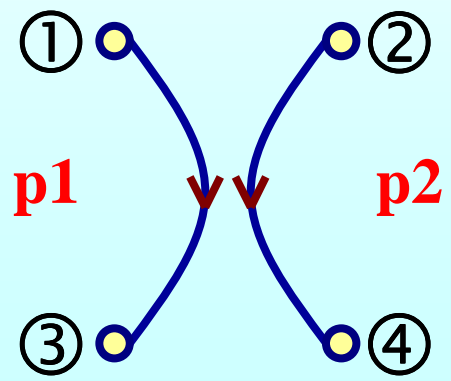


Једначине и шема линеарног индуктивног трансформатора



$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

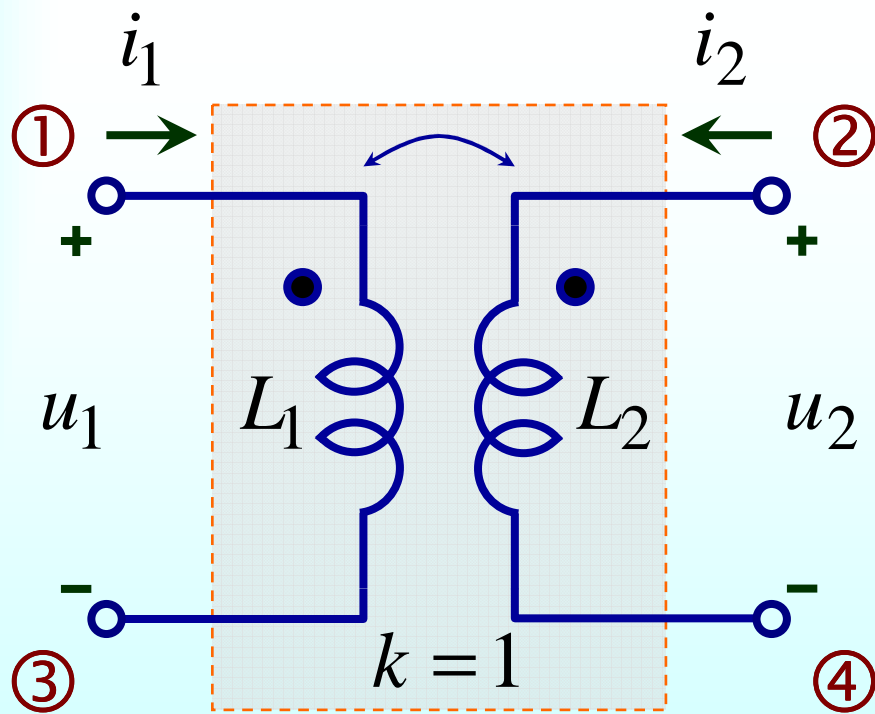


Пасивност трансформатора

- Елемент је **пасиван** ако је збир тренутне енергије, и енергије која се у наредном интервалу времена улаже, **ненегативан**.
- Линеаран индуктиван трансформатор је **пасиван** (а) ако су индуктивности примара и секундара позитивне, и (б) ако је коефицијент спреге позитиван и мањи или једнак јединици.

$$L_1 > 0, \quad L_2 > 0, \quad 0 \leq k \leq 1$$

Индуктиван трансформатор са савршеном спрегом



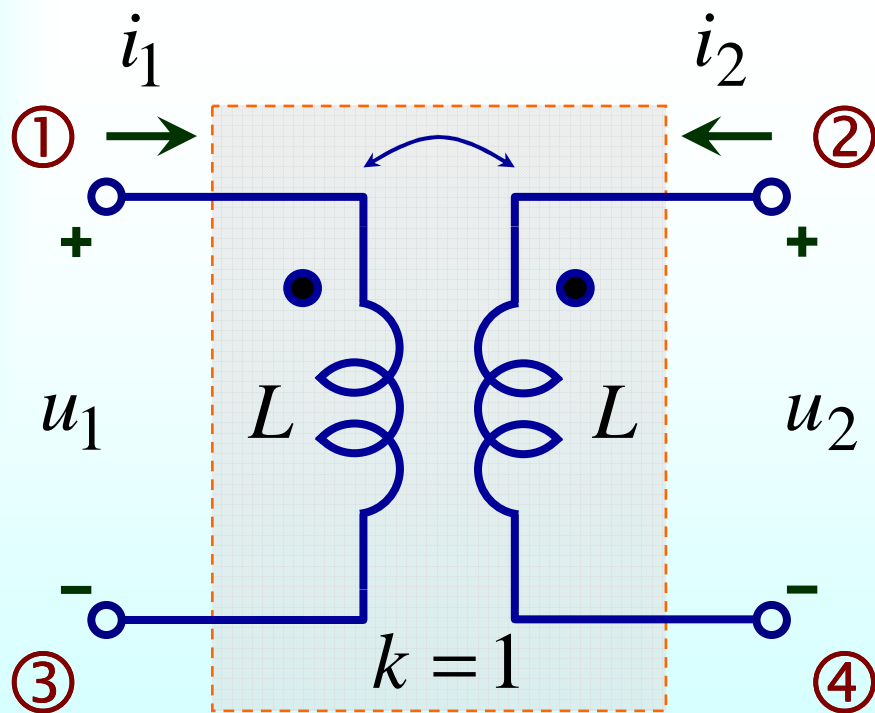
$$L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot u_1 = \frac{1}{m} \cdot u_1 \end{cases}$$

Једна једначина је линеарна алгебарска.

