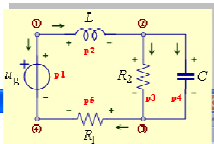
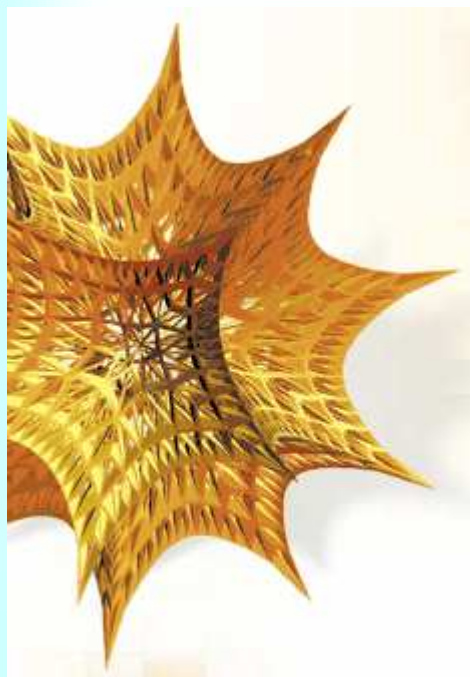


Теорија електричних кола



```
ugM1R2LC.nb
In[1]:= $Version
Out[1]:= 7.0 for Microsoft Windows (32-bit) (February 18, 2009)

In[2]:= resenje =
DSolve[{i1[t] + i2[t] == 0, -i2[t] + i3[t] + i4[t] == 0,
-i3[t] - i4[t] + i5[t] == 0, -u1[t] + u2[t] + u3[t] + u5[t] == 0,
-u3[t] + u4[t] == 0, u1[t] == 12, u2'[t] == 1/2 * i2[t], u3[t] == 20 * i3[t],
i4'[t] == 1/1000 * u4[t], u5[t] == 10 * i5[t]},
{i1[t], i2[t], i3[t], i4[t], i5[t], u1[t], u2[t], u3[t], u4[t],
u5[t]}, t] // Flatten;

In[3]:= {u3[t] /. resenje // Expand} /. {x_?NumberQ} + y_?> N[x] + y} // Simplify //
TraditionalForm
Out[3]//TraditionalForm=
72/600 (0.570024 c2 - 15.2125 c1) sin(sqrt(71) t / 600) + (-8.11371 c1 - 0.519208 c2) cos(sqrt(71) t / 600)
```

Користите само
материјале које вам
достави и препоручи
предметни наставник у
текућој школској
години.

Дејан Тошић

Једначине електричног кола

Постављање и решавање

Једначине електричног кола

- *Математички модел кола* су једначине које пресликавају повезивање елемената (КЗ) и врсту елемената (ЈЕ).
- *Променљиве кола* су напони и струје грана (приступа).
- *Систем једначина кола* (СЈК) је скуп најмањег броја независних једначина из кога се могу одредити променљиве кола.

Број једначина кола

- Коло са b грана има $2b$ променљивих: b струја и b напона.
- Систем једначина кола има $2b$ једначина.
- Једначине елемената (ЈЕ) чине b једначина СЈК.
- Кирхофови закони (КЗ) образују b једначина СЈК.

Једначине КЗ

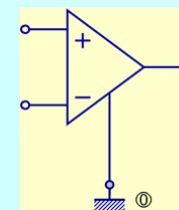
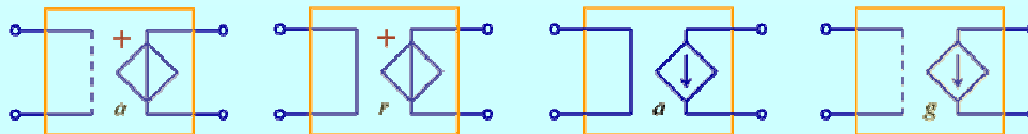
- Једначина по Кирхофовим законима за струје (КЗС) има **n** .
- Једначина по Кирхофовим законима за напоне (КЗН) има **m** .
- Број грана стабла, **n** , је једнак броју једначина по КЗС.
- Број спојница, **m** , је једнак броју једначина по КЗН.

Како постављамо КЗ?

- КЗС постављамо, обично, за све чворове осим једног.
- КЗН обично постављамо за сва окца или за све главне (фундаменталне) контуре.
- Постављању КЗ претходи усвајање смерова струја приступа (грана).
- Смерове напона усвајамо као стандардне (усаглашене, усклађене са смеровима струја).

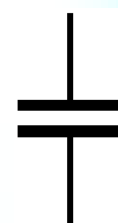
Какав је састав једначина? (1)

- Посматраћемо временски-непроменљиве линеарне електричне елементе.
- КЗ су линеарне хомогене **алгебарске** једначине са коефицијентима $+1$ или -1 .
- Једначине резистивних елемената, као што су отпорник, ОпАмп, зависни извори, идеалан трансформатор или жиратор, су линеарне хомогене **алгебарске** једначине са константним коефицијентима.



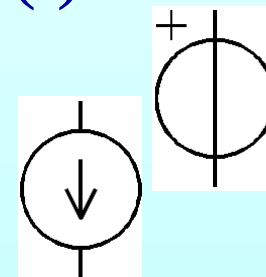
Какав је састав једначина? (2)

- Једначине кондензатора су линеарне хомогене **диференцијалне** једначине првог реда са константним коефицијентима.
- Једначине калемова су линеарне хомогене **диференцијалне** једначине првог реда са константним коефицијентима.
- Једначине извора су једначине облика $y = F(t)$
Симбол = Позната Функција Времена и оне уносе **нехомогеност** у СЈК.



$$y = K \frac{dx}{dt}$$

$K = \text{const}$



СЈК је систем АДЈ

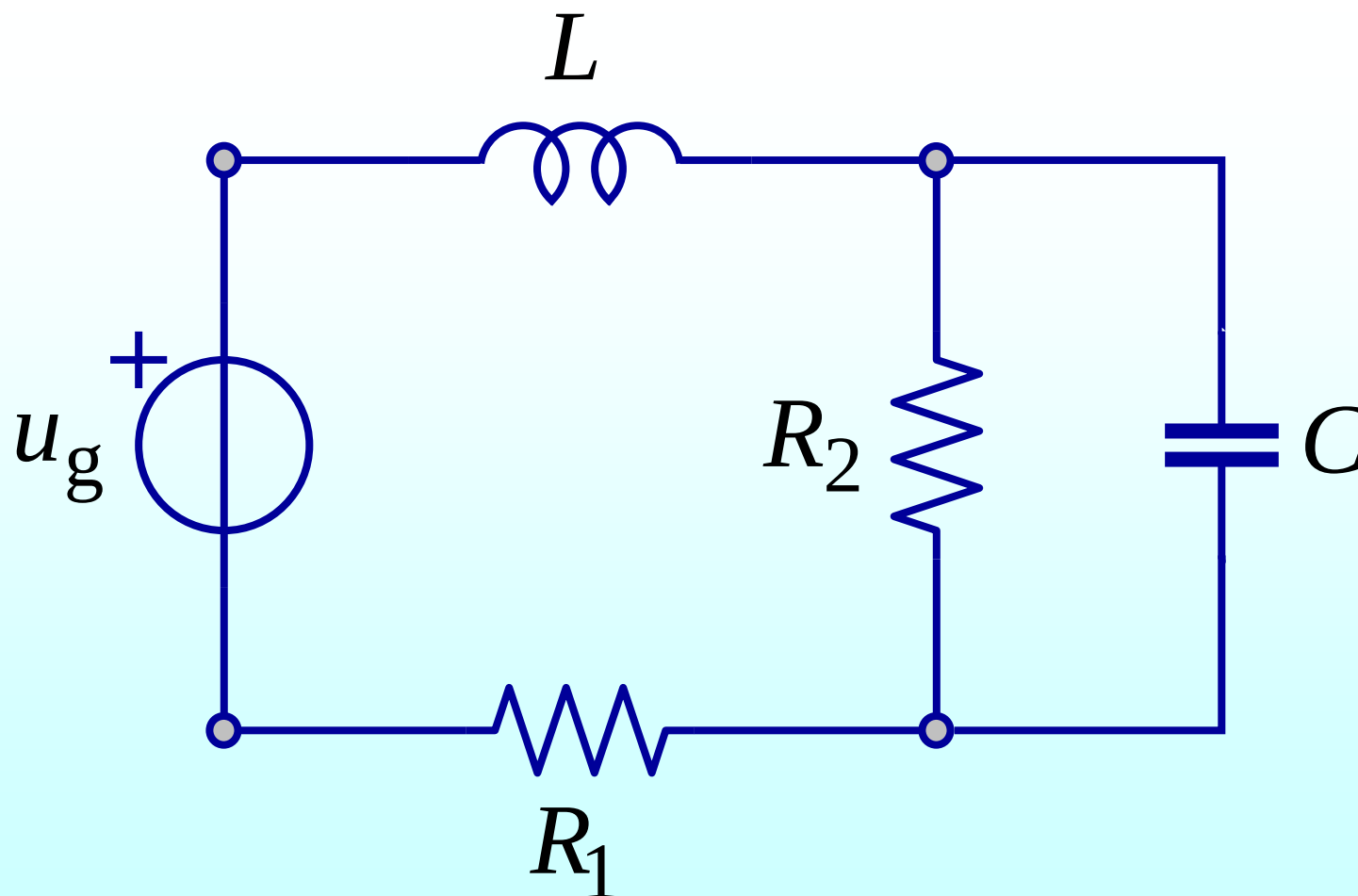
- Систем једначина кола (СЈК) је систем *алгебарско-диференцијалних једначина*.
- СЈК решавамо на два основна начина:
 - 1) решавањем *система једначина стања*
 - 2) решавањем једне једначине по једној изабраној променљивој – *диференцијалне једначине одзива*
- Ако је СЈК систем алгебарских линеарних једначина, можемо га решавати Крамеровим правилима или Гаусовом елиминацијом.

Обновите решавање диференцијалних једначина из курсева математике!

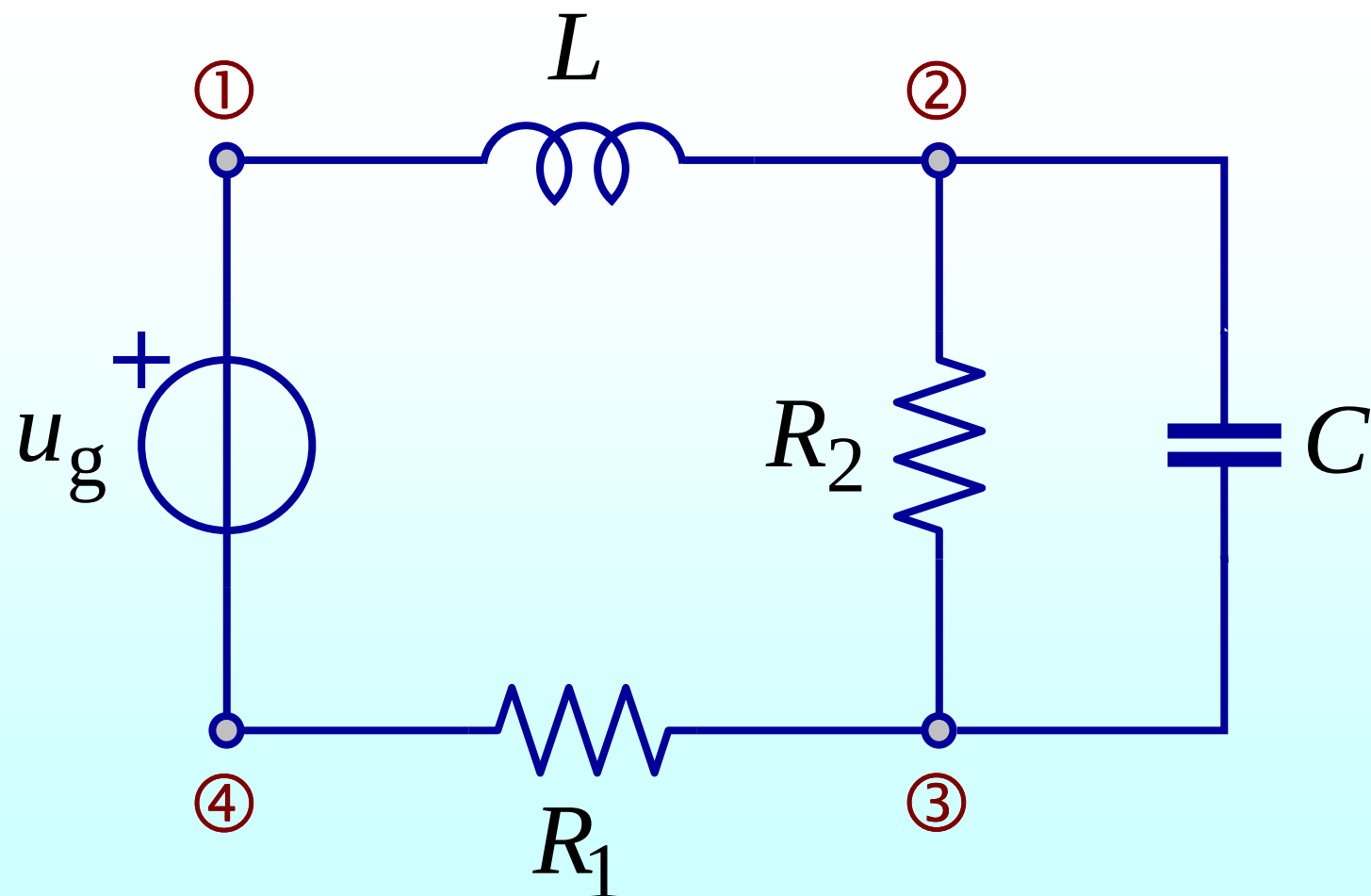
Темељна претпоставка ТЕК

- Систем једначина електричног кола је сагласан, има **јединствено решење**.
- У сваком тренутку времена, у било ком електричном колу, **истовремено** важе и једначине по Кирхофовим законима и једначине елемената (карактеристике).
- Ако су једначине КЗ и ЈЕ контрадикторне, по правилу, модел електротехничког система или склопа које коло представља треба поправити смањењем степена апстракције и идеализације.

