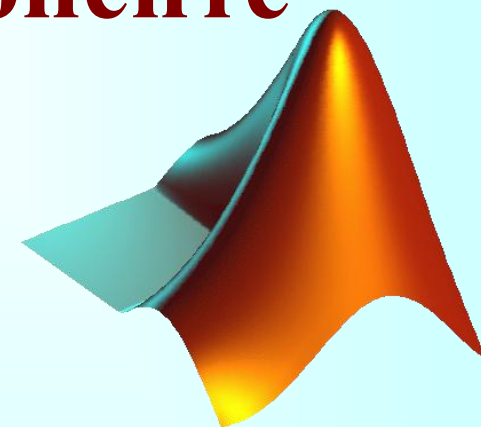
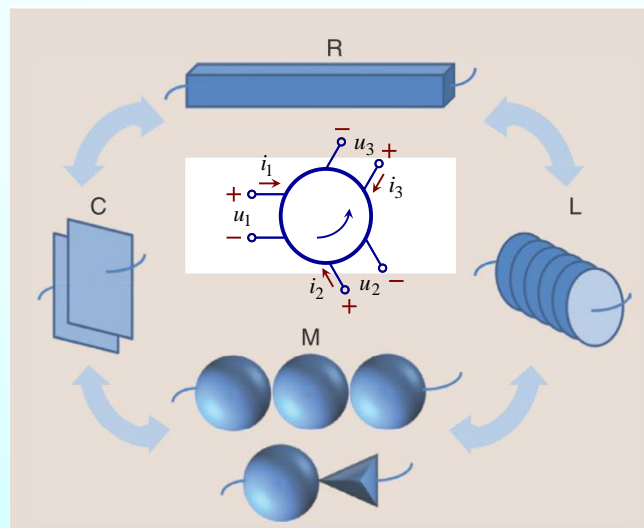
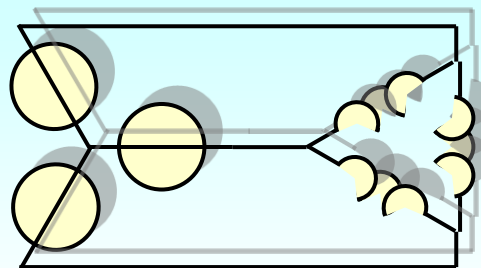


# Практикум из рачунарске анализе трофазних кола

## 7. Симетричне компоненте



Милка Потребих  
Никола Баста



# Симетричне компоненте

временски непроменљивих, линеарних,  
трофазних кола са устаљеним  
простопериодичним одзивом

# Задатак (1)

У трофазном електричном колу је дошло до квара и измерен је трофазни систем струја

$$\underline{I}_a = 150\text{A} \angle 45^\circ, \underline{I}_b = 250\text{A} \angle 150^\circ, \underline{I}_c = 100\text{A} \angle 300^\circ.$$

- (а) Одредити симетричне компоненте трофазног система струја.
- (б) Нацртати фазорски дијаграм симетричних компоненти.
- (в) Одредити тренутне вредности симетричних компоненти.

