# Пример решавања резистивне електричне мреже

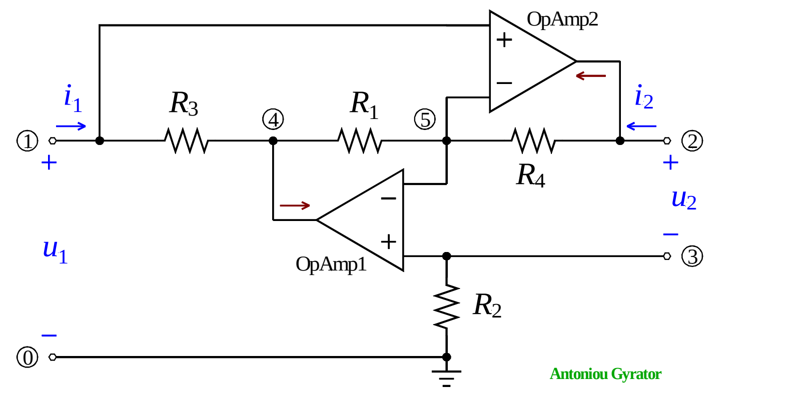
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет
Теорија електричних кола
Др Дејан В. Тошић, редовни професор
10. oktobar 2019. године

## Циљ, покретач (мотив), замисао

Желимо да решимо електричну мрежу које се састоји од отпорничких (резистивних) електричних елемената, отпорника и операционих појачавача. Решити електричну мрежу, по правилу, значи одредити матричне параметре мреже и разне функције мреже, на пример, појачање или слабљење изражено количницима напона и струја приступа. Елемент је резистиван (отпорнички) ако су његове једначине алгебарске, а у њима нема извода и интеграла по времену.
Тражимо опште применљив поступак који је подесан и за ручно решавање, помоћу папира и оловке, као и за машинско аутоматизовано решавање, помоћу рачунара и наменског софтвера.
Усвајамо поступак који се темељи на чворовима и једначинама елемената, без потребе да одређујемо контуре и постављамо једначине Кирхофовог закона за напоне. Чворове електричног кола или мреже непосредно уочавамо у задатој шеми, нумеришемо узастопним природним бројевима почев од један, или узастопним целим бројевима почев од нуле ако уочавамо упоредни чвор (референтни чвор, нулти чвор, уземљење, масу, шасију, кућиште, …). Електричну мрежу побуђујемо са два извора које прикључујемо на њеним приступима.

## Алгоритам MNA

Решавање електричне мреже уопштеним поступком напона чворова (MNA) може се описати низом корака. Биће изложен кроз пример.

| | |
|---|---|
| Задатак<br><br>Одредити отпорничке параметре електричне мреже са слике.<br><br>Испитати да ли је мрежа реципрочна.<br><br>Испитати да ли је мрежа пасивна. |  |

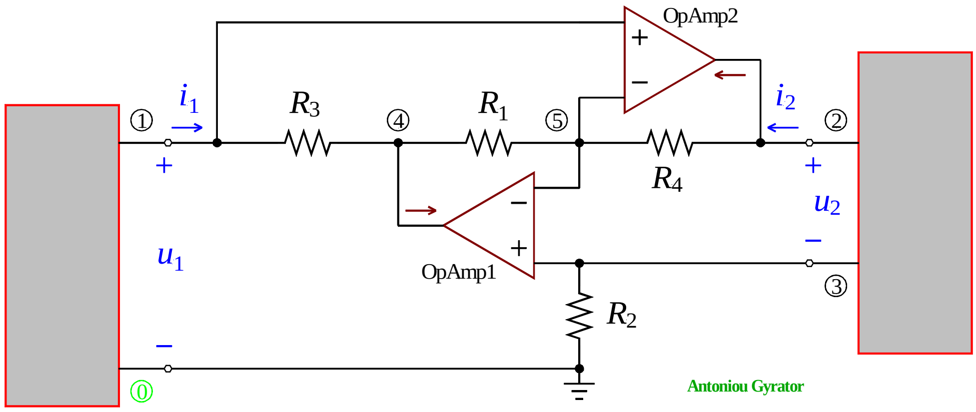


### Корак 1

Упоредни чвор обележити нулом. Обележити остале чворове узастопним природним бројевима почев од један.
Усвојити смерове струја приступа које се не могу изразити преко једначина елемената и напона чворова.
Напон чвора (потенцијал чвора) је напон између чвора обележеног са 1, 2, 3,…, и упоредног чвора обележеног са 0.
У примеру постоји шест чворова обележених са 0, 1, 2, 3, 4, 5.