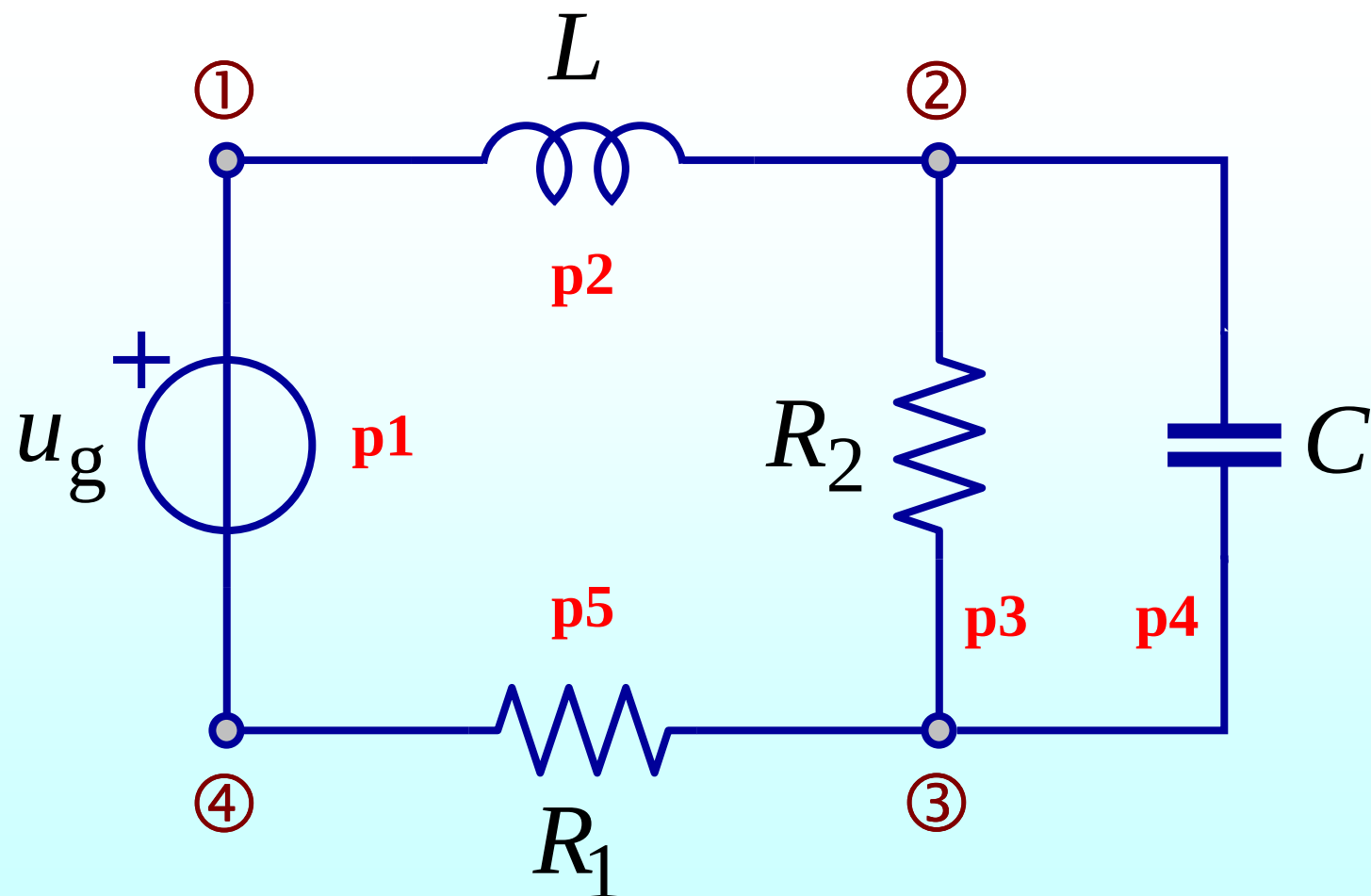
Пример постављања СЈК



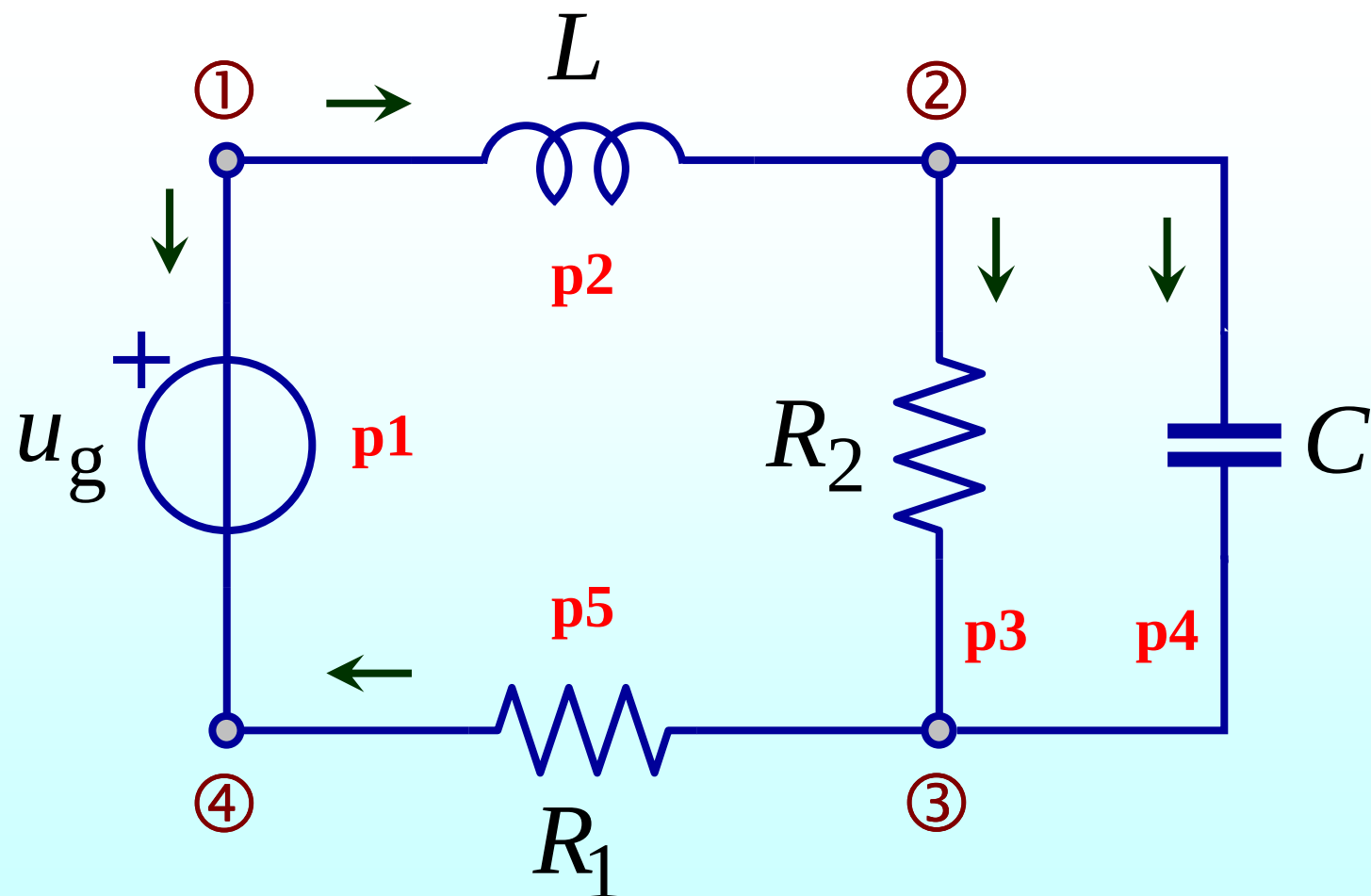
Обележавање чворова



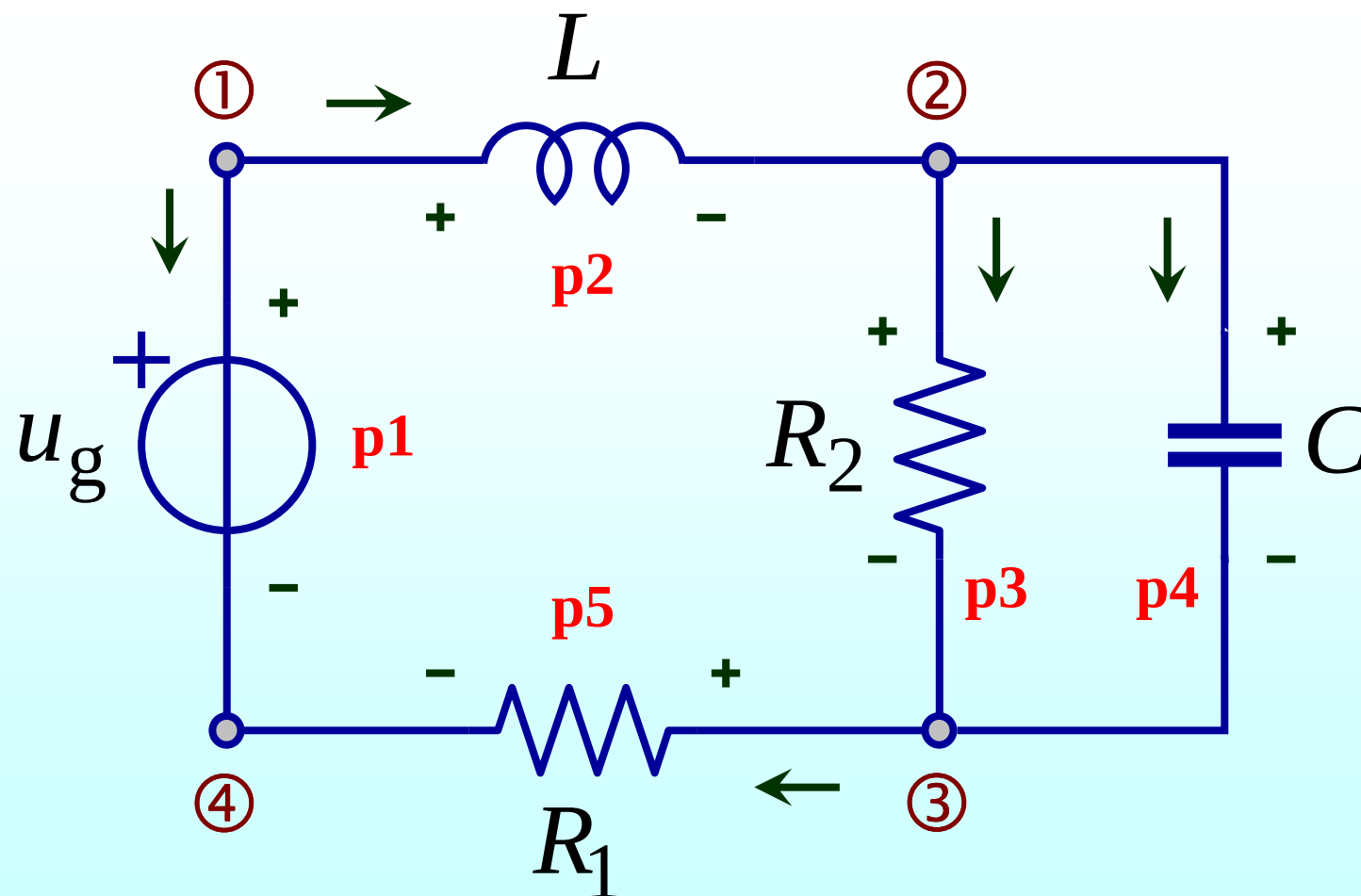
Обележавање приступа



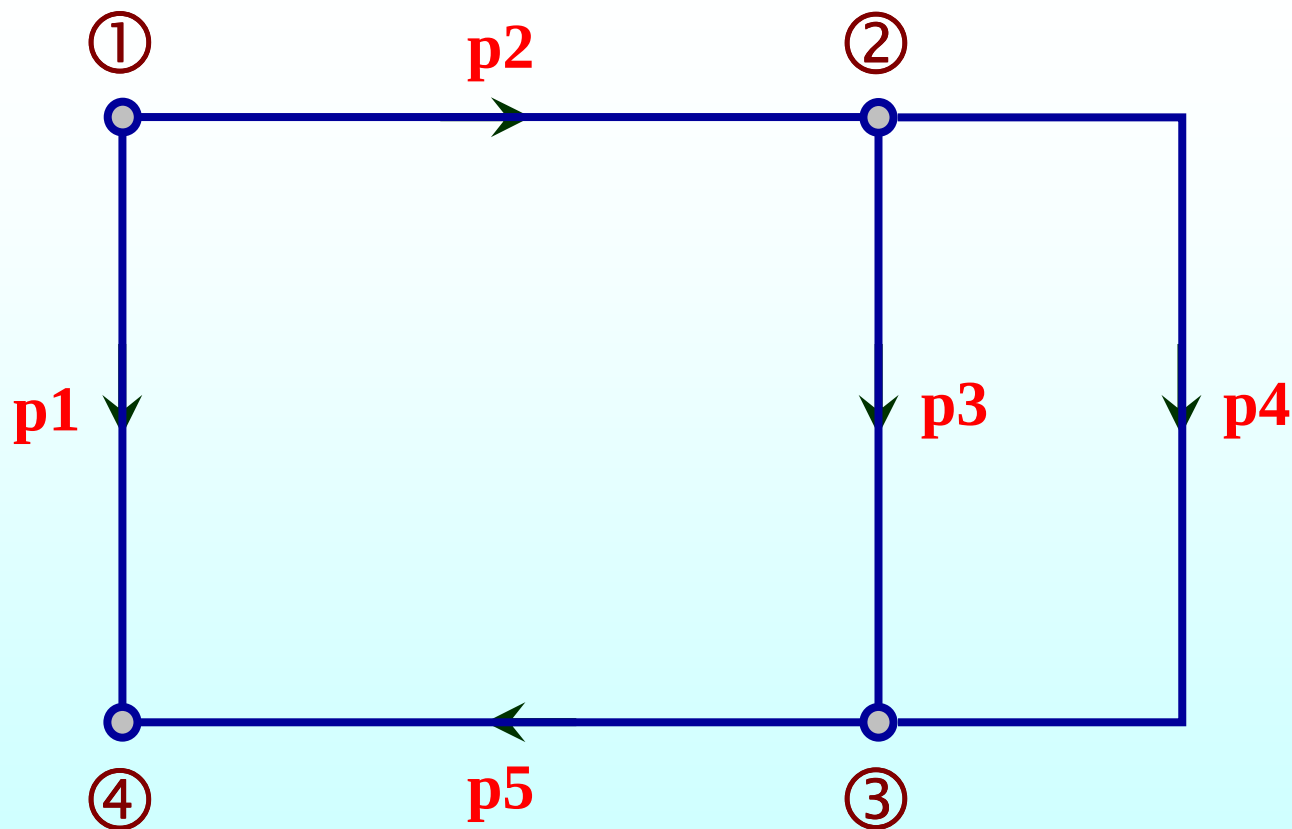
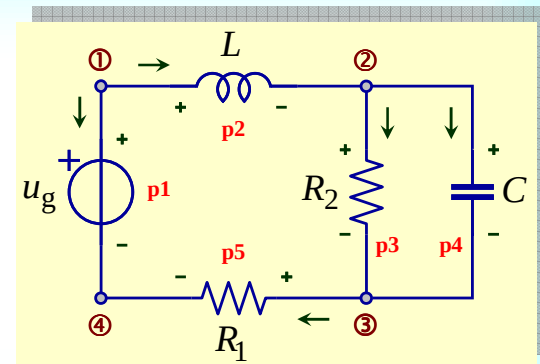
Усвајање смерова струје



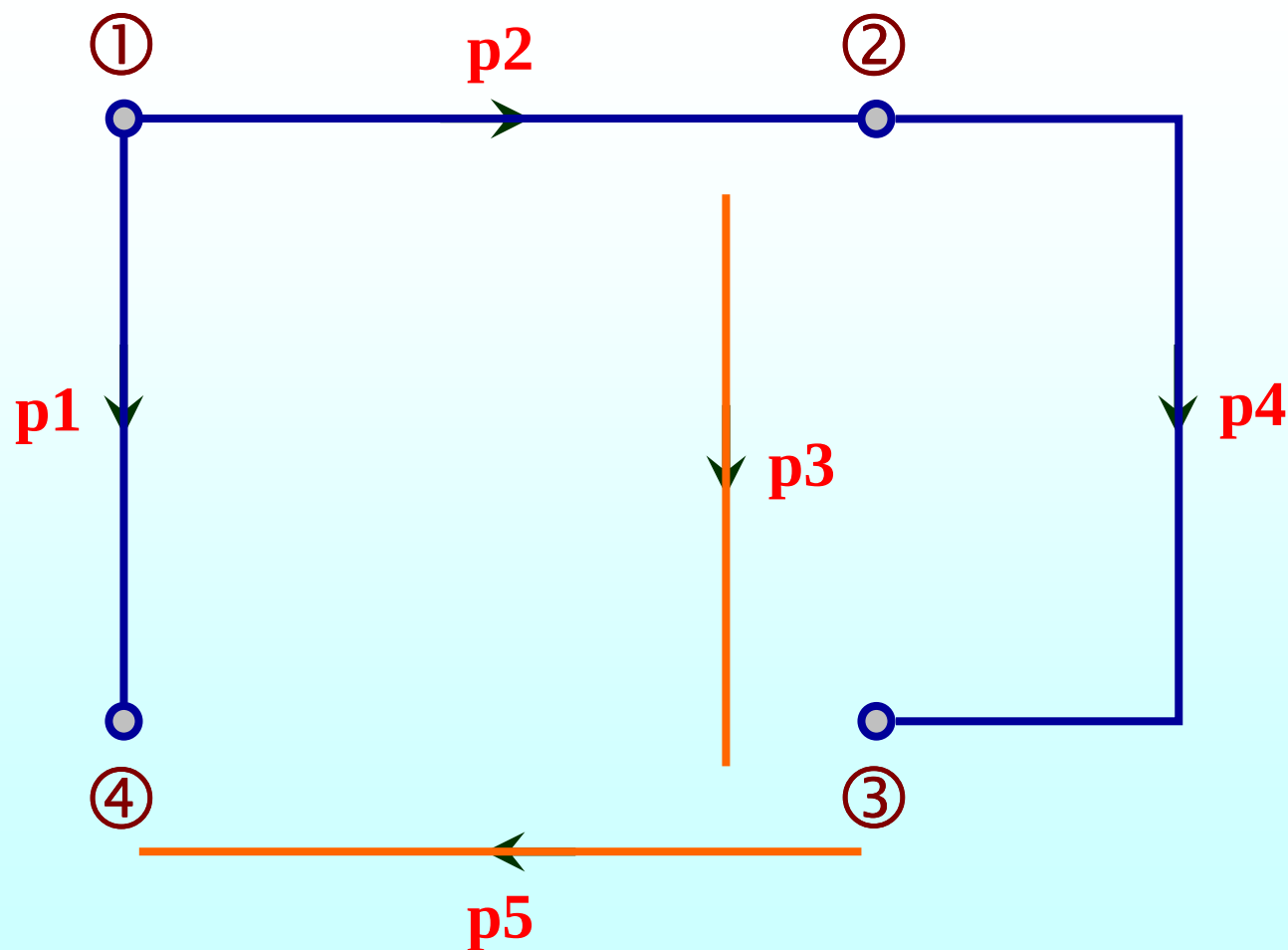
Усвајање смерова напона



Граф кола



Стабло и спојнице

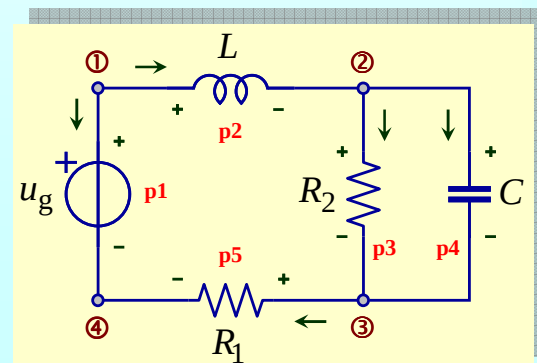


Који су уобичајени смерови пресека и контура?

- Чворни пресеци су усмерени од чвора: струја гране са смером од чвора улази у КЗС са плус предзнаком.
- Контуре се усмеравају у правцу казаљке на сату: напон гране чији се смер поклапа са смером контуре улази у КЗН са плус предзнаком.
- Када решавамо коло ручно, помоћу папира и оловке, можемо произвољно усвајати смерове. Када програмирамо решавање кола смерове морамо да узмемо на систематски начин.

Пребрајање једначина

- Број грана је $b = 5$
- Број променљивих је $2b = 10$
- Број чворова је $c = 4$
- Број грана стабла графа је $n = c - 1 = 3$
- Број једначина КЗС је $n = 3$
- Број спојница је $m = b - n = 2$
- Број једначина КЗН је $m = 2$