Симетричан савршен индуктиван трансформатор



$$\begin{cases} u_1 = L \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) \\ u_2 = u_1 \end{cases}$$

$$k = 1$$

$$m = 1$$

$$L_1 = L_2 = L_{12} = L$$

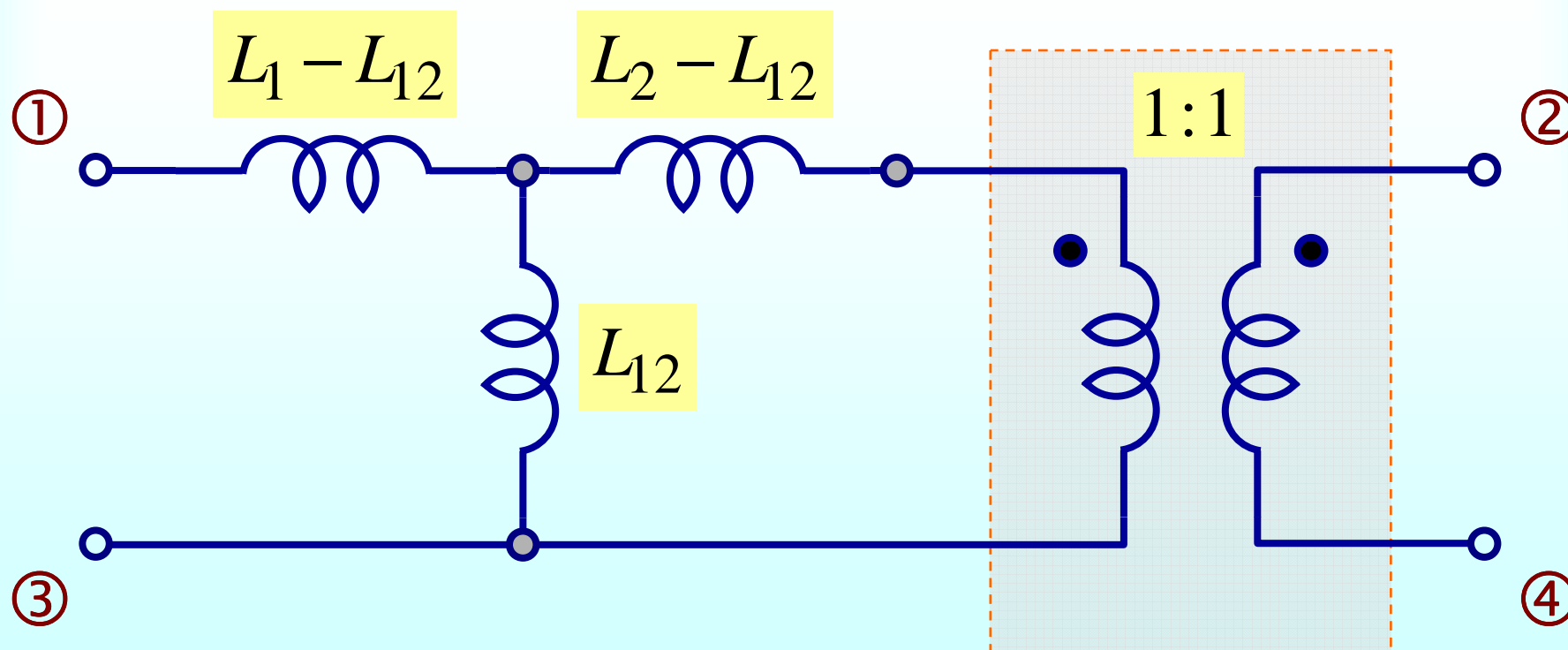
Напон секундара је једнак напону примара.

Заменска (еквивалентна) шема

- Две мреже су **заменске** (или **еквивалентне**) ако имају једнак број крајева (терминала), једнак број приступа (портова) и ако и једна и друга мрежа, када се повежу у коло, узрокују исте напоне и струје у остатку кола.
- Заменске шеме уводимо да би поједноставили шему кола или да би представили коло у подеснијем облику.
- Заменска шема мора очувати галванску **ИЗОЛОВАНОСТ** приступа, ако она постоји.

Два приступа су галвански изолована ако **не постоји** грана графа која повезује крај једног приступа са крајем другог приступа. Приступи трансформатора су пример.