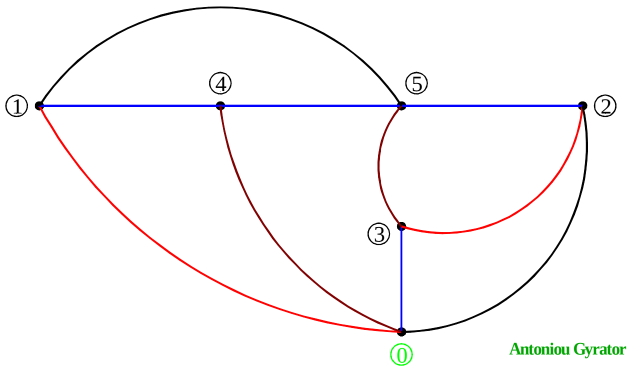
Струје приступа се не могу изразити преко једначина елемената и напона чворова. Струја на излазу операционог појачавача се, такође, не може изразити преко једначина елемента и напона чворова.

Решавамо електрично коло које настаје прикључивањем побудних извора на приступима мреже.




## Корак 2

Испитати да ли је граф електричног кола повезан. Нацртати граф.




Граф овог електричног кола јесте повезан. Можемо наставити са решавањем применом МНА.

Ако граф електричног кола није повезан, онда уочимо неповезане делове (дисконектоване компоненте), у сваком делу уочимо један чвор, и спојимо уочене чворове. Напони и струје приступа се не мењају оваквим преобликовање (трансформацијом, трансфигурацијом) кола.

## Корак 3

Напоне (потенцијале) чворова обележити са $v_1$, $v_2$, $v_3$, … .

Написати једначине Кирхофовог закона за струје (КЗС) за све чворове осим упоредног (нултог).

Струје приступа, ако је могуће, изразити преко напона (потенцијала) чворова и једначина елемената.

Ако струја приступа елемента не може да се изрази преко напона чворова, онда она остаје као промењива у систему једначина МНА, и додаје се једначина елемента (карактеристика елемента, конститутивна једначина елемента, дефинициона једначина елемента).

Улазна струја операционог појачавача је једнака нули, не уводимо посебан симбол за њу, и ту вредност непосредно укључујемо у једначине КЗС.

Струја приступа не може да се изрази преко напона чворова, остаје као промењива у систему једначина МНА.

Излазна струја операционог појачавача не може да се изрази преко напона чворова, остаје као промењива у систему једначина МНА, и додаје се једначина операционог појачавача.

Систем једначина МНА је скуп следећих једначина:

КЗС1: $-i_1 + \dfrac{v_1 - v_4}{R_3} + 0 = 0$

КЗС2: $-i_2 + \dfrac{v_2 - v_5}{R_4} + i_{\mathrm{OpAmp2}} = 0$, $v_1 - v_5 = 0$

КЗС3: $i_2 + \dfrac{v_3}{R_2} + 0 = 0$

КЗС4: $\dfrac{v_4 - v_1}{R_3} + \dfrac{v_4 - v_5}{R_1} + i_{\mathrm{OpAmp1}} = 0$, $v_3 - v_5 = 0$

КЗС5: $\dfrac{v_5 - v_4}{R_1} + \dfrac{v_5 - v_2}{R_4} + 0 + 0 = 0$

Променљиве система једначина МНА су напони чворова, $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$, струје приступа мреже, $i_1$, $i_2$, и струје приступа елемената које не могу да се изразе преко напона чворова, $i_{\mathrm{OpAmp1}}$, $i_{\mathrm{OpAmp2}}$.

## Корак 4

Решити систем једначина МНА. У задатку се траже само отпорнички параметри описани једначинама $u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$, $u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - v_3$. Не траже се струје операционих појачавача.
Посматрајмо једначине МНА и запазимо да се струја $i_{\mathrm{OpAmp1}}$ појављују као једина струја само у једној једначини, КЗС4. Изоставимо ту једначину.
Струја $i_{\mathrm{OpAmp2}}$ се појављује као једина струја само у једној једначини, КЗС2. Изоставимо ту једначину. Добијамо мањи (редукован) систем једначина.

$$-i_1 + \frac{v_1 - v_4}{R_3} = 0$$
$$v_1 - v_5 = 0$$
$$i_2 + \frac{v_3}{R_2} = 0$$
$$v_3 - v_5 = 0$$
$$\frac{v_5 - v_4}{R_1} + \frac{v_5 - v_2}{R_4} = 0$$

На основу једначина елемената можемо уклонити (елиминисати) променљиву $v_5$.

$$-i_1 + \frac{v_1 - v_4}{R_3} = 0$$
$$i_2 + \frac{v_3}{R_2} = 0$$
$$v_3 - v_1 = 0$$
$$\frac{v_1 - v_4}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} = 0$$