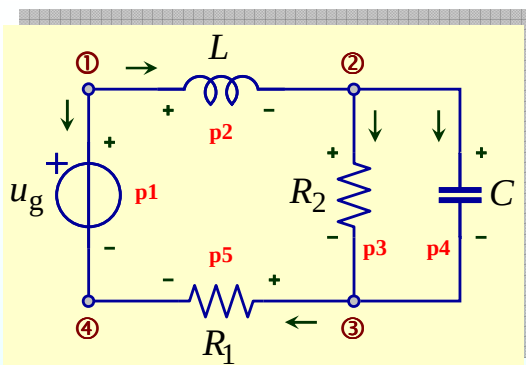
Систем једначина кола

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$-i_3 - i_4 + i_5 = 0$$

K3C



K3H

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

$$-u_3 + u_4 = 0$$

JE

$$u_1 = u_g$$

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt}$$

$$u_3 = R_2 i_3$$

$$i_4 = C \frac{du_4}{dt}$$

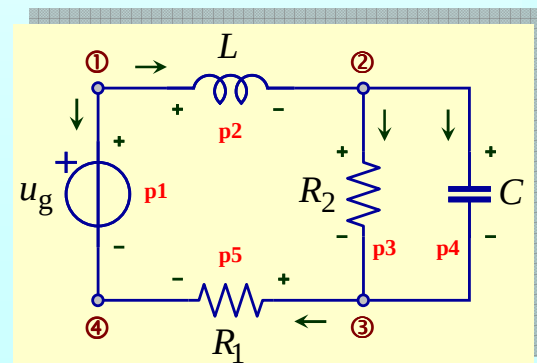
$$u_5 = R_1 i_5$$

Променљиве електричног кола

$$i_1, \quad i_2, \quad i_3, \quad i_4, \quad i_5$$

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad u_5$$

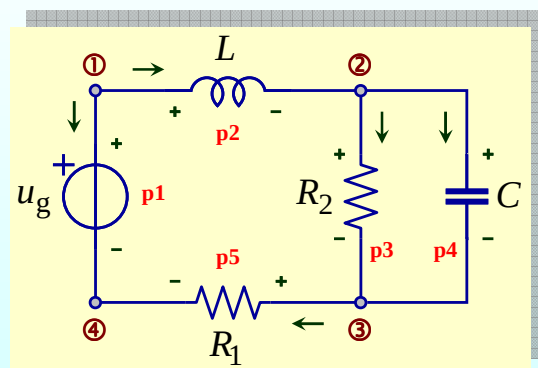
У практичном решавању електричних кола настојимо да поставимо што мање једначина узимајући у обзир једначине елемента. На пример, за напон напонског извора **не** уводимо променљиву већ у једначинама пишемо побуду. Слично поступамо са струјом струјног извора.



Вредности елемената, параметри

u_g

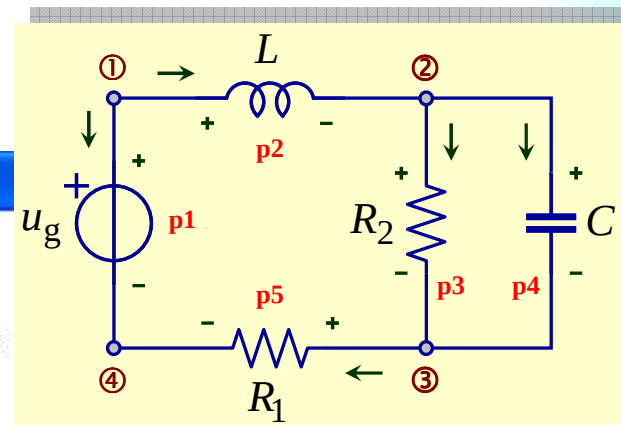
C, L, R_1, R_2



Напони и струје независних извора зову се *побуде, екситације, инпути, стимулуси* или *улази кола*.

Вредности елемената који нису независни извори зову се *параметри кола*.