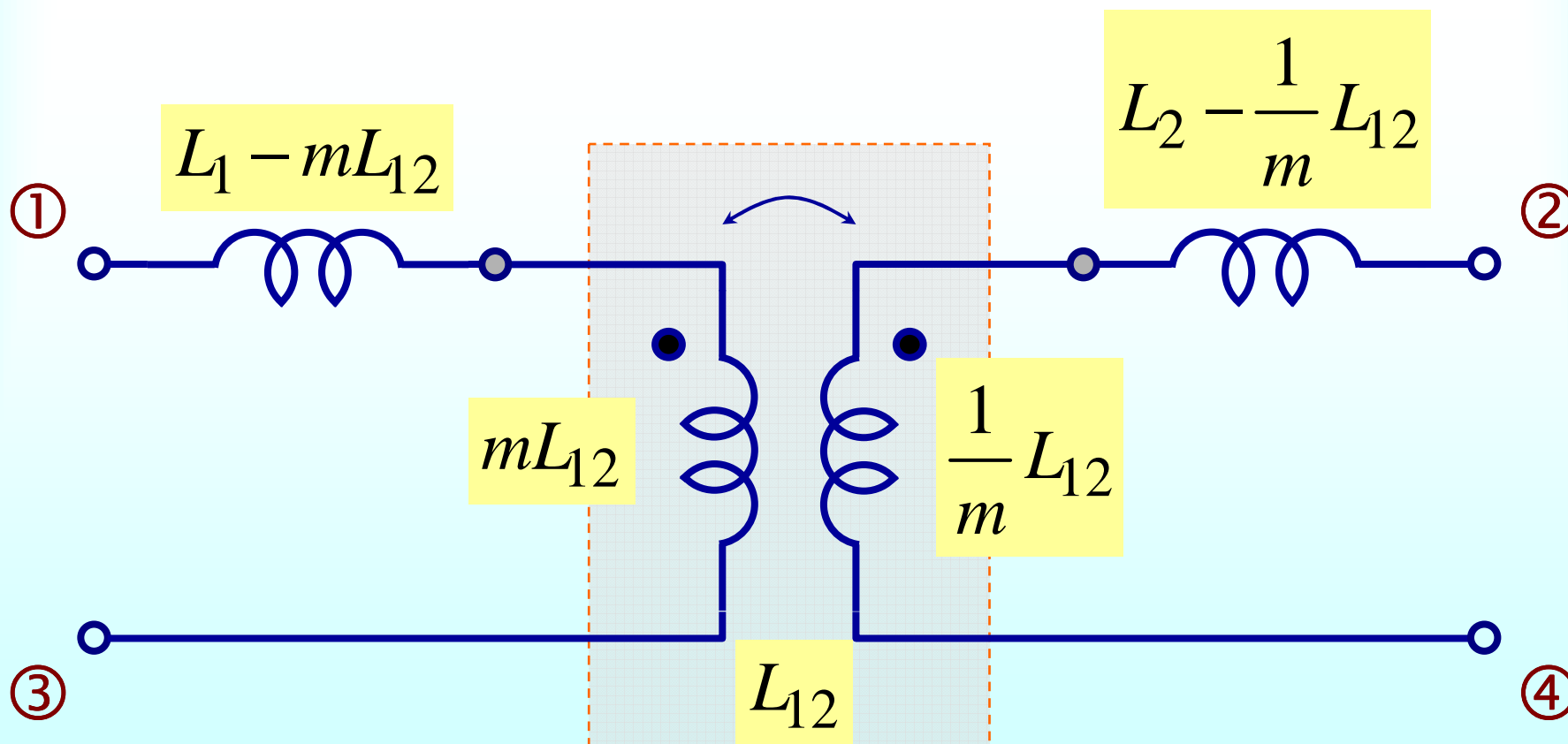
Заменска шема са Т-мрежом калемова који нису у спрези



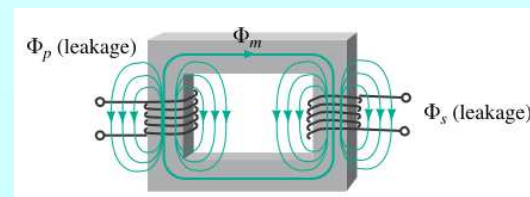
ИТ служи за **раздвајање** приступа (галванско распрезање).

Ова шема **нема** спрегнуте калемове.