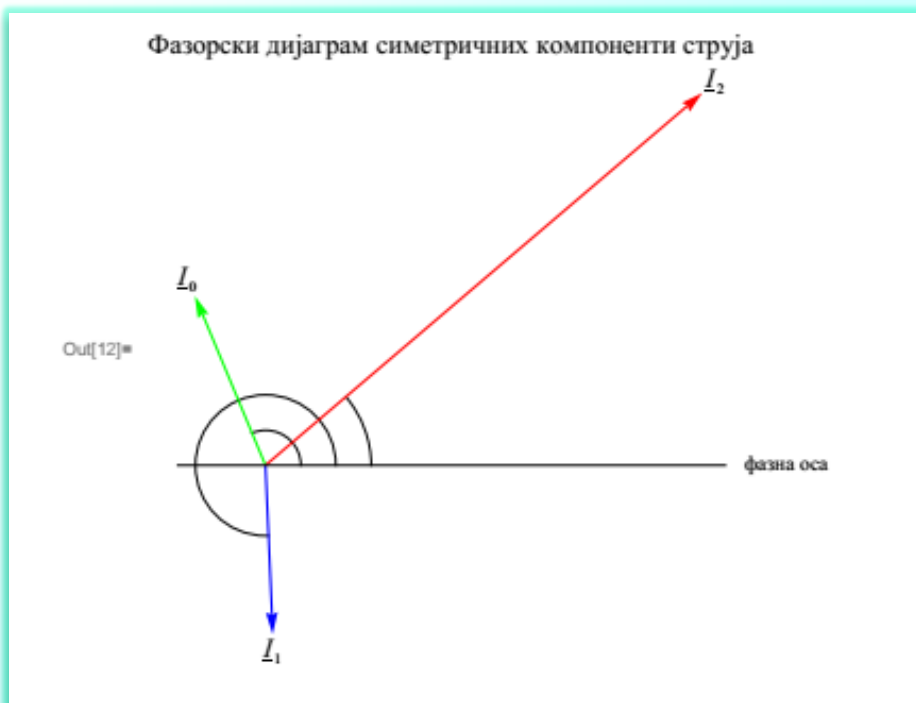
Учестаност је  $f = 50\text{Hz}$ .

# Симетричне компоненте трофазног система струја

$$\mathbf{I}_{abc} = \begin{bmatrix} 150e^{j45^\circ} \\ 250e^{j150^\circ} \\ 100e^{j300^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = e^{\frac{2\pi}{3}j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{I}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{abc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 150e^{j45^\circ} \\ 250e^{j150^\circ} \\ 100e^{j300^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{012} = \begin{pmatrix} 52.1991 \angle 112.703^\circ \\ 48.0206 \angle -87.5867^\circ \\ 163.205 \angle 40.4521^\circ \end{pmatrix}$$

# Тренутне вредности симетричних компоненти

$$\mathbf{I}_{012} = \begin{pmatrix} 52.1991 \angle 112.703^\circ \\ 48.0206 \angle -87.5867^\circ \\ 163.205 \angle 40.4521^\circ \end{pmatrix}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$i_0(t) = 52.199\sqrt{2} \cos(2\pi ft + 112.703^\circ)$$

$$i_1(t) = 48.0206\sqrt{2} \cos(2\pi ft - 87.5867^\circ)$$

$$i_2(t) = 163.205\sqrt{2} \cos(2\pi ft + 40.4521^\circ)$$

# Матрица [A]

## Matrica [A]

```
syms a
```

```
A = [ [1, 1, 1]; [1, a^-1, a^-2]; [1, a, a^2] ]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

```
anum = exp(1i*2*pi/3)
```

```
anum = -0.5000 + 0.8660i
```

```
Anum = simplify(subs(A, a, anum))
```

$$Anum = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

# Симетричне компоненте трофазног система струја

## Simetricne komponente struja

$$\mathbf{I}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{abc}$$

```
Ia = 150*exp(1i*deg2rad(45));  
Ib = 250*exp(1i*deg2rad(150));  
Ic = 100*exp(1i*deg2rad(300));
```

```
Iabc = [Ia; Ib; Ic];  
I012 = simplify( (1/3)*conj(Anum)*Iabc )
```

$$\mathbf{I}_{012} = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \sqrt{3} \left( -\frac{125}{3} - \frac{50}{3} i \right) + \frac{50}{3} + \frac{125}{3} i \\ \sigma_1 - \frac{100}{3} - \frac{250}{3} i \\ \sigma_1 + \sqrt{3} \left( \frac{125}{3} + \frac{50}{3} i \right) + \frac{50}{3} + \frac{125}{3} i \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sqrt{2} (25 + 25 i)$$