Mathematica



ugR1R2LC.nb

In[1]:= `$Version`

Out[1]= 7.0 for Microsoft Windows (32-bit) (February 18,

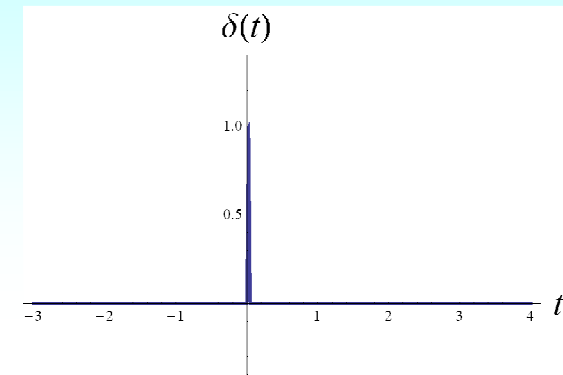
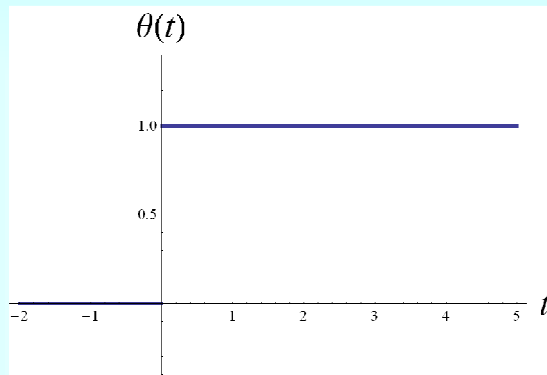
In[2]:= `resenje =`

```
DSolve[{i1[t] + i2[t] == 0, -i2[t] + i3[t] + i4[t] == 0,
-i3[t] - i4[t] + i5[t] == 0, -u1[t] + u2[t] + u3[t] + u5[t] == 0,
-u3[t] + u4[t] == 0, u1[t] == 12, u2'[t] == 1/2 * i2[t], u3[t] == 20 * i3[t],
i4'[t] == 1/1000 * u4[t], u5[t] == 10 * i5[t]},
{i1[t], i2[t], i3[t], i4[t], i5[t], u1[t], u2[t], u3[t], u4[t],
u5[t]}, t] // Flatten;
```

In[3]:= `(u3[t] /. resenje // Expand) /. {(x_?NumberQ) * y_ :> N[x] * y} // Simplify // TraditionalForm`

Out[3]//TraditionalForm=

$$e^{-7t/600} \left((0.570024 c_2 - 15.2125 c_1) \sin\left(\frac{\sqrt{71} t}{600}\right) + (-8.11371 c_1 - 0.519208 c_2) \cos\left(\frac{\sqrt{71} t}{600}\right) \right)$$



Функције побуде

Одскочна и импулсна побуда

И. М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов

Обобщенные функции, Выпуск 1, 2, 3

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, СССР, 1959.

Laurent Schwartz

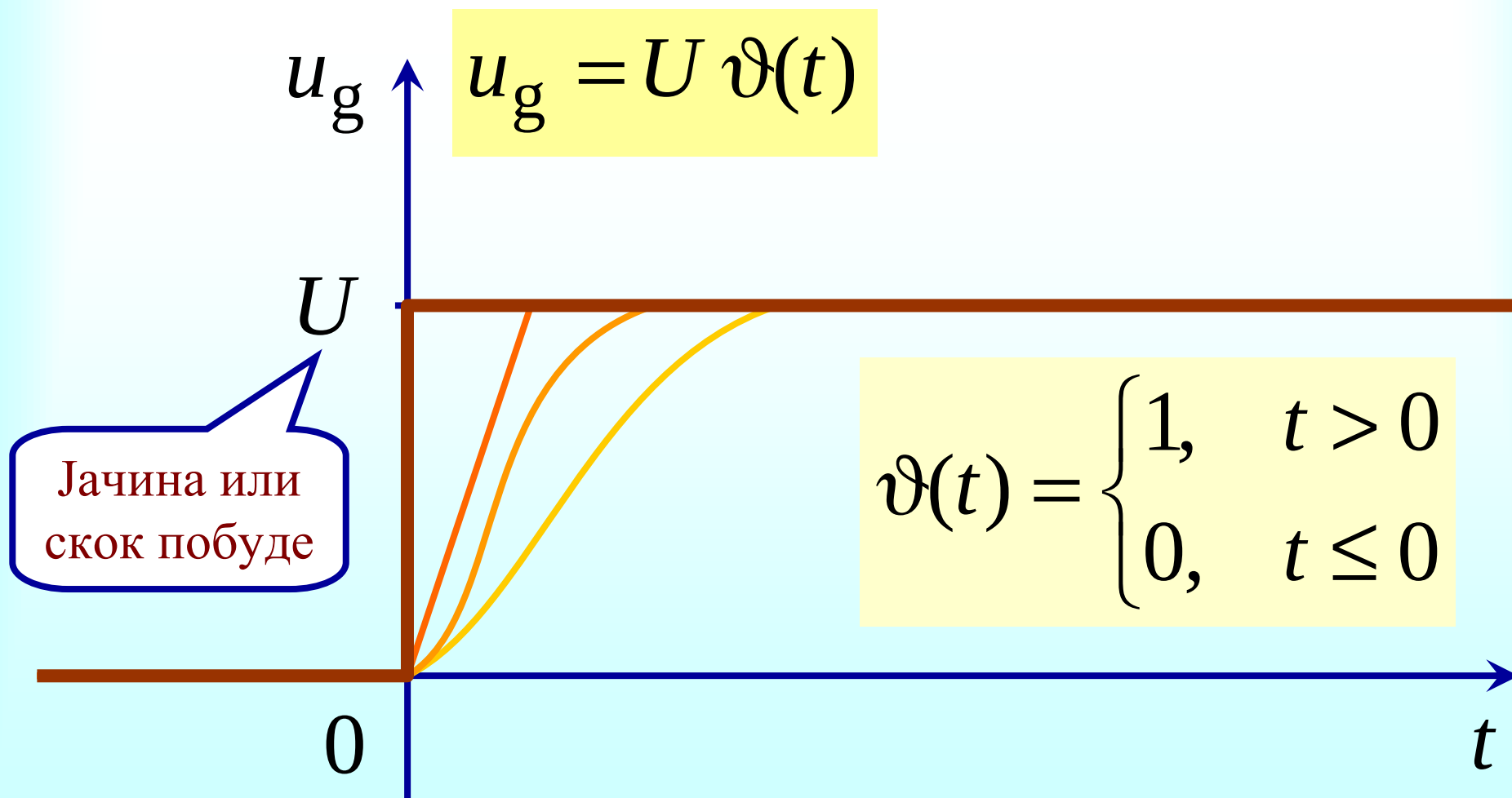
Méthodes mathématiques pour les sciences physiques

Hermann, Paris, France, 1961

Одскочна побуда

- **Одскочна** или **Хевисајдова побуда** је напон (или струја) који је сталан (константан) за позитивно време, али је једнак нули за остале тренутке времена.
- Одскочна побуда описује напон (или струју) који се од вредности нула за **бесконечно кратко** време успоставља на задату вредност.
- Занемаривање коначног времена успостављања сталне побуде је идеализација која води **генералисаним функцијама** (дистрибуцијама).

Настанак одскочне побуде



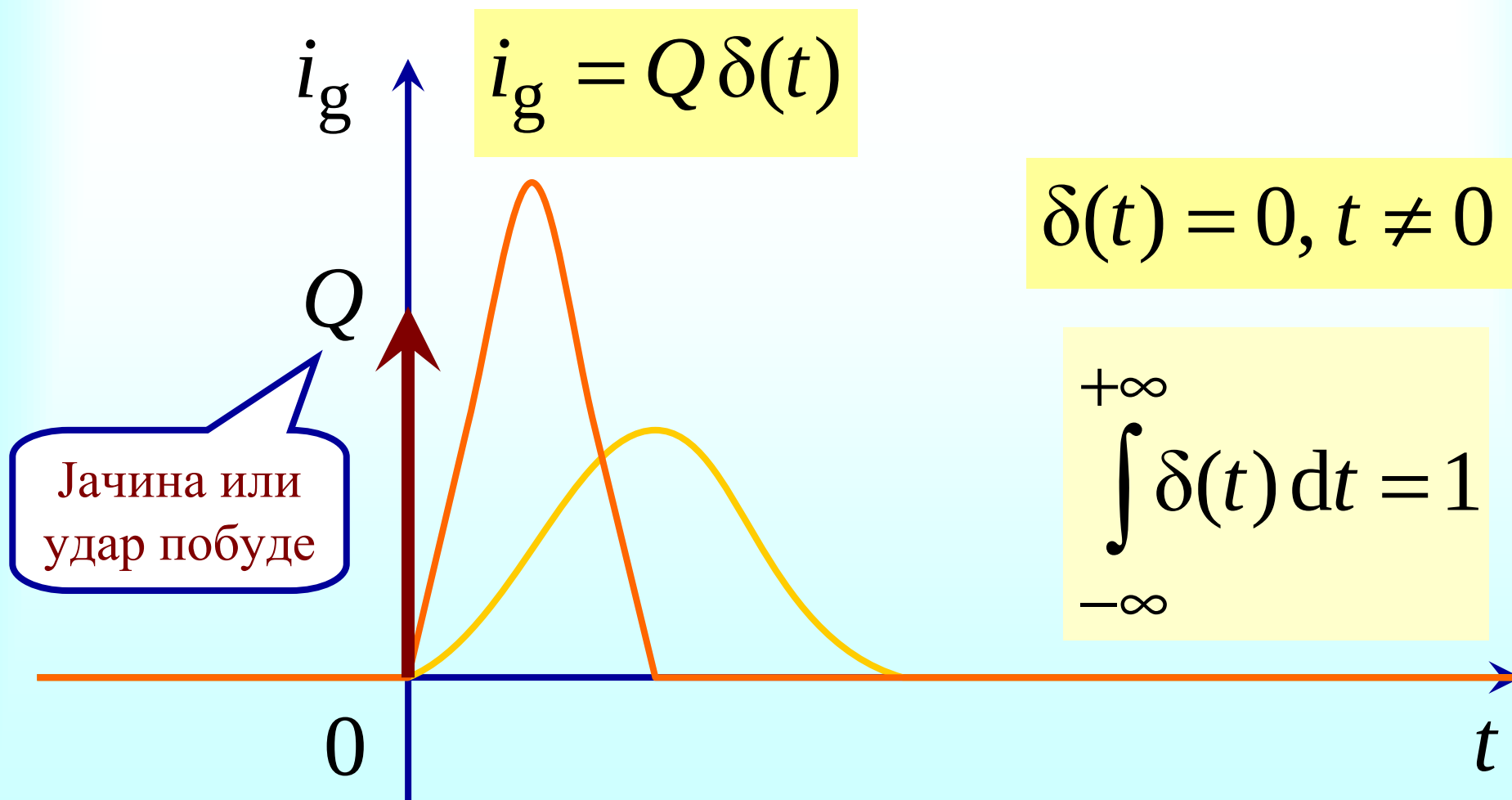
Одскочна побуда се обележава са $u(t)$ и са $h(t)$

Импулсна побуда

- *Импулсна* или *Диракова делта-побуда* је напон (или струја) који бесконачно кратко траје а има коначан интеграл по оси времена.
- Импулсна побуда описује процесе који се одигравају у занемарљиво малом интервалу времена у коме се практично **тренутно** размењује коначна енергија.
- Пример потребе за оваквом функцијом је одговор на следеће питање: “Којом струјом треба пунити празан кондензатор да би се **тренутно** оптеретио наелектрисањем?”.

Механичко тумачење: Сила којом треба покренути предмет јединичне масе, који мирује, тако да предмет тренутно почиње да се једнолико креће јединичном брзином (а да важе закони класичне, Њутнове, механике).

Настанак импулсне побуде



Делта-функција као дистрибуција

- Јединична импулсна побуда се још назива и *делта-функција*, Диракова делта-функција, или јединична импулсна функција.
- *Теорија дистрибуција* и *теорија генералисаних (уопштених) функција* су математичке области које се баве уопштеним функцијама као што је Диракова делта-функција.
- Користићемо ставове (теореме, правила) за рад са делта-функцијом **не** улазећи у доказе.

M. J. Lighthill, *An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press, 1958.

R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, 2000.

Основна својства делта-функције

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-a}^{+a} \delta(t) dt = 1, \quad a > 0$$

$$0 \delta(t) = 0$$

$$f(t) \delta(t) = f(0^+) \delta(t)$$

$$\frac{d \vartheta(t)}{dt} = \delta(t)$$

$f(t)$ је елементарна функција
као што су полиноми, триг.
и експ. функције, и слично.

За доказе и ригорозну теорију погледати,
на пример, И. М. Гельфанд, Г.Е. Шилев
Обобщенные функции, Выпуск 1, 2, 3
Государственное издательство физико-
математической литературы
Москва, СССР, 1959.