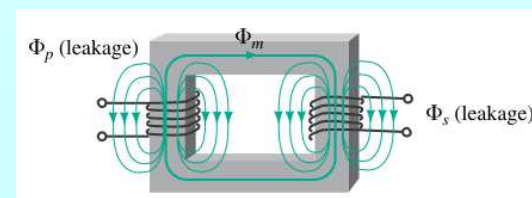
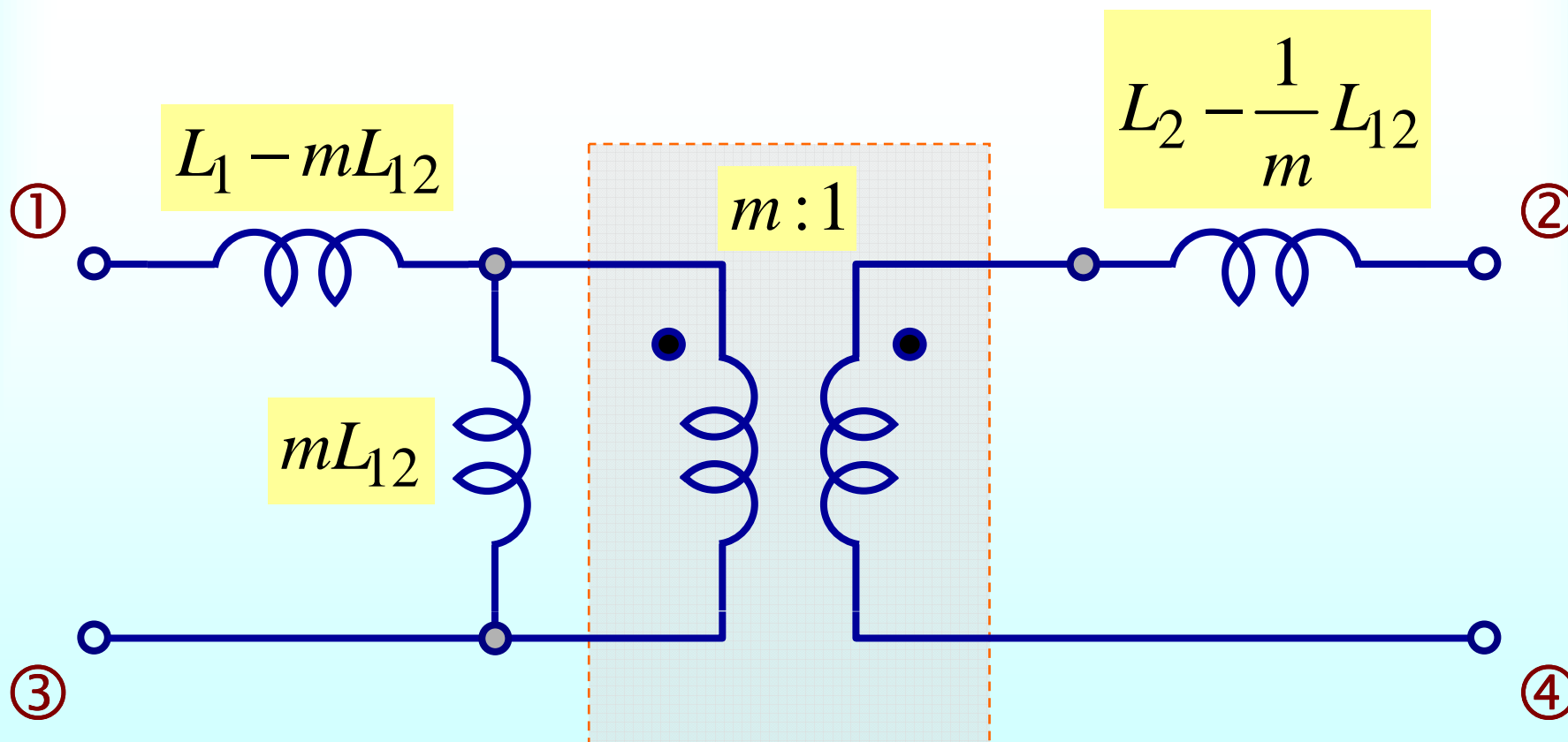
Заменска шема са индуктивним савршеним трансформатором



Калемови који нису у спреси (редни калемови) представљају **расипно** магнетско поље.



Заменска шема са идеалним трансформатором



Ова шема наглашава преносни број.

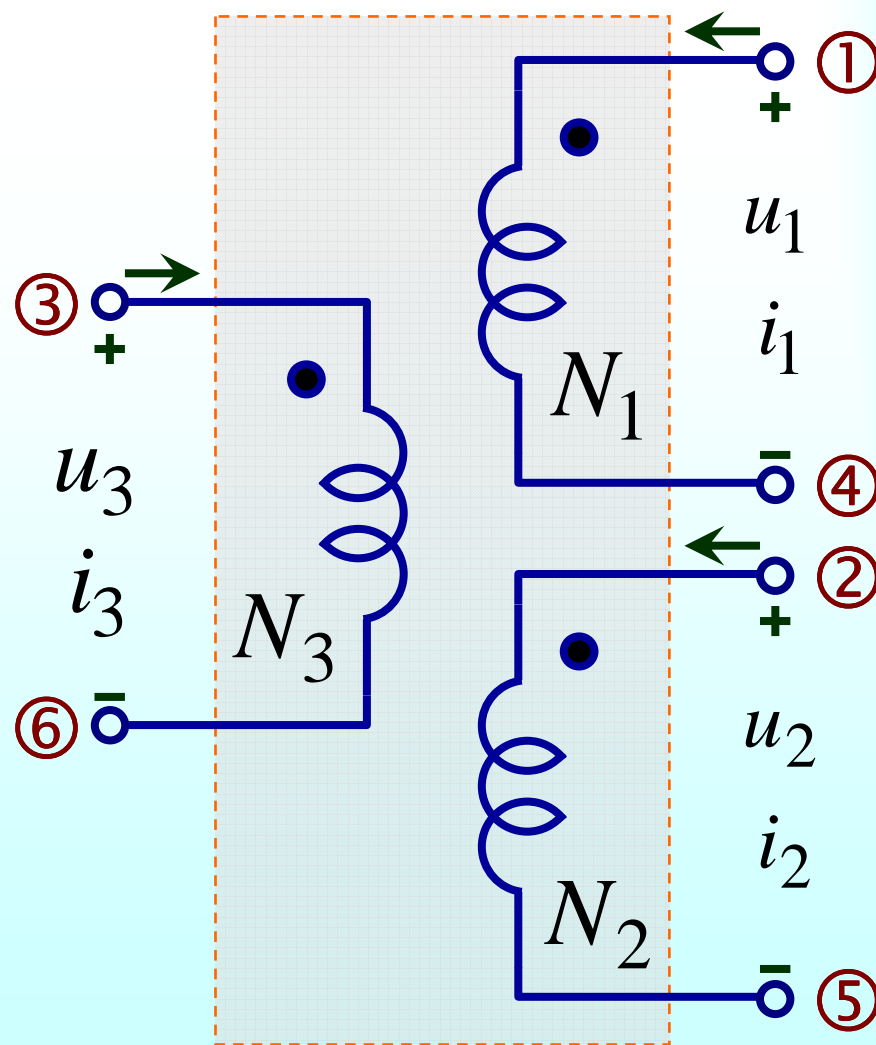
Да ли идеалан трансформатор “пропушта једносмерну струју”?