```
mag_I012 = abs(double(I012));  
psi_I012 = angle(double(I012))
```

```
psi_I012 = 3x1  
1.9670  
-1.5287  
0.7060
```

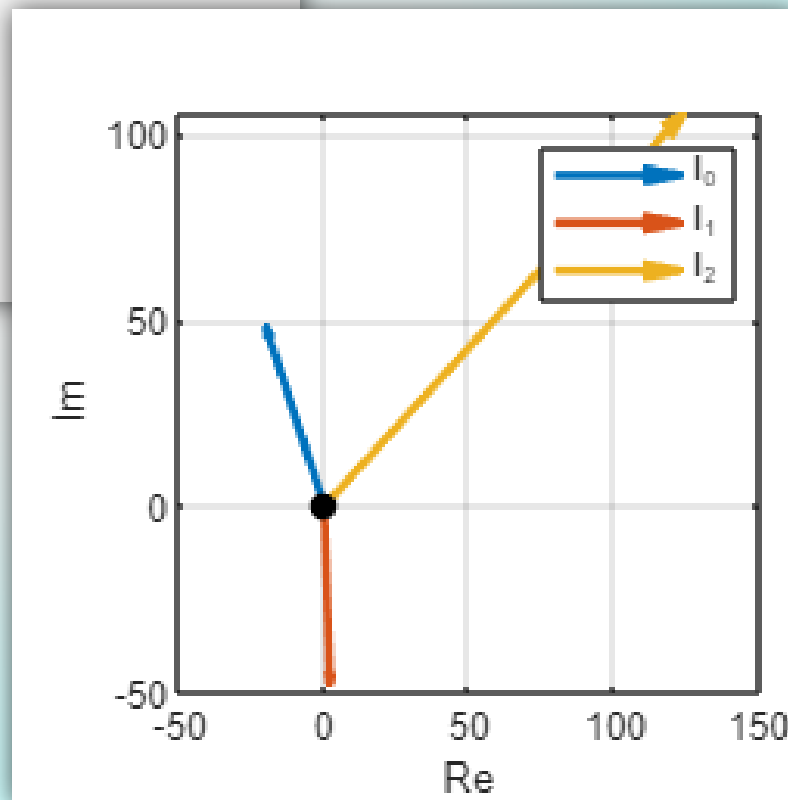
**double, rad2deg**