Генералисане функције као гранични процес

$$\vartheta_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{T_\epsilon} t, & 0 < t < T_\epsilon \\ 1, & t \geq T_\epsilon \end{cases}$$

$$\delta_1(t) = \frac{d}{dt} \vartheta_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{T_\epsilon}, & 0 < t < T_\epsilon \\ 0, & t \geq T_\epsilon \end{cases}$$

$$\vartheta_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \left(\sin\left(\frac{\pi}{2T_\epsilon} t\right)\right)^2, & 0 < t < T_\epsilon \\ 1, & t \geq T_\epsilon \end{cases}$$

$$\delta_2(t) = \frac{d}{dt} \vartheta_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{\pi}{2T_\epsilon} \sin\left(\frac{\pi}{T_\epsilon} t\right), & 0 < t < T_\epsilon \\ 0, & t \geq T_\epsilon \end{cases}$$

$$\vartheta_3(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{T_\epsilon} t\right), & t > 0 \end{cases}$$

$$\delta_3(t) = \frac{d}{dt} \vartheta_3(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{2}{\pi T_\epsilon} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{T_\epsilon} t\right)^2}, & t > 0 \end{cases}$$

$$\vartheta(t) = \lim_{T_\epsilon \rightarrow 0} \vartheta_n(t)$$

$$\delta(t) = \lim_{T_\epsilon \rightarrow 0} \delta_n(t)$$

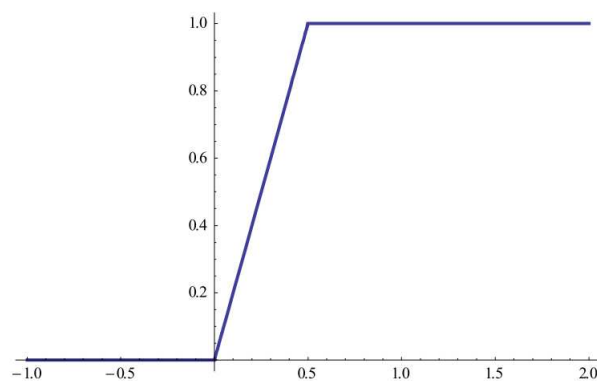
$$n = 1, 2, 3$$

$$T_\epsilon > 0$$

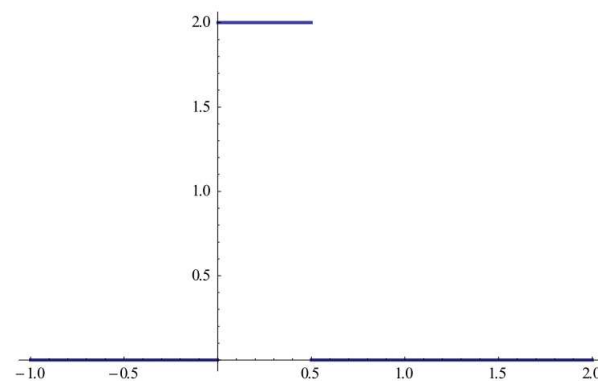
Апроксимација генералисаних функција елементарним

$T_{\varepsilon} = 0.5$

$\vartheta_1(t)$

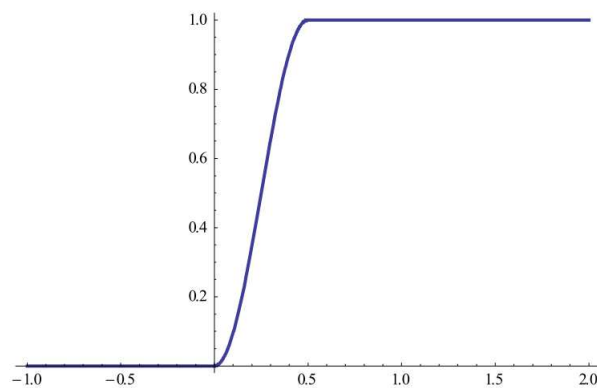


$\delta_1(t)$

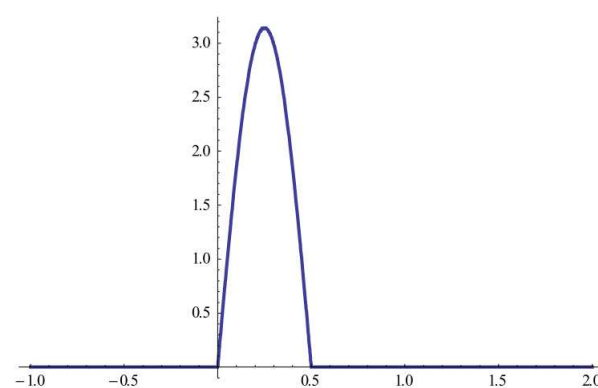


$T_{\varepsilon} = 0.5$

$\vartheta_2(t)$



$\delta_2(t)$



Ставови (теореме, правила)

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$0 \cdot \delta(t) = 0$$

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0+) \cdot \delta(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

$f(t)$ је елементарна функција; A , T , t_1 , t_2 су реалне константе

$$\delta(At) = \frac{1}{|A|} \delta(t), \quad A \neq 0$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-T) dt = f(T+)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-T) dt = \begin{cases} 1, & t_1 < T < t_2 \\ 0, & T < t_1 \vee t_2 < T \end{cases}$$

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Композиција делта-функције

Претпоставимо да је $g(t)$ функција времена дефинисана у области од интереса, у којој је непрекидна, глатка и диференцијабилна потребан број пута. Нека у области од интереса ова функција има реалне једноструке нуле (корене) $t_1, t_2, \dots, t_N$. Тада важи следећа композиција Диракове делта-функције и функције $g(t)$:

$$\delta(g(t)) = \sum_{k=1}^N \frac{\delta(t-t_k)}{|g'(t_k)|}, \quad g'(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(g(t)) dt = \sum_{k=1}^N \frac{f(t_k+)}{|g'(t_k)|}, \quad f(t_k+) = \lim_{t \rightarrow t_k, t > t_k} f(t)$$

Последице

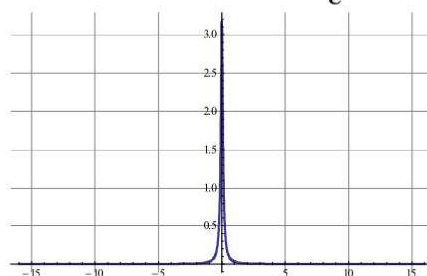
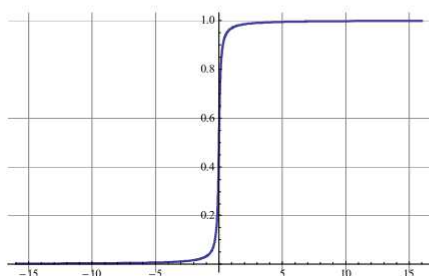
$$\delta(At + B) = \frac{\delta(t + \frac{B}{A})}{|A|}, \quad A \neq 0$$

$$\delta(At^2 + Bt + C) = \frac{\delta(t-t_1) + \delta(t-t_2)}{\sqrt{D}}, \quad A \neq 0, \quad D = B^2 - 4AC > 0, \quad t_1 = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}, \quad t_2 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}$$

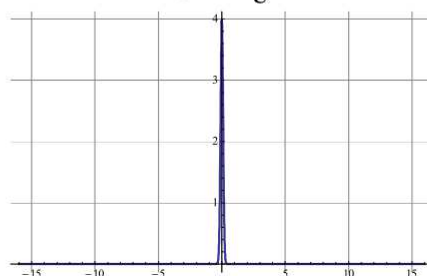
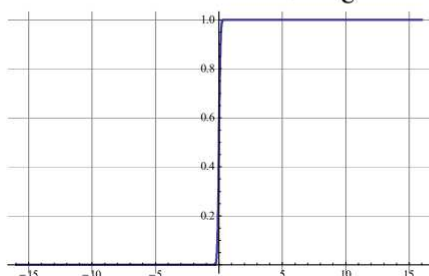
Алтернативна дефиниција

Алтернативна дефиниција Хевисајдове одскочне функције и Диракове делта-функције, коју најчешће користе математичари, полази од непрекидних глатких диференцијабилних функција дефинисаних на целој реалној оси, које имају глатке изводе произвољног реда.

$$\vartheta_4(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{T_\epsilon} t\right), \quad \delta_4(t) = \frac{d}{dt} \vartheta_4(t) = \frac{1}{\pi T_\epsilon} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{T_\epsilon} t\right)^2}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad T_\epsilon > 0, T_\epsilon \rightarrow 0$$



$$\vartheta_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}T_\epsilon} t\right), \quad \delta_5(t) = \frac{d}{dt} \vartheta_5(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}T_\epsilon} e^{-\frac{t^2}{2T_\epsilon^2}}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad T_\epsilon > 0, T_\epsilon \rightarrow 0$$



$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau$$

Вредност у нули

- Хевисајдова одскочна функција $v(t)$ је дефинисана као гранична вредност непрекидне функције која **пролази кроз нулу** и тежи јединици. У складу са таквим приступом вредност Хевисајдове одскочне функције у нули је једнака нули, $v(0) = 0$.
- Математичари обично усвајају да је $v(0)$ једна половина, што је аритметичка средина левог и десног лimesа $v(t)$ у нули.
- Неки аутори усвајају да је $v(0) = 1$.
- Постоје примене у којима је ирелевантно колико је $v(0)$, па се може усвојити било која вредност из затвореног интервала $[0,1]$.
- Диракова делта-функција $\delta(t)$ у нули се посматра као гранична вредност и инжењери усвајају да је $\delta(0) = +\infty$.
- Строжији аутори ће уместо *Диракова делта-функција* говорити *Дираков делта-симбол* наглашавајући да се не ради о функцији у смислу подскупа Декартовог производа.

Димензије

- Хевисајдова одскочна функција је без димензије.
- *Хевисајдова побуда* дефинише се као производ константе, која је **напон** или **струја**, и Хевисајдове одскочне функције.
- Диракова делта-функција је извод по времену Хевисајдове одскочне функције и има димензију реципрочног времена, **t^{-1}** .
- *Диракова побуда* дефинише се као производ константе која је **количина наелектрисања** или **флукс**, и Диракове делта-функције.

$$u_g(t) = U \vartheta(t)$$

$$i_g(t) = I \vartheta(t)$$

$$u_g(t) = \Phi \delta(t)$$

$$i_g(t) = Q \delta(t)$$

Зашто су важне генералисане функције?

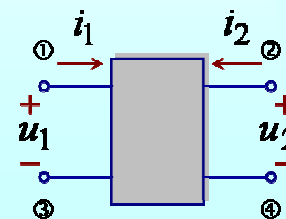
- **Хевисајдова одскочна функција** се може користити за описивање скоковитих промена када се физичка величина мења са једне **коначне** вредности на другу **тренутно**, у бесконачно кратком интервалу времена.
- **Диракова делта-функција** се може користити за описивање краткотрајних појава, које постоје у **бесконачно кратком интервалу времена**, а при којима се размењује **коначна** енергија.
- Посматрајмо кондензатор, прекидач и батерију. Прикључимо кондензатор, у коме нема енергије, на батерију преко прекидача. Због губитака у компонентама напон кондензатора ће врло брзо од вредности нула постати врло близак, али мањи, од напона батерије. После извесног времена, енергија батерије ће се претворити у облик који није електромагнетска енергија и сви напони и струје ће бити једнаки нули. И батерија и кондензатор ће бити празни, без енергије.
- Замислимо сада **идеализацију** компоненти. **Апстрахујмо** све губитке, несавршености и нус-појаве, а претпоставимо да су кондензатор, прекидач и батерија идеални. Шта се догађа када прикључимо **идеалан кондензатор** на **идеалну батерију** преко **идеалног прекидача**? Очигледно, напон на кондензатору **тренутно** постаје једнак напону батерије и не мења се. Напон кондензатора је једнак нули до тренутка прикључења, а после тога је једнак напону батерије – може се описати *Хевисајдовом одскочном функцијом* помноженом напонам батерије. Струја кондензатора је једнака нули, а његова енергија се **тренутно** повећала, као и његово наелектрисање. Очигледно, струја **бесконачно кратког трајања**, у тренутку затварања прекидача, је наелектрисала и енергизовала кондензатор. Таква струје се може описати *Дираковом делта-функцијом* помноженом пренетом количином наелектрисања.

Родоначелник теорије дистрибуција је **Сергей Львович Соболев** (1908–1989). Биобиблиографический указатељ, Институт математики им. С. Л. Соболева, Издательство Института математики, РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК, Новосибирск, 2013, 4-е изд., доп. УДК 501(092) ISBN 978–5–86134–196–7

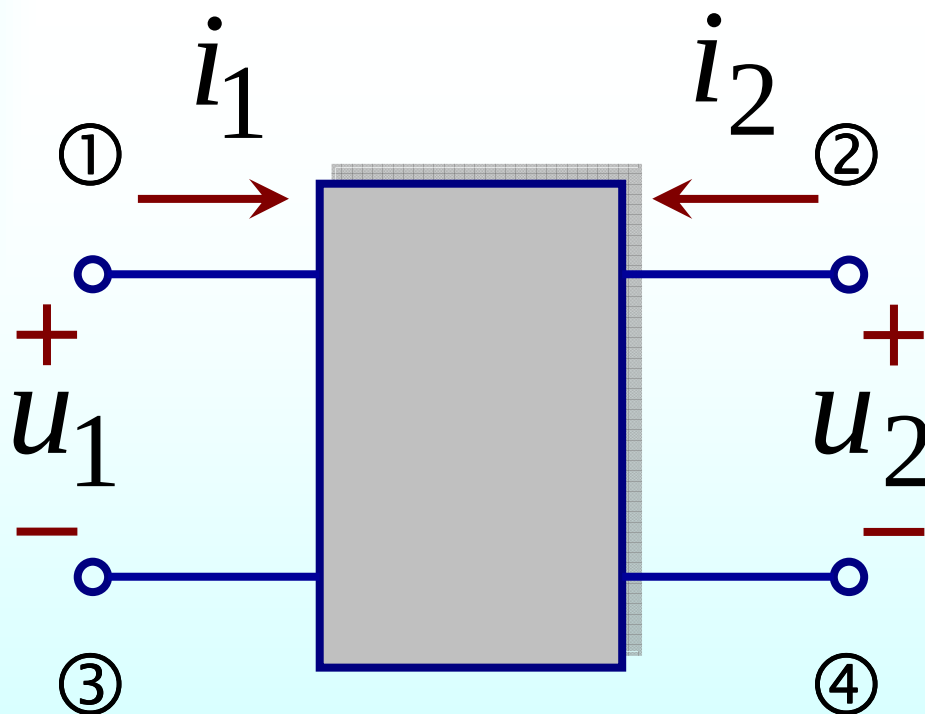


Четворополи

Једначине и примена

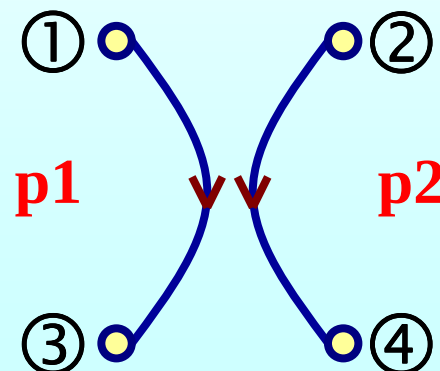


Четворополи



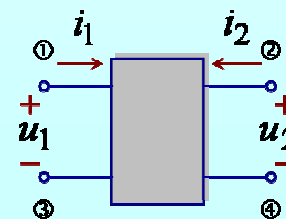
Четворопол или **двоприступна мрежа** је мрежа са четири краја који образују два приступа.