Из прве једначине је $v_4 = -i_1 R_3 + v_1$ и то замењујемо у друге три.

$$i_2 + \frac{v_3}{R_2} = 0$$
$$v_3 - v_1 = 0$$
$$\frac{v_1 - (-i_1 R_3 + v_1)}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} = 0$$

Уведимо напоне приступа у једначине, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - v_3$. Уклонимо потенцијале $v_1$ и $v_2$.

$$i_2 + \frac{v_3}{R_2} = 0$$
$$v_3 - u_1 = 0$$
$$\frac{u_1 - (-i_1 R_3 + u_1)}{R_1} + \frac{u_1 - (u_2 + v_3)}{R_4} = 0$$

## Корак 5

Срeђивањем се добија тражени облик система једначина отпорничких параметара ($r$-параметара), $u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$, $u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$.

$$i_2 + \frac{u_1}{R_2} = 0$$
$$\frac{u_1 - (-i_1 R_3 + u_1)}{R_1} + \frac{u_1 - (u_2 + u_1)}{R_4} = 0$$

$$u_1 = -R_2 i_2$$
$$\frac{i_1 R_3}{R_1} - \frac{u_2}{R_4} = 0$$

$$u_1 = -R_2 i_2$$
$$u_2 = \frac{R_3 R_4}{R_1} i_1$$

Из једначина препознајемо отпорничке параметре и одговарајућу матрицу параметара.

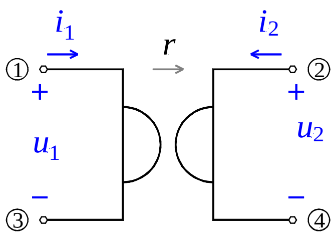
$$r_{11} = 0,\quad r_{12} = -R_2,\quad r_{21} = \frac{R_3 R_4}{R_1},\quad r_{22} = 0$$
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},\ \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \\ \dfrac{R_3 R_4}{R_1} & 0 \end{bmatrix}$$

## Дискусија

Ако су елементи споредне дијагонале $r$-матрице једнаки по модулу, а супротног знака, једначине мреже су облика једначина елемента који се зове жиратор, $u_1 = -ri_2$, $u_2 = ri_1$.

Ако остваримо везу отпорности (параметара) $R_2 = \dfrac{R_3 R_4}{R_1}$, онда мрежа остварује жиратор.

На пример, ако изаберемо да све отпорности буду $R$, онда остварујемо (реализујемо) жиратор са најмањим могућим распоном вредности отпорности 1:1. Сликовна представа (графички симбол) жиратора на шемама је дата на слици.




## Практични захтеви

У практичном лабораторијском раду може бити од интереса да се оствари индуктивно понашање мреже са два краја, једним приступом, а да не користимо завојнице и калемове остварене намотавањем жице. Ако на други приступ, секундар, жиратора прикључимо кондензатор, онда ће веза напона и струје на улазу, примару, бити

$$u_1 = -ri_2,\; u_2 = ri_1,\; i_2 + C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$u_1 = rC\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t},\; u_2 = ri_1$$

$$u_1 = rC\frac{\mathrm{d}(ri_1)}{\mathrm{d}t},\; u_1 = r^2 C\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t},$$

$$u_1 = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t},\; L = r^2 C$$

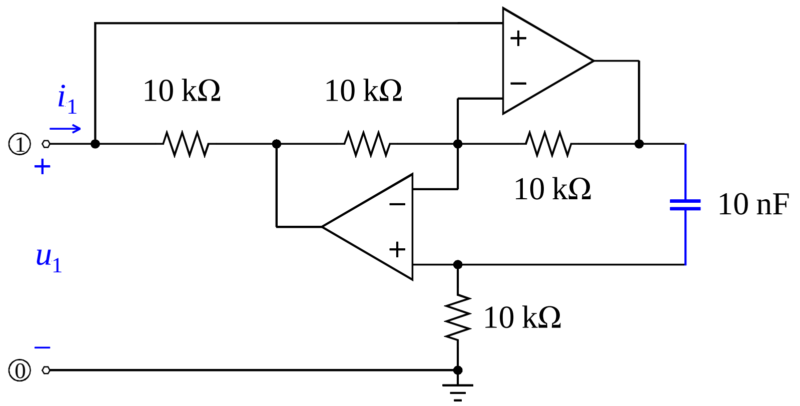
Закључујемо да се жиратор и кондензатор, у оваквој мрежи, понашају као заменски (еквивалентан) калем. Уједно, претходно извођење даје теоријски основ за остваривање калема без намотаја жице, а само помоћу отпорника, кондензатора и операционог појачавача. Овако остварен калем се зове синтетички калем (synthetic inductor) или симулирани калем (simulated inductor).
У одређеном опсегу параметара и радних услова овакав заменски калем може да се користи у пракси. Једно од његових ограничења, у односу на завојницу, јесте мања снага, напон и струја, која се може остварити. Друго ограничење је што се остварује калем који је једним крајем везан за упоредни чвор, па га зовемо уземљен калем (grounded inductor)

Жиратор, као елемент Теорије електричних кола, је предложио Bernard D. H. Tellegen, који је познат по ставу (теореми) коју данас зовемо Телегенова теорема.