```
psi_I012_deg = rad2deg(psi_I012)
```

```
psi_I012_deg = 3x1  
112.7034  
-87.5867  
40.4521
```

# Фазорски дијаграм симетричних компоненти

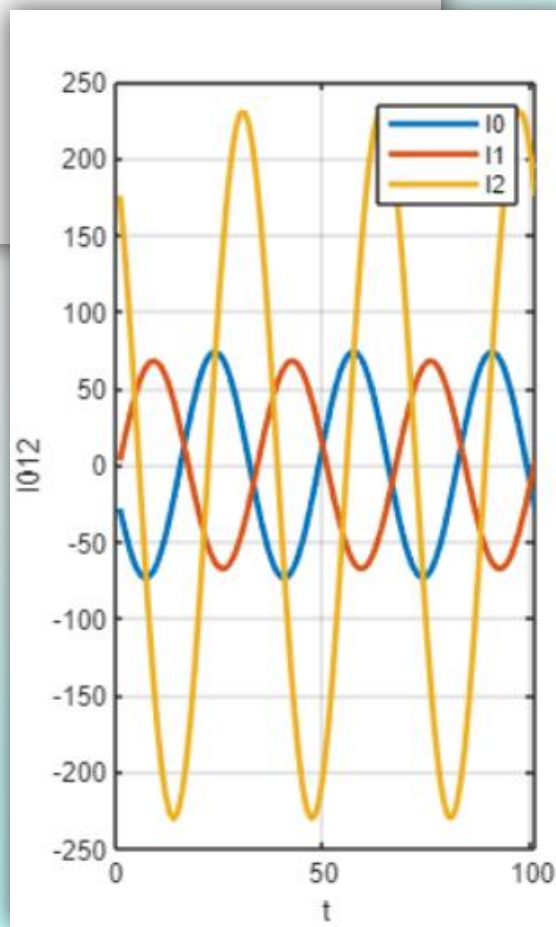
```
figure
subplot(121)
hold on
for n = 1:3
    quiver(0,0,real(I012(n)), imag(I012(n)),0, 'linewidth', 2)
end
plot(0,0, 'ko', 'MarkerFaceColor','k')
hold off
xlabel('Re')
ylabel('Im')
grid on
box on
axis equal square
legend('I_0', 'I_1', 'I_2')
```



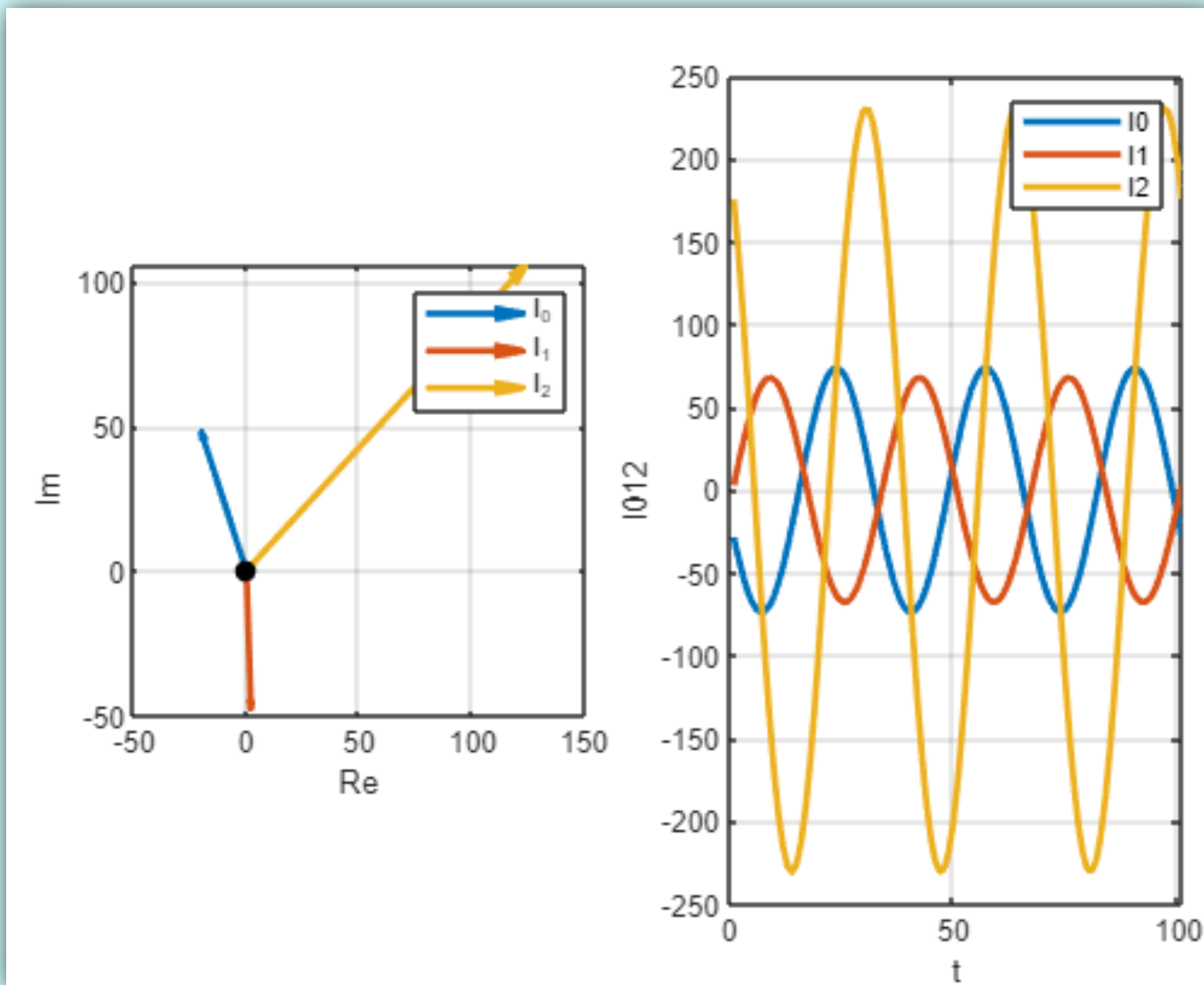


# Тренутне вредности симетричних компоненти