Граф четворопола



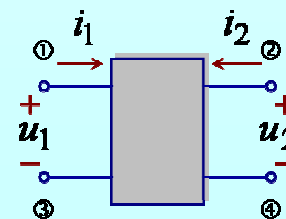
Отпорнички четворопол

- **Отпорнички** или резистивни четворопол је двоприступна мрежа сачињена од елемената описаних алгебарском везом напона и струје, као што су отпорници, операциони појачавач, и зависни извори.
- Посматраћемо четворополе у којима **нема** независних извора.
- Проучићемо једначине четворопола.

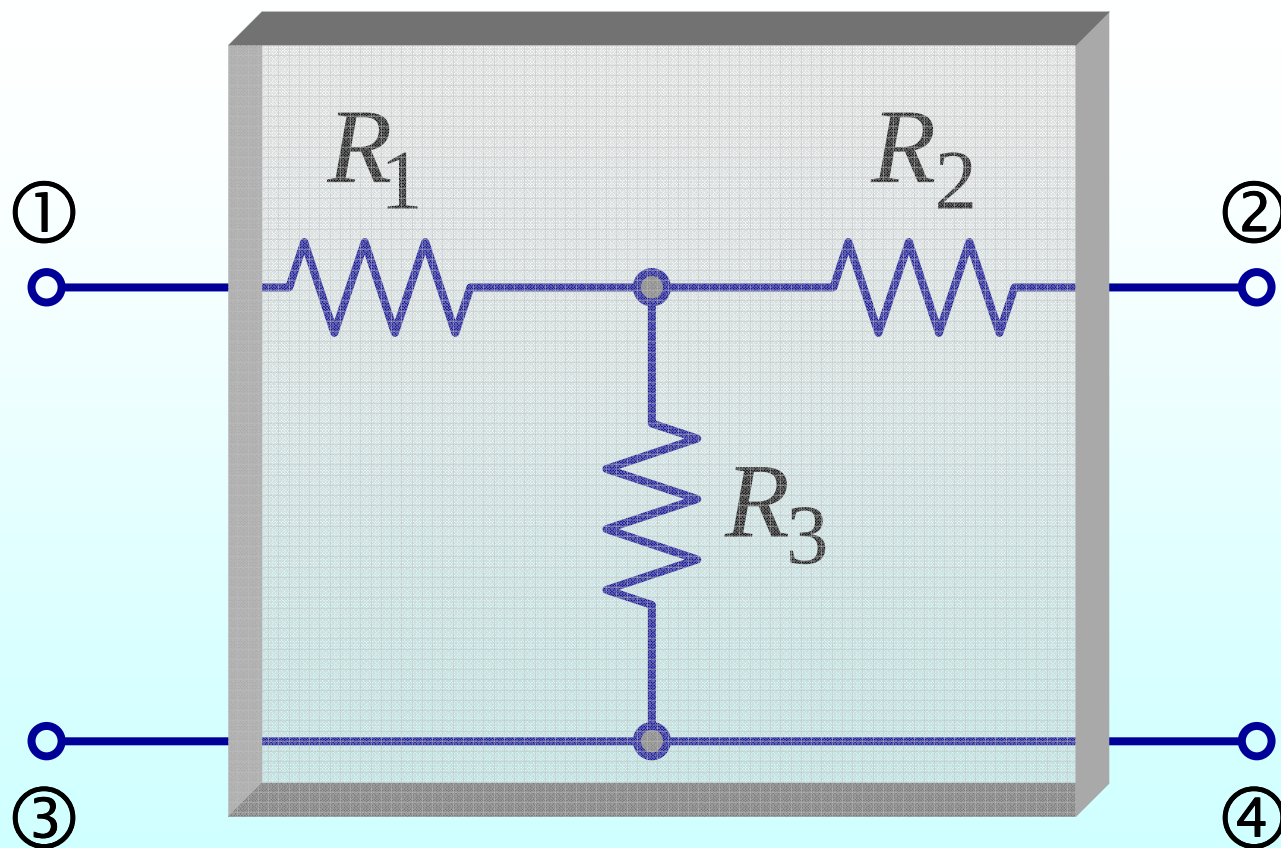


Једначине четворопола

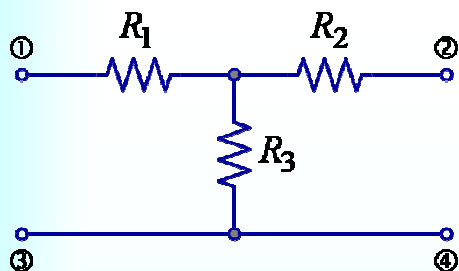
- На приступима четворопола постоје четири променљиве, 2 напона и 2 струје.
- Две променљиве се могу одабрати и изразити преко преостале две.
- Постоји шест система од две једначине који описују четворопол.
- Посматраћемо отпорнички четворопол.



Пример четворопола: Т-мрежа

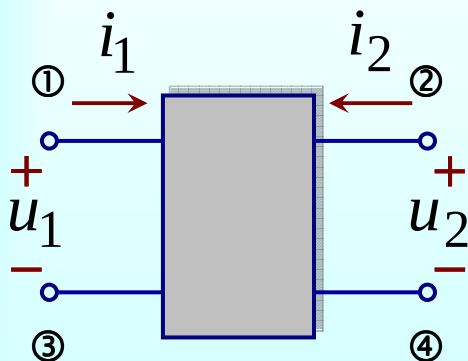


Једначине Т-мреже



$$u_1 = R_1 i_1 + R_3 (i_1 + i_2)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + R_3 (i_1 + i_2)$$



$$u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$

$$u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$$

$$r_{11} = R_1 + R_3$$

$$r_{12} = R_3$$

$$r_{21} = R_3$$

$$r_{22} = R_2 + R_3$$

Једначине r -параметара
(отпорничких параметара)

Остале једначине четворопола

$$i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2$$

$$i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2$$

***g*-параметри,
проводнички параметри**

$$u_1 = a_{11}u_2 + a_{12}(-i_2)$$

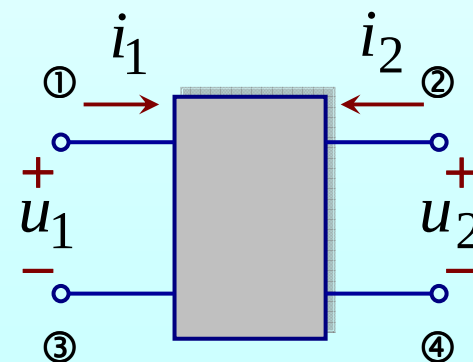
$$i_1 = a_{21}u_2 + a_{22}(-i_2)$$

**Погонски параметри, *a*-параметри,
ABCD-параметри**

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$$

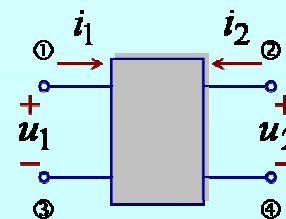
$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$$

Хибридни параметри

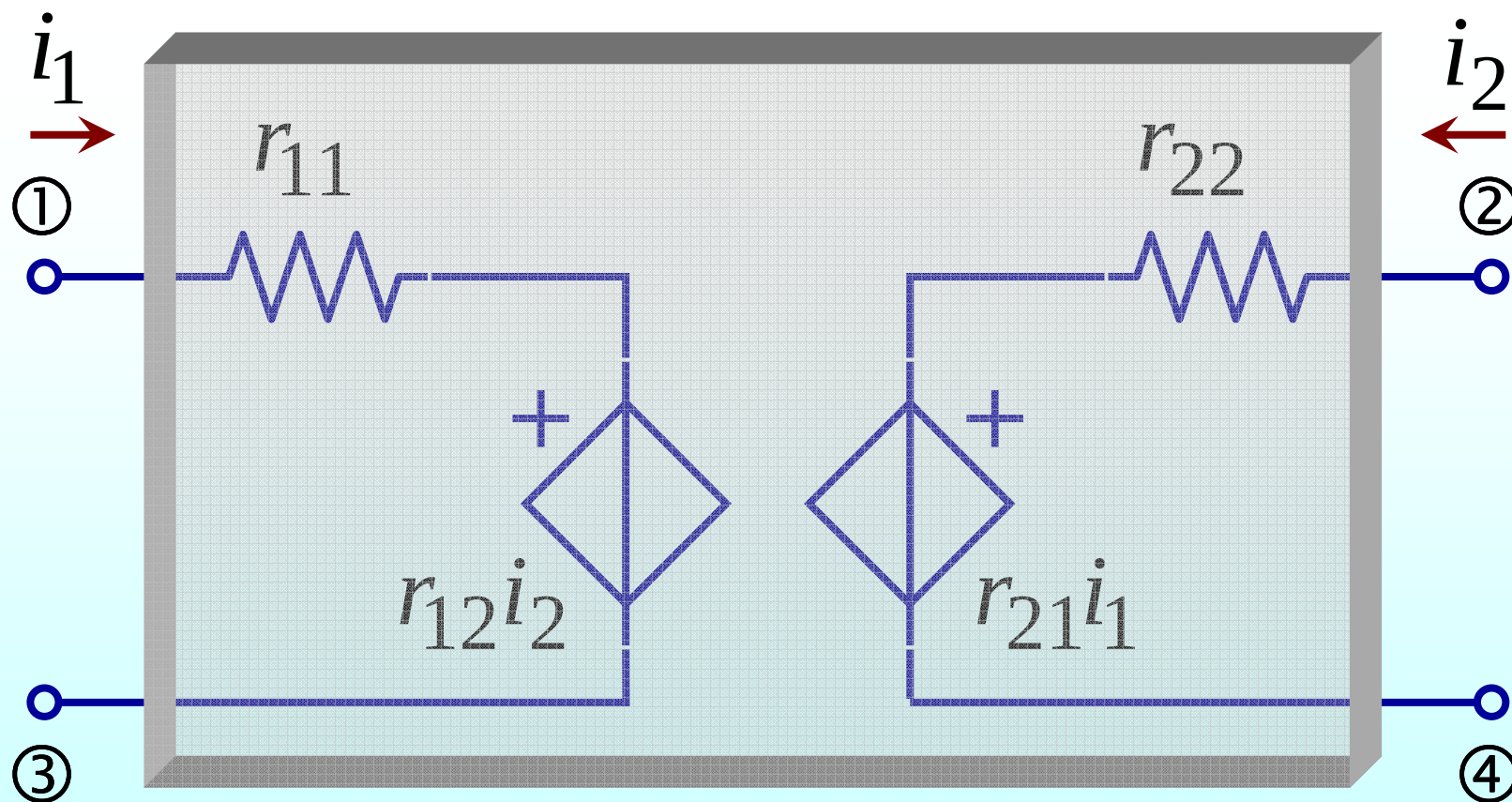


Како одређујемо параметре четворопола?

- Претпоставимо да на приступима делују **извори** (независни генератори) који стварају напоне и струје приступа (ове изворе не цртамо на шеми).
- Поставимо **СЈК**, а **не** постављамо две једначине за претпостављене изворе.
- **Уклонимо** (елиминишемо) све променљиве осим напона и струја приступа, добијемо две једначине.
- **Преуредимо** две добијене једначине на облик који одговара дефиницији тражених параметара.
- **Препознамо** тражене параметре као коефицијенте у преуређеним једначинама.



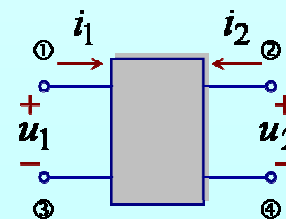
Представљање четворопола



Четворопол познатих параметара можемо у општем случају представити и преко зависних струјних извора.

Пасивност четворопола

- Отпорнички четворопол је **пасиван** ако је његова улазна снага **ненегативна**.
- Из услова пасивности можемо одредити одговарајућу везу параметара, и обрнуто, на основу познатих параметара можемо испитати да ли је четворопол пасиван.
- Четворопол сачињен од отпорника је пасиван.
- Четворопол је **без губитака** ако је његова улазна снага идентички **једнака нули**.



Пример услова пасивности

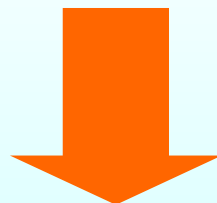
$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

$$p = u_1i_1 + u_2i_2$$

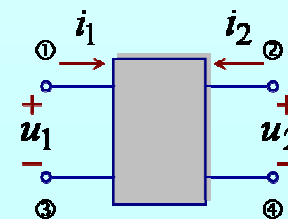
$$p \geq 0$$

Услове пасивности
четворопола можемо
извести и за g -, h -, и
 a -параметре.