Једно од решења за остваривање синтетичког калема је предложио Andreas Antoniou. То техничко решење смо анализирали у овом примеру.

## Самосталан рад

Колика је заменска индуктивност синтетичког калема са слике?




## Симболичка анализа

Мрежа и одговарајуће коло се могу решити програмом SALECx. Видети прилог.

Application of Free Software and Open Hardware, PSSOH 2019, International Conference, University of Belgrade – School of Electrical Engineering, Belgrade, Serbia, Oct. 26, 2019.
http://pssoh.etf.bg.ac.rs/
Primena slobodnog softvera i otvorenog hardvera

http://pssoh.etf.bg.ac.rs/

https://github.com/pssoh/SALECx

https://zenodo.org/record/3464103#.XY-nt2ZS_IU

DOI: 10.5281/zenodo.3464103

```
(%i1) load("C:\\SALECx\\SALECx.mac") $
Dejan Tosic, SALECx 2019 v1.0
Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima

(%i2) SALECxPrint: true $

(%i3) Antoniou_shema: [
       ["I", "Ig1", 0, 1, Ig1],
       ["I", "Ig2", 3, 2, Ig2],
       ["OpAmp", "OpAmp2", [1,5], 2],
       ["OpAmp", "OpAmp1", [3,5], 4],
       ["R", "R1", 4, 5, R1],
       ["R", "R2", 3, 0, R2],
       ["R", "R3", 1, 4, R3],
       ["R", "R4", 5, 2, R4]
      ]$

(%i4) Antoniou_response: SALECx(Antoniou_shema);
```

*Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima*

*SALECx version 1.0, Prof. Dr. Dejan Tošić, tosic@etf.rs*

*Number of nodes excluding 0 node:* 5

*Electric circuit specification:* [[I, Ig1, 0, 1, Ig1], [I, Ig2, 3, 2, Ig2], [OpAmp, OpAmp2, [1, 5], 2], [OpAmp, OpAmp1, [3, 5], 4], [R, R1, 4, 5, R1], [R, R2, 3, 0, R2], [R, R3, 1, 4, R3], [R, R4, 5, 2, R4]]

*Supported element:* [true, true, true, true, true, true, true, true]

*Element values:* [Ig1, Ig2, false, false, R1, R2, R3, R4]

*Initial conditions:* [false, false, false, false, false, false, false, false]

*MNA equations:* $\left[\frac{V_1-V_4}{R3}-Ig1=0, \frac{V_2-V_5}{R4}-Ig2+I_{OpAmp2}=0, \frac{V_3}{R2}+Ig2=0, \frac{V_4-V_1}{R3}+\frac{V_4-V_5}{R1}+I_{OpAmp1}=0, \frac{V_5-V_2}{R4}+\frac{V_5-V_4}{R1}=0, V_3-V_5=0, V_1-V_5=0\right]$

*MNA variables:* $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, I_{OpAmp1}, I_{OpAmp2}]$

(Antoniou_response) $\left[V_1=-Ig2\,R2, V_2=\frac{Ig1\,R3\,R4-Ig2\,R1\,R2}{R1}, V_3=-Ig2\,R2, V_4=-Ig1\,R3-Ig2\,R2, V_5=-Ig2\,R2, I_{OpAmp1}=\frac{Ig1\,R3+Ig1\,R1}{R1}, I_{OpAmp2}=-\frac{Ig1\,R3-Ig2\,R1}{R1}\right]$

```
(%i5) U1 = V[1], Antoniou_response;
```

(%o5) $U1=-Ig2\,R2$

```
(%i6) U2 = V[2]-V[3], Antoniou_response, ratsimp;
```

(%o6) $U2=\frac{Ig1\,R3\,R4}{R1}$

```
(%i7) [U1 = V[1], U2 = V[2]-V[3]], Antoniou_response,
        [R1=R, R2=R, R3=R, R4=R, Ig1=I1, Ig2=I2], ratsimp;
```

(%o7) $[U1=-I2\,R, U2=I1\,R]$