```
t = linspace(0,60e-3,101);  
f = 50;  
subplot(122)  
hold on  
for n = 1:3  
    plot(sqrt(2)*mag_I012(n)*cos(2*pi*f*t + psi_I012(n)), 'LineWidth', 2)  
end  
grid on  
box on  
xlabel('t')  
ylabel('I012')  
legend('I0', 'I1', 'I2')
```



# figure, subplot, plot



## Задатак (2)

У трофазном електричном колу је дошло до квара и одређене су симетричне компоненте трофазног система струја

$$\underline{I}_0 = 52\text{A} \angle 112^\circ, \underline{I}_1 = 48\text{A} \angle -88^\circ, \underline{I}_2 = 163\text{A} \angle 40^\circ.$$

- (a) Одредити трофазни систем струја.
- (б) Нацртати фазорски дијаграм трофазног система струја.
- (в) Одредити тренутне вредности трофазног система струја.

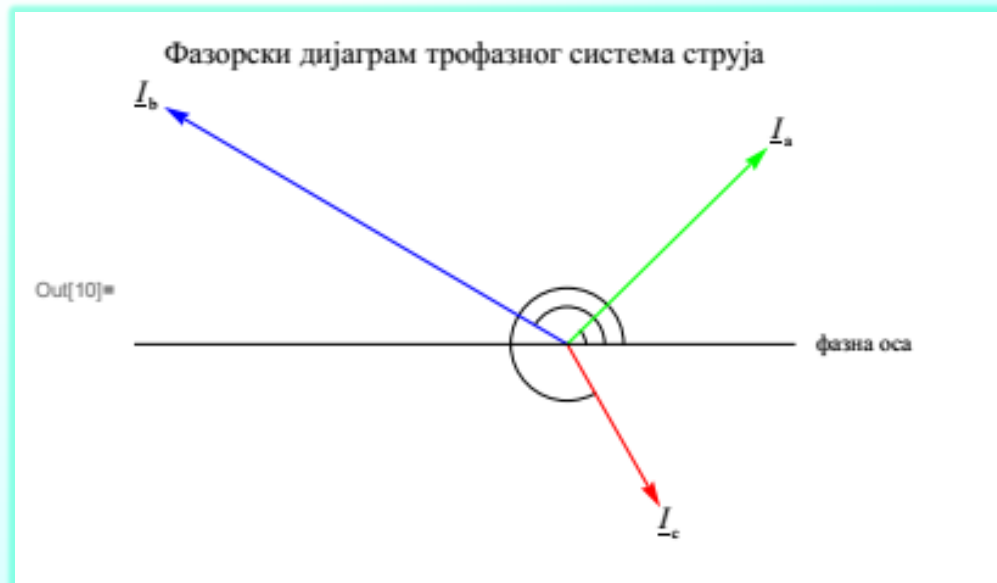
Учестаност је  $f = 50\text{Hz}$ .

# Трофазни систем струја

$$\mathbf{I}_{012} = \begin{bmatrix} 52e^{j112^\circ} \\ 48e^{-j88^\circ} \\ 163e^{j40^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = e^{\frac{2\pi}{3}j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{I}_{abc} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{012} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 52e^{j112^\circ} \\ 48e^{-j88^\circ} \\ 163e^{j40^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{abc} = \begin{pmatrix} 149.969 \angle 44.4479^\circ \\ 249.479 \angle 149.533^\circ \\ 100.002 \angle -60.3103^\circ \end{pmatrix}$$

# Тренутне вредности трофазног система струја

$$\mathbf{I}_{abc} = \begin{pmatrix} 149.969 \angle 44.4479^\circ \\ 249.479 \angle 149.533^\circ \\ 100.002 \angle -60.3103^\circ \end{pmatrix}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$i_a(t) = 149.969\sqrt{2} \cos(2\pi ft + 44.4479^\circ)$$

$$i_b(t) = 249.479\sqrt{2} \cos(2\pi ft + 149.533^\circ)$$

$$i_c(t) = 100.002\sqrt{2} \cos(2\pi ft - 60.3103^\circ)$$

# Трофазни систем струја

## Matrica [A]