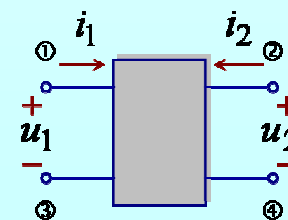
$$r_{11} \geq 0, \quad r_{22} \geq 0$$

$$4r_{11}r_{22} \geq (r_{12} + r_{21})^2$$

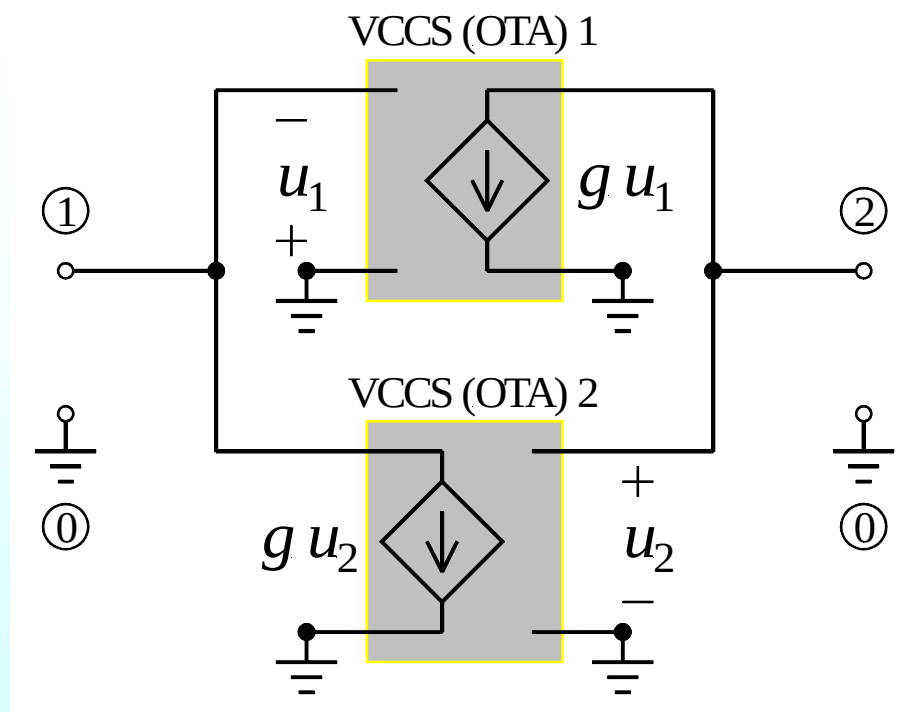


Примена четворопола

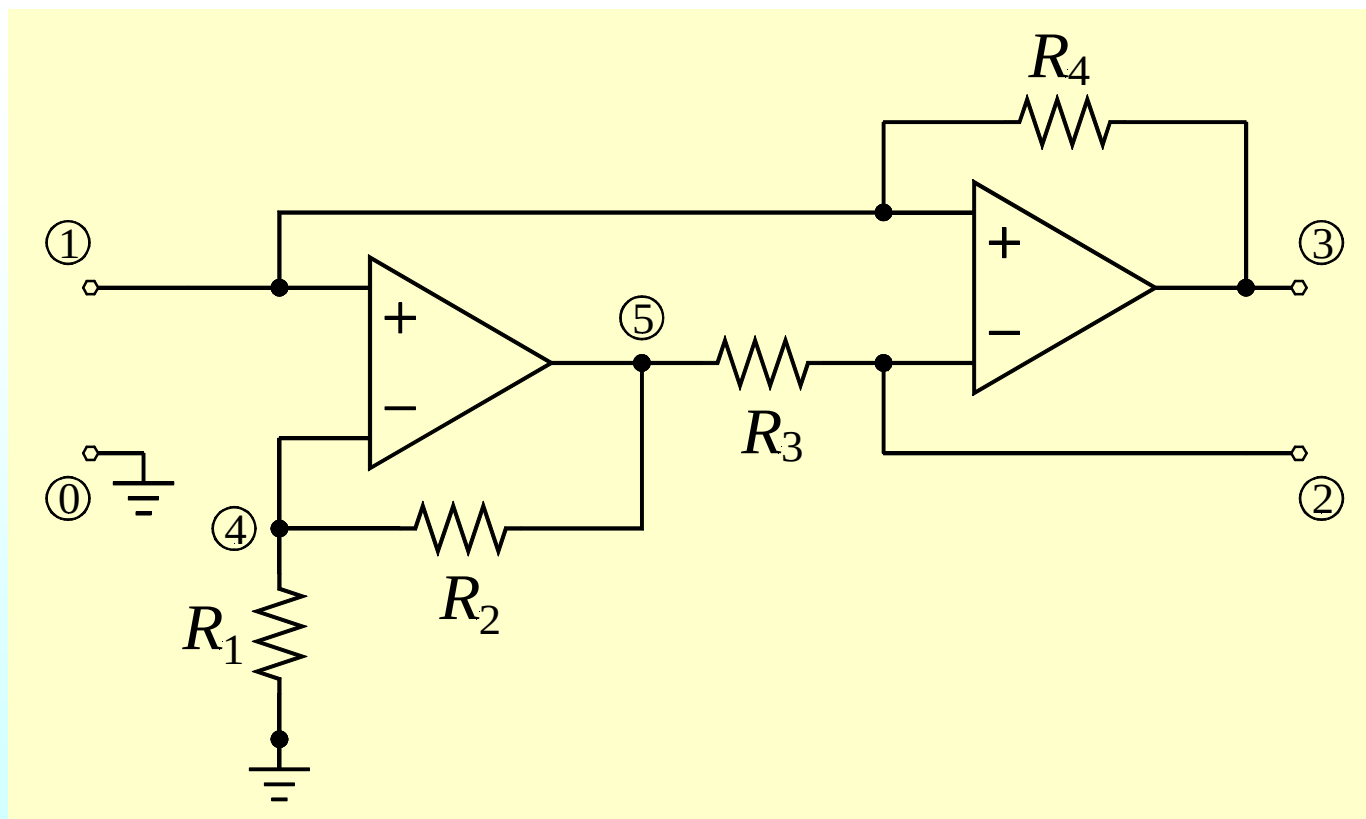
- Четворополе користимо у заменским шемама када део кола представљамо двоприступном мрежом познатих параметара, на пример погонских.
- Заменске шеме са четворополима дају прегледнију слику сложеног кола.
- Четворополи обично представљају склопове или функционалне делове кола.



ОТА жиратор

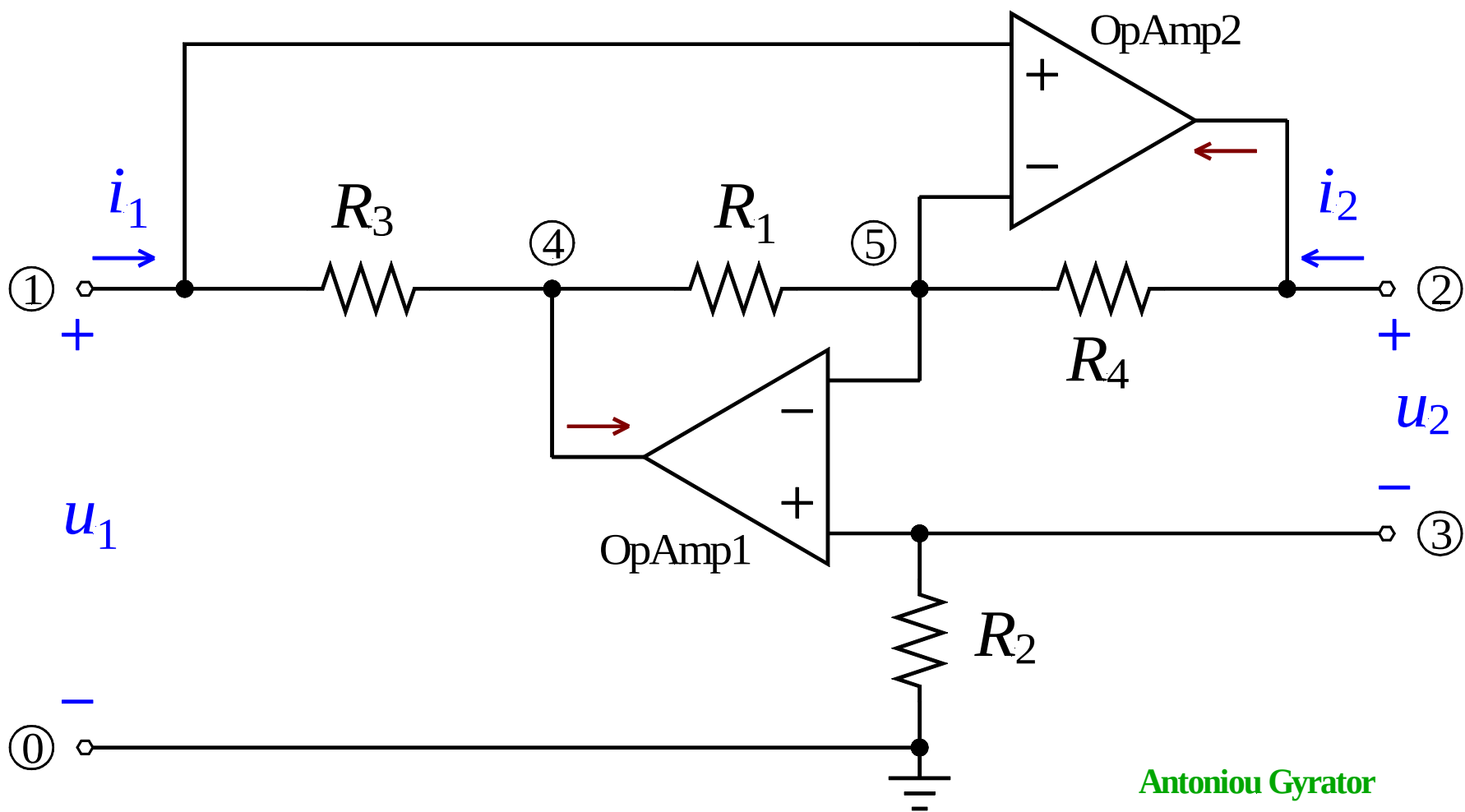


Риорданов жиратор



Четворопол се користи, на пример, за имплементацију синтетичког калема (synthetic inductor, simulated inductor), за практичну реализацију чисто индуктивног елемента без намотаја проводне жице (на пример, у мерној опреми за експерименталан лабораторијски рад).

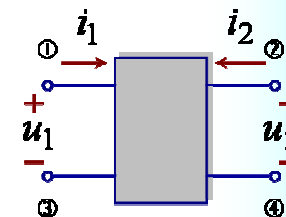
Антониуова мрежа жиратора за синтетички калем



Питања (1)

- Шта су променљиве кола?
- Шта су једначине кола (систем једначина кола)?
- Колико има променљивих кола, једначина кола, једначина елемената, једначина КЗ, једначина КЗС, једначина КЗН?
- Какав је састав једначина кола (ког типа, облика, су једначине кола)?
- Шта је одскочна побуда?
- Шта је Диракова побуда?
- Која су својства делта-побуде?

Питања (2)



- Шта је четворопол? Којим једначинама (параметрима) се он описује?
- Описати поступак за одређивање r -параметара четворопола.
- Како се може представити отпорнички четворопол помоћу зависних извора?
- Шта је пасиван четворопол? Извести услов пасивности преко r -параметара.
- Извести услов пасивности преко g -параметара.

Питања (3)

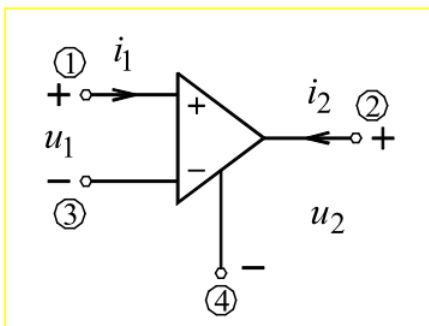
(3) Идеалан трансформатор је

- (а) динамички елемент,
- (б) елемент са губицима,
- (в) елемент без губитака,
- (г) активан елемент ?

(5) Идеалан операциони појачавач је активан електрични елемент?

- а) Не
- б) Да

(4) Једначине операционог појачавача (карактеристике елемента, конститутивне једначине, дефиниционе једначине) су



- (а) $i_1 = 0$, $i_2 = 0$,
- (б) $i_1 = 0$, $u_1 = 0$,
- (в) $i_1 = 0$, $u_2 = 0$,
- (г) $u_1 = 0$, $i_2 = 0$,
- (д) $u_1 = 0$, $u_2 = 0$,
- (ђ) $u_2 = 0$, $i_2 = 0$?

Питања (4)

(5) Напонски извор управљан напоном (идеалан напонски појачавач, VCVS, Voltage Controlled Voltage Source) је активан електрични елемент?

а) Не

б) Да

(5) Како су дефинисани погонски параметри (a -параметри, $ABCD$ -параметри) резистивног четворопола? Нацртати потребну шему са ознакама и смеровима и написати одговарајуће једначине.