- **ДА**, ако се посматра идеалан елемент у општем случају.
- **НЕ**, ако је елемент модел склопа, уређаја или система, у коме постоје спрегнути калемови и магнетска индукција.
- **Заменске шеме треба тумачити према изворном склопу из кога су настале.**

ИТ са три приступа

$$\begin{cases} u_1 = \frac{N_1}{N_3} u_3 \\ u_2 = \frac{N_2}{N_3} u_3 \\ N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3 = 0 \end{cases}$$

N означава број завојака намотаја.



Линеаран индуктиван трансформатор са више намотаја

- Напон намотаја је збир (а) напона услед струје намотаја и (б) напона индукованих струјама других намотаја.
- Индукован напон има предзнак сходно договору (конвенцији) тачака.
- Смерови напона и струја намотаја су стандардни.

Сложеније представе трансформатора

- Трансформатори које смо до сада проучавали описују само линеарне магнетске појаве.
- У пракси, стварни трансформатори имају губитке који се описују отпорницима, нагомилавање наелектрисања које се описује кондензаторима, и **нелинеарности**.



Питања (1)

- Како се искључују независни извори?
- Шта је улазна отпорност? Описати поступак за њено одређивање.
- Исказати Тевененову теорему.
- Шта је прилагођење по снази? Исказати теорему прилагођења по снази.
- Став о реципрочности.

Питања (2)

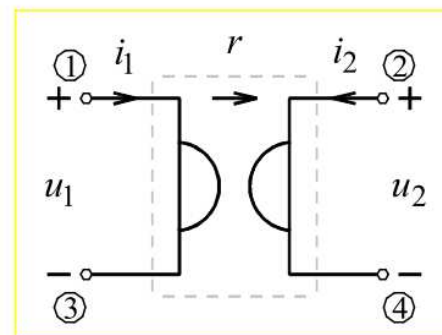
- Шта је идеалан трансформатор?
- Описати својство претварања (конверзије) ИТ.
- Шта је линеаран индуктиван трансформатор?
- Када је ЛИТ пасиван?
- Шта је ЛИТ са савршеном спрегом? Какве су тада једначине?
- Шта је симетричан ЛИТ? Какве су једначине симетричног ЛИТ са савршеном спрегом?
- Нацртати заменске шеме ЛИТ.

Питања (3)

(6) Једначине жиратора (карактеристике елемента, конститутивне једначине, дефиниционе једначине) су

$$\begin{cases} u_1 = -r i_2 \\ u_2 = r i_1 \end{cases}$$

Да ли је жиратор реципрочан елемент?



(a) Да

(б) Не

(5) Исказати и доказати својство претварања (конверзије) отпорности идеалног трансформатора. Нацртати потребну шему са ознакама и смеровима и написати одговарајуће једначине.

(5) Идеалан операциони појачавач је активан електрични елемент?

а) Не

б) Да

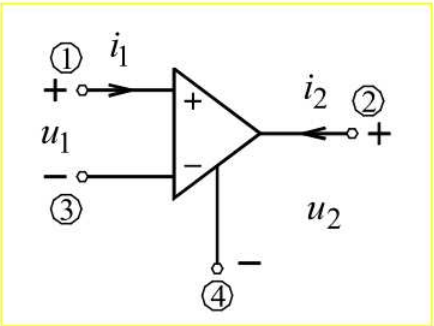
Питања (4)

(5) Шта је линеаран индуктиван трансформатор (ЛИТ)? Нацртати шематску представу и граф ЛИТ? Обележити крајеве (терминале) и приступе (портове). Назначити упоредне (референтне) смерове напона и струја приступа. Написати једначине ЛИТ (дефиниционе једначине, карактеристике елемента, конститутивне једначине). Нацртати заменске (еквивалентне) шеме ЛИТ и објаснити шта оне истичу.

(6) Шта је отпорнички четворопол? Којим једначинама (параметрима) се он описује? Нацртати шематску претставу (графички симбол) четворопола, обележити крајеве, приступе, смерове напона и струја приступа, и напоне и струје приступа.

(5) Како су дефинисани погонски параметри (a -параметри, $ABCD$ -параметри) резистивног четворопола? Нацртати потребну шему са ознакама и смеровима и написати одговарајуће једначине.