```
syms a
A = [ [1, 1, 1]; [1, a^-1, a^-2]; [1, a, a^2] ]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

```
anum = exp(1i*2*pi/3)
```

```
anum = -0.5000 + 0.8660i
```

```
Anum = simplify(subs(A, a, anum))
```

$$Anum = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{abc} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{012}$$

## Trofazni sistem struja

```
I0 = 52*exp(1i*deg2rad(112));
I1 = 48*exp(1i*deg2rad(-88));
I2 = 163*exp(1i*deg2rad(40));
```

```
I012 = [I0; I1; I2];
Iabc = simplify(Anum*I012);
```

```
mag_Iabc = abs(double(Iabc));
psi_Iabc = angle(double(Iabc));
psi_Iabc_deg = rad2deg(psi_Iabc)
```

```
psi_Iabc_deg = 3x1
    44.4479
   149.5327
   -60.3103
```

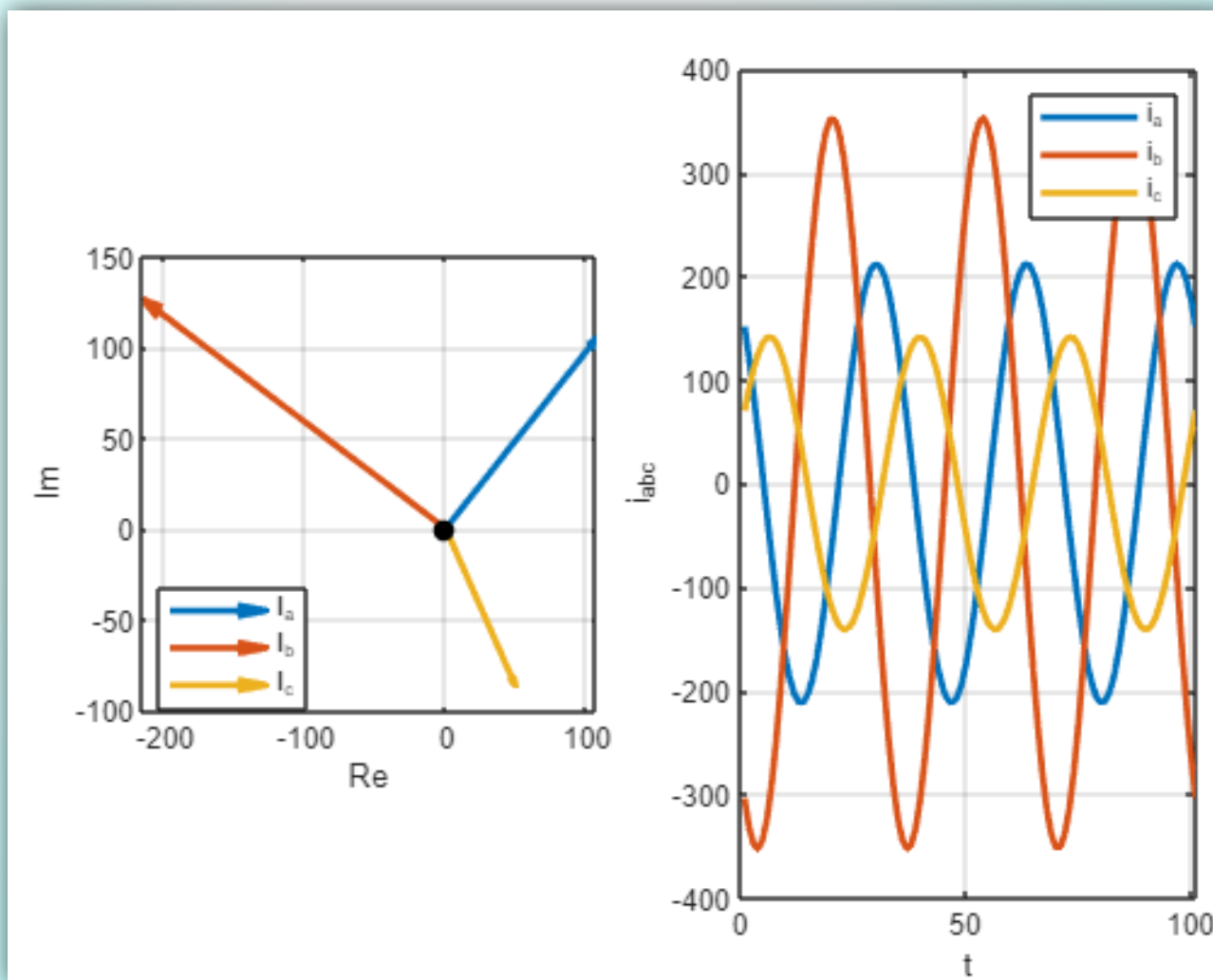
# Фазорски дијаграм и тренутне вредности трофазног система струја