Питања (5)

(6) Одредити a -параметре (погонске параметре, $ABCD$ -параметре, chain parameters, transmission parameters) идеалног трансформатора преносног броја m .

$$a_{11} = \quad , \quad a_{12} =$$

$$a_{21} = \quad , \quad a_{22} =$$

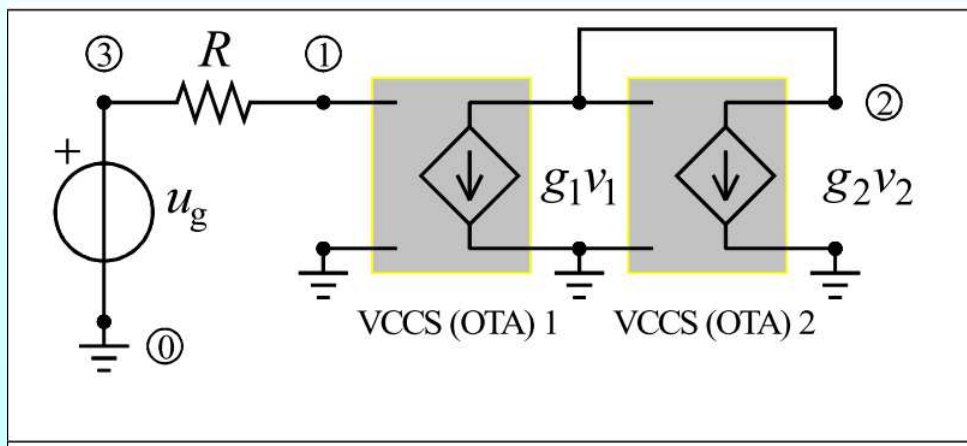
(5) Шта је четворопол? Којим једначинама (параметрима) се он описује? Нацртати шематску претставу (графички симбол) четворопола, обележити крајеве, приступе, смерове напона и струја приступа, и напоне и струје приступа.

Питања (6)

(6) Колико је појачање, $A = \frac{v_2}{u_g}$, ОТА

појачавача познатих параметара?

$$A = \frac{-g_1}{g_2}$$



```
MaximaOnAndroid

Dejan Tomic, SALECv 2019 v1.0

Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima

/mnt/sdcard/Download/SALECv.mac

(%i3) OTAAmp_Schema:[["V","Vg",3,0,Ug],["R","R",3,1,R],
["VCCS","OTA1",[1,0],[2,0],g1],
["VCCS","OTA2",[2,0],[2,0],g2]]
(%i4) OTAAmp_Response:SALECv(OTAAmp_Schema)
ARRSTORE: use_fast_arrays=false; allocate a new
property hash table for |$j|
ARRSTORE: use_fast_arrays=false; allocate a new
property hash table for |$v|
(%i5) transpose(OTAAmp_Response)

      ⎛  V1 = Ug ⎞
      ⎜  V2 = -  $\frac{U_g g_1}{g_2}$  ⎟
      ⎜  V3 = Ug ⎟
      ⎜  IVg = 0 ⎟

(%i6) ev(A = V[2]/Ug,OTAAmp_Response,expand)

      A = -  $\frac{g_1}{g_2}$ 

/data/data/jp.yhonda/cache/userscript-571568707.mac

batch("/data/data/jp.yhonda/cache/userscript-5 Enter
```

Задатак (1)

Задатак 1

Инструментациони појачавач има познате вредности елемената $u_{g1} = U \vartheta(t)$, $U > 0$,

$u_{g2} = U \vartheta(t - T)$, $T > 0$, R_8 ,

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R$.

(4) Колико има главних (фундаменталних) пресека, а колико главних петљи (фундаменталних контура)?

(8) Одредити напон v_3 и његов домен.

(3) Нацртати график напона v_3 . Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Главних пресека има
а главних петљи

Напон v_3 и његов домен су

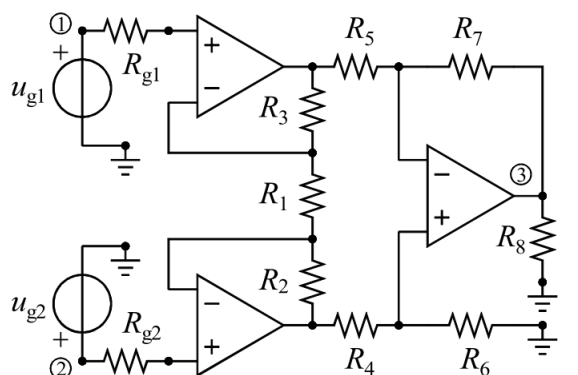
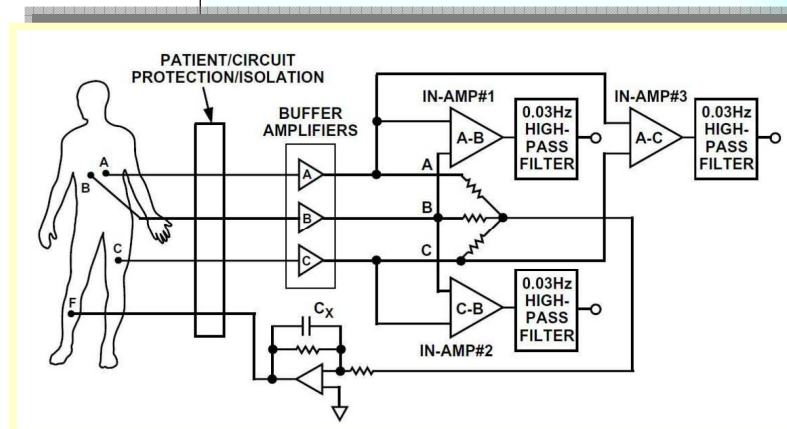


График напона v_3 је



У задатку се анализира *инструментациони појачавач* који се користи у мерним електронским уређајима, као што су медицински апарати (ECG, Electrocardiogram).

Задатак (2)

Задатак 2

Аналогни електронски сабирач познатих параметара је приказан на слици. Одредити (3) број главних пресека графа кола и (7) напон (потенцијал) v_4 и његов домен.

(5) Нацртати напон v_4 у функцији времена ако су побуде $u_{g1}(t) = U \vartheta(t)$,

$$u_{g2}(t) = -2U \vartheta(t - T), \quad u_{g3}(t) = U \vartheta(t - 2T),$$

$U > 0$, $T > 0$, и ако су отпорности свих отпорника једнаке R .

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Број главних пресека је .

Напон (потенцијал) v_4 и његов домен су

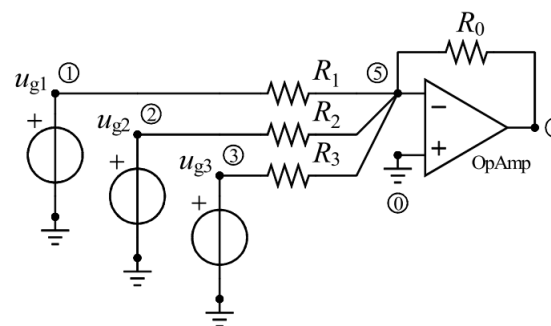


График напона v_4 у функцији времена је

Задатак (3)

Задатак 2

Аналогни електронски одузимац је шематски приказан на слици. Вредности елемената су познате и постоји веза параметара $\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} = 1$.

(7) Одредити напон (потенцијал) v_3 и његов домен (област дефинисаности).

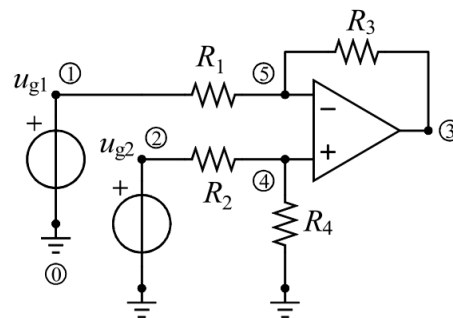
(5) Одредити снагу (тренутну улазну снагу) операционог појачавача.

(3) Нацртати напон v_3 у функцији времена ако су побуде $u_{g1}(t) = U \vartheta(t)$,
 $u_{g2}(t) = 2U \vartheta(t - T)$, $U > 0$, $T > 0$.

Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.

Напон (потенцијал) v_3 и његов домен су

Снага операционог појачавача је



Напон v_3 у функцији времена је

Задатак (4)

Задатак 1

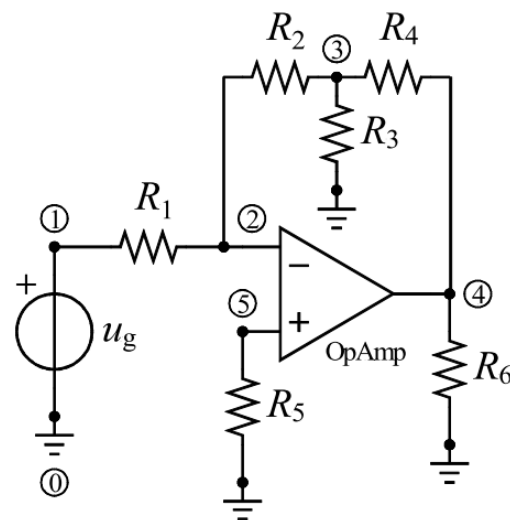
Инвертујући појачавач великог појачања и малог распона познатих отпорности је приказан на слици. Одредити

(8) напонско појачање $A = \frac{v_4}{u_g}$.

(3) Нацртати граф појачавача и

(4) одредити број главних (фундаменталних) пресека и петљи (контура).

Напонско појачање је



Граф појачавача је

Број главних (фундаменталних) пресека је ,
а петљи (контура) је .

Задатак (5)

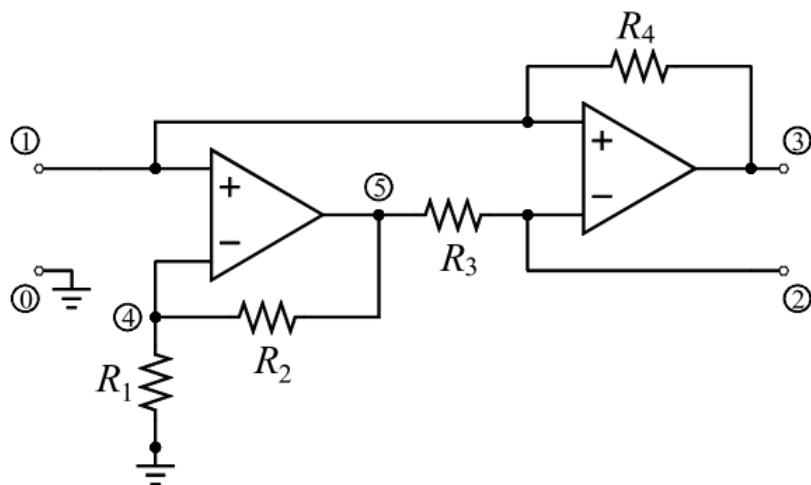
Задатак 1

Отпорности отпорника електричне мреже са слике су R . Мрежа има два приступа (порта): први приступ чине крајеви ① и ④, а други приступ чине крајеви ② и ③.

(5) Одредити отпорничке параметре (r -параметре) мреже.

(5) Испитати да ли је мрежа пасивна.

(5) Испитати да ли је мрежа без губитака.



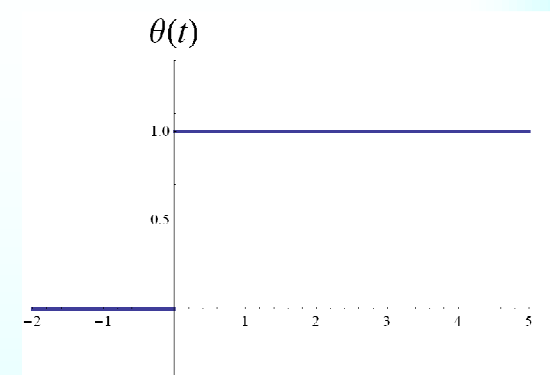
Отпорнички параметри (r -параметри) су

Да ли је мрежа пасивна? Образложити.

Да ли је мрежа без губитака? Образложити.

Oliver Heaviside 1850–1925

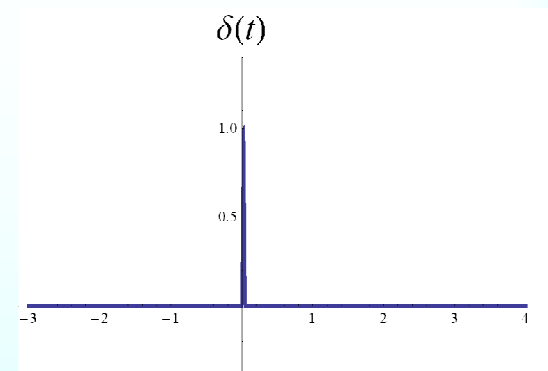
"I do not refuse my dinner simply because I do not understand the process of digestion."



Један од највећих прегалаца модерне електротехнике и Теорије електричних кола. Увео је одскочну функцију. Рођен у Лондону, Уједињено Краљевство.

Paul Dirac 1902–1984

"The aim of science is to make difficult things understandable in a simpler way."



Теоријски физичар. Добитник Нобелове награде.
Увео је делта-функцију. Рођен у Бристоу,
Уједињено Краљевство.

Laurent Schwartz 1915–2002



Professeur émérite à l'université Denis Diderot et à l'École polytechnique, Laurent Schwartz avait été élu Correspondant de l'Académie des sciences le 2 mai 1973, puis Membre le 24 février 1975, dans la section de mathématique. Laurent Schwartz, est le premier Français à avoir obtenu la prestigieuse médaille Fields, il a apporté une contribution fondamentale dans plusieurs domaines mathématiques, notamment en établissant la célèbre théorie des distributions.