Питања (5)

<p>(4) Идеалан трансформатор је</p>	<p>(а) динамички елемент, (б) елемент са губицима, (в) елемент без губитака, (г) активан елемент ?</p>
<p>(4) Једначине операционог појачавача (карактеристике елемента, конститутивне једначине, дефиниционе једначине) су</p> 	<p>(а) $i_1 = 0, i_2 = 0,$ (б) $i_1 = 0, u_1 = 0,$ (в) $i_1 = 0, u_2 = 0,$ (г) $u_1 = 0, i_2 = 0,$ (д) $u_1 = 0, u_2 = 0,$ (ђ) $u_2 = 0, i_2 = 0 ?$</p>

(3) Напонски извор управљан напоном (идеалан напонски појачавач, VCVS, Voltage Controlled Voltage Source) је активан електрични елемент?

- а) Не
 б) Да

Питања (6)

(6) Одредити a -параметре (погонске параметре, $ABCD$ -параметре, chain parameters, transmission parameters) идеалног трансформатора преносног броја m .

$$a_{11} = \quad , \quad a_{12} =$$

$$a_{21} = \quad , \quad a_{22} =$$

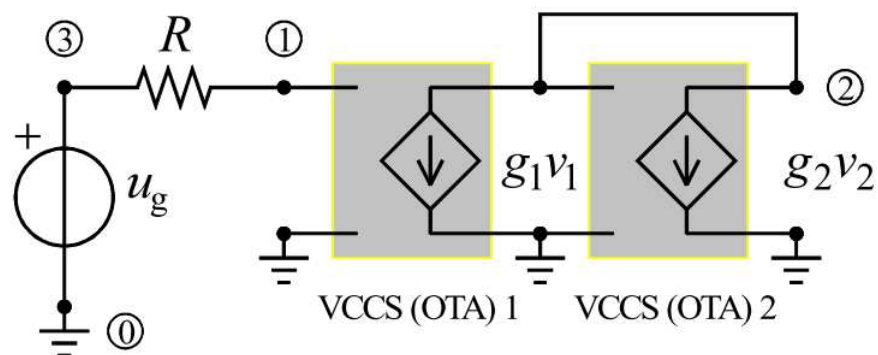
(3) Индуктивност примара симетричног линеарног индуктивног трансформатора са савршеном спрегом је $L_1 = 0.1 \text{ mH}$. Одредити индуктивност секундара L_2 и међусобну индуктивност L_{12} .

$$L_{12} =$$

$$L_2 =$$

(6) Колико је појачање, $A = \frac{v_2}{u_g}$, ОТА појачавача познатих параметара?

$$A =$$

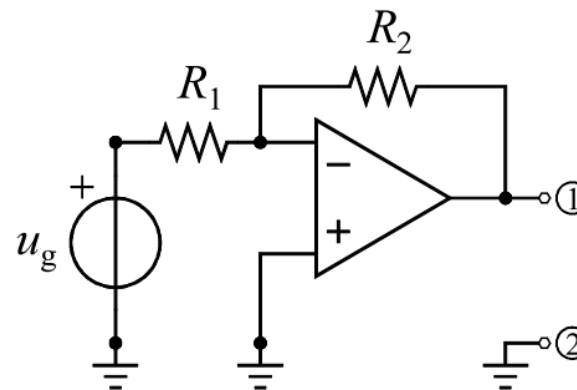


Питања (7)

(6) Одредити Тевененов генератор електричне мреже са једним приступом чији су прикључци ① и ②.

$$u_{gT} =$$

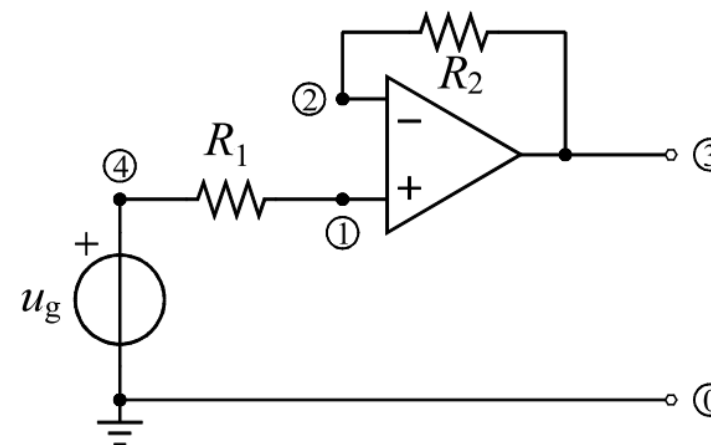
$$R_T =$$



(5) Који су параметри Тевененовог генератора мреже са слике између крајева ③ и ④ (Voltage Follower)?

$$u_{gT} =$$

$$R_T =$$



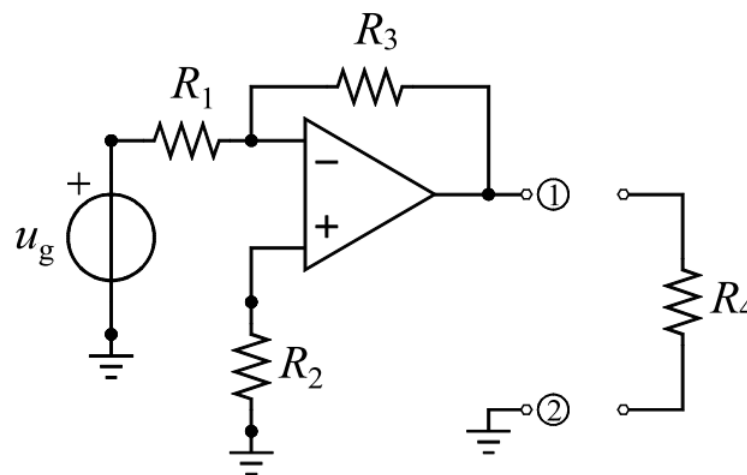
Задатак (1)

Задатак 1

(5) Одредити Тевененов генератор мреже чији су прикључци 1 и 2.