## Crtanje fazora i trenutnih vrednosti trofaznog sistema struja

```
figure
subplot(121)
hold on
for n = 1:3
    quiver(0,0,real(Iabc(n)), imag(Iabc(n)),0, 'LineWidth', 2)
end
plot(0,0, 'ko', 'MarkerFaceColor','k')
hold off
xlabel('Re')
ylabel('Im')
grid on
box on
axis equal square
legend('I_a', 'I_b', 'I_c')
```

```
t = linspace(0,60e-3,101);
f = 50;
subplot(122)
hold on
for n = 1:3
    plot(sqrt(2)*mag_Iabc(n)*cos(2*pi*f*t + psi_Iabc(n)), 'LineWidth', 2)
end
grid on
box on
xlabel('t')
ylabel('i_{abc}')
legend('i_a', 'i_b', 'i_c')
```

# Фазорски дијаграм и тренутне вредности трофазног система струја





## Задатак (3)

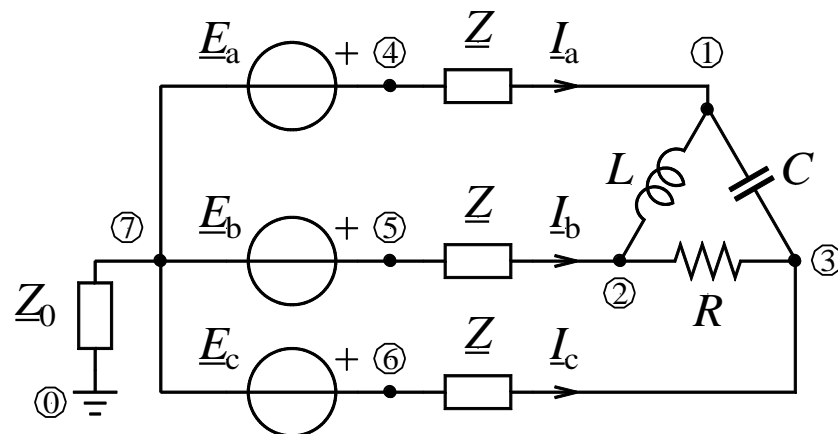
Вредности елемената трофазног електричног кола са слике су познате. Трофазни потрошач је повезан у троугао, а чине га отпорник, кондензатор и калем чији су параметри повезани изразима

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}R\omega}, \quad L = \frac{\sqrt{3}R}{\omega}.$$

Симетричан трофазни генератор је повезан у звезду, а његови напони чине директан симетричан трофазни систем напона  $\{e_a, e_b, e_c\}$  и  $e_a(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta)$ .

Одредити

- (5) симетричне компоненте трофазног система напона генератора,
- (5) симетричне компоненте трофазног система линијских струја, и
- (5) реактивну снагу потрошача.



# Симетричне компоненте трофазног система напона генератора

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}R\omega} \quad L = \frac{\sqrt{3}R}{\omega}$$

$$\underline{E}_a$$
$$\underline{E}_b = \underline{E}_a e^{-\frac{2\pi}{3}j}$$
$$\underline{E}_c = \underline{E}_a e^{-\frac{4\pi}{3}j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = e^{\frac{2\pi}{3}j}$$

$$\mathbf{E}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{E}_a \\ \underline{E}_b \\ \underline{E}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{E}_a \\ \underline{E}_b \\ \underline{E}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{012} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_a \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Симетричне компоненте трофазног система линијских струја