(5) Колика је снага отпорника који се прикључује на мрежу?

(5) Нацртати граф кола после прикључивања отпорника и одредити главне контуре (ф-контуре).



Задатак (2)

Задатак 1

Електрично коло са ОТА (Operational Transconductance Amplifier) жиратором има познате вредности елемената и

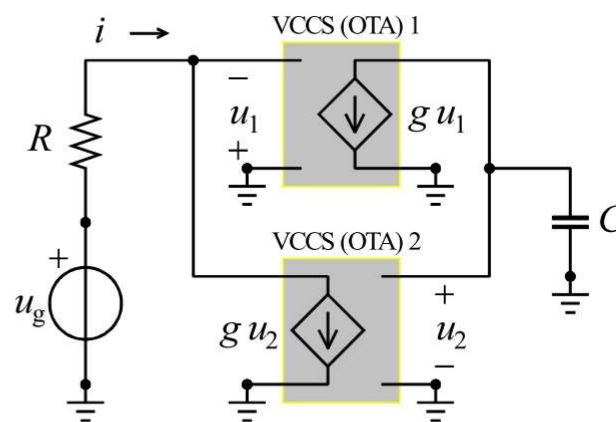
$$u_g(t) = U \vartheta(t).$$

(3) Нацртати граф кола и одредити број главних (фундаменталних) пресека и број главних петљи (фундаменталних контура).

(7) Одредити напон кондензатора и његов домен (област дефинисаности).

(5) Одредити граничну вредност струје отпорника после бесконачно дугог времена ($t \rightarrow +\infty$).

Граф кола је



Број главних пресека је а петљи

Напон кондензатора је

Гранична вредност струје отпорника је

Задатак (3)

Задатак 2

Поједностављена електрична шема Риордановог жиратора, која се може користити у колима за реализацију калема (synthetic inductor), је приказана на слици. Вредности елемената су познате.

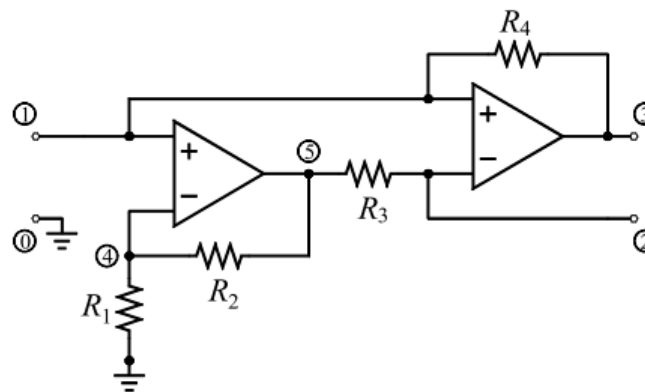
Отпорности отпорника електричне мреже са слике су R . Мрежа има два приступа (порта): први приступ чине крајеви ① и ④, а други приступ чине крајеви ② и ③.

(5) Одредити отпорничке параметре (r -параметре) мреже.

(5) Испитати да ли је мрежа реципрочна.

(5) Испитати да ли је мрежа пасивна.
Испитати да ли је мрежа без губитака.

Отпорнички параметри (r -параметри) су



Да ли је мрежа реципрочна? Образложити.

Да ли је мрежа пасивна? Образложити.

Да ли је мрежа без губитака? Образложити.

Задатак (4)

Задатак 2

Аналогни електронски сабирач познатих параметара је приказан на слици. Одредити (3) број главних пресека графа кола и (7) напон (потенцијал) v_4 и његов домен.

(5) Нацртати напон v_4 у функцији времена ако су побуде $u_{g1}(t) = U \vartheta(t)$,

$$u_{g2}(t) = -2U \vartheta(t - T), \quad u_{g3}(t) = U \vartheta(t - 2T),$$

$U > 0$, $T > 0$, и ако су отпорности свих отпорника једнаке R .

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Број главних пресека је .

Напон (потенцијал) v_4 и његов домен су

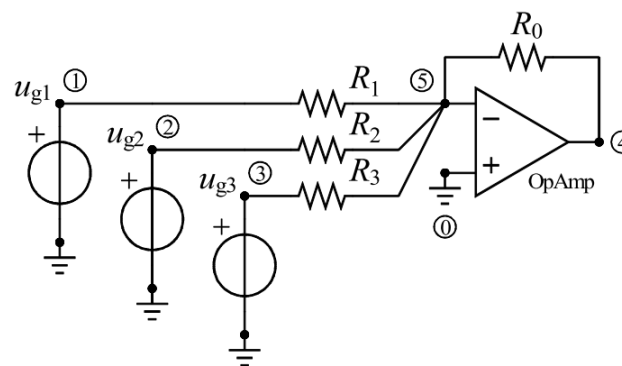


График напона v_4 у функцији времена је

Задатак (5)

Задатак 2

Аналогни електронски одузимач је шематски приказан на слици. Вредности елемената су познате и постоји веза

$$\text{параметара } \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} = 1.$$

(7) Одредити напон (потенцијал) v_3 и његов домен (област дефинисаности).

(5) Одредити снагу (тренутну улазну снагу) операционог појачавача.

(3) Нацртати напон v_3 у функцији времена

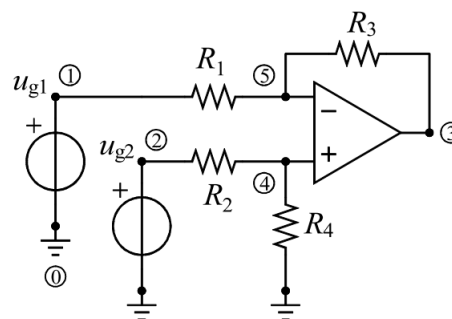
ако су побуде $u_{g1}(t) = U \vartheta(t)$,

$u_{g2}(t) = 2U \vartheta(t - T)$, $U > 0$, $T > 0$.

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Напон (потенцијал) v_3 и његов домен су

Снага операционог појачавача је



Напон v_3 у функцији времена је

Задатак (6)

Задатак 1

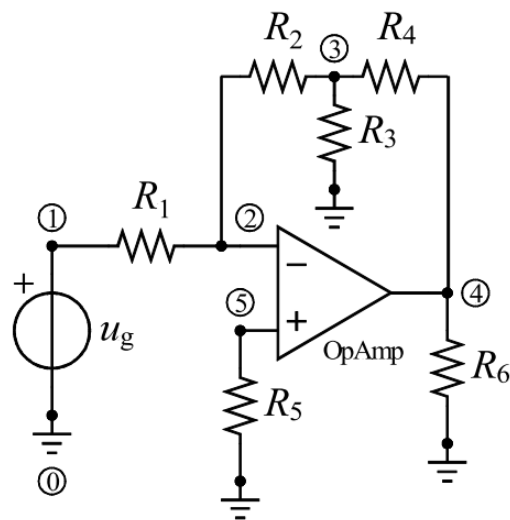
Инвертујући појачавач великог појачања и малог распона познатих отпорности је приказан на слици. Одредити

(8) напонско појачање $A = \frac{v_4}{u_g}$.

(3) Нацртати граф појачавача и

(4) одредити број главних (фундаменталних) пресека и петљи (контура).

Напонско појачање је



Граф појачавача је

Број главних (фундаменталних) пресека је ,
а петљи (контура) је .

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz 1821–1894

H. Helmholtz, "Über einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche", *Annalen der Physik und Chemie*, vol. 89, no. 6, pp. 211–233, 1853.



Whoever in the pursuit of science, seeks after immediate practical utility may rest assured that he seeks in vain.
(Heidelberg 1862)

Лекар и физичар. Први исказао став о замени електричне мреже са два краја напонским извором и отпорником 1853. Рођен у Потсдаму, Пруска (Немачка).

Léon Charles Thévenin 1857–1926

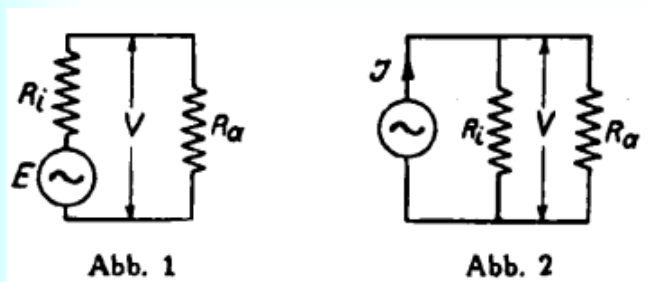
L. Thévenin, "Extension de la loi d'Ohm aux circuits électromoteurs complexes", *Annales Télégraphiques* (Troisième série), vol. 10, pp. 222–224, 1883.



L. Thévenin, "Sur un nouveau théorème d'électricité dynamique", *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, vol. 97, pp. 159–161, 1883.

Инжењер телеграфије. Дипломирао на *École Polytechnique*, Paris. Исказао став о замени електричне мреже са два краја напонским извором и отпорником. Рођен у Meaux, Seine-et-Marne, Француска.

Hans Ferdinand Mayer 1895–1980



H. F. Mayer, “Ueber das Ersatzschema der Verstärkerröhre”, *Telegraphen- und Fernsprech-Technik*, vol. 15, pp. 335–337, 1926.

Математичар и физичар. Студирао на универзитетима Karlsruhe и Heidelberg. Докторирао код добитника Нобелове награде Philipp Lenard. Исажао став о замени електричне мреже са два краја струјним извором и отпорником (Ersatzschema). Рођен у Pforzheim, Немачка.

Edward Lawry Norton 1898–1983

"Design of Finite Networks for Uniform Frequency Characteristic", technical report TM26-0-1860, Bell Laboratories, Nov. 3, 1926.



Инжењер електротехнике. Дипломирао на MIT. Исажао став о замени електричне мреже са два краја струјним извором и отпорником. Рођен у Rockland, Maine, САД.