$$-\underline{I}_a + \frac{\underline{E}_a - \underline{V}_1}{\underline{Z}} = 0$$

$$-\underline{I}_b + \frac{\underline{E}_b - \underline{V}_2}{\underline{Z}} = 0$$

$$-\underline{I}_c + \frac{\underline{E}_c - \underline{V}_3}{\underline{Z}} = 0$$

$$\mathbf{I}_{abc} = \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix}$$

$$-\underline{I}_a + \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{j\omega L} + j\omega C (\underline{V}_1 - \underline{V}_3) = 0$$

$$-\underline{I}_b + \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_1}{j\omega L} + \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_3}{R} = 0$$

$$-\underline{I}_c + \frac{\underline{V}_3 - \underline{V}_2}{R} + j\omega C (\underline{V}_3 - \underline{V}_1) = 0$$

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{E}_a}{R + \underline{Z}}$$

$$\underline{I}_b = -\frac{(-1)^{1/3} \underline{E}_a}{R + \underline{Z}}$$

$$\underline{I}_c = \frac{j(j + \sqrt{3}) \underline{E}_a}{2(R + \underline{Z})}$$

$$\underline{V}_1 = \frac{\underline{E}_a R}{R + \underline{Z}}$$

$$\underline{V}_2 = -\frac{(-1)^{1/3} \underline{E}_a R}{R + \underline{Z}}$$

$$\underline{V}_3 = \frac{(-1)^{2/3} \underline{E}_a R}{R + \underline{Z}}$$

$$\mathbf{I}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{abc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{012} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\underline{E}_a}{R + \underline{Z}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Реактивна снага потрошача

$$\underline{E}_a = E_a e^{j\theta}$$

$$\underline{Z} = R_{\text{lin}} + jX_{\text{lin}}$$

$$\underline{S} = \frac{|\underline{V}_1 - \underline{V}_2|^2}{(j\omega L)^*} + \frac{|\underline{V}_2 - \underline{V}_3|^2}{(R)^*} + \frac{|\underline{V}_3 - \underline{V}_1|^2}{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)^*} = \frac{3E_a^2 R}{|\mathbf{R} + \mathbf{R}_{\text{lin}} + jX_{\text{lin}}|^2}$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$P = \frac{3E_a^2 R}{(\mathbf{R} + \mathbf{R}_{\text{lin}})^2 + X_{\text{lin}}^2}$$

$$Q = 0$$

$$Q = 0$$

# Матрица [A]

```
syms Ea Z omega a L R C
assume(Z~=0 & R>0 & L>0 & C>0 & omega>0 & Ea~=0)
```

```
w = omega
```

```
w = ω
```

## Matrica [A]

```
A = [ [1, 1, 1]; [1, a^-1, a^-2]; [1, a, a^2] ]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

```
anum = exp(1i*2*pi/3)
```

```
anum = -0.5000 + 0.8660i
```

```
Anum = simplify(subs(A, a, anum))
```

```
Anum =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}$$

## Trougao u zvezdu

```
Zpa = 1i*w*L * 1/(1i*w*C) / (R + 1i*w*L + 1/(1i*w*C));
Zpb = 1i*w*L * R / (R + 1i*w*L + 1/(1i*w*C));
Zpc = 1/(1i*w*C) * R / (R + 1i*w*L + 1/(1i*w*C));
```

```
ZpM = subs([Zpa 0 0; 0 Zpb 0; 0 0 Zpc], [L C], [sqrt(3)*R/w 1/(sqrt(3)*w*R)])
```

```
ZpM =
```

$$\begin{pmatrix} 3R & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}Ri & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}Ri \end{pmatrix}$$

## Simetricne komponente potrosaca

$$Z_{psM} = \text{simplify}((1/3) * \text{conj}(A_{num}) * Z_{pM} * A_{num})$$

$$Z_{psM} = \begin{pmatrix} R & 2R & 0 \\ 0 & R & 2R \\ 2R & 0 & R \end{pmatrix}$$

## Rešavanje kola

$$E_b = \text{simplify}(a_{num}^{-1} * E_a)$$

$$E_b = -E_a \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)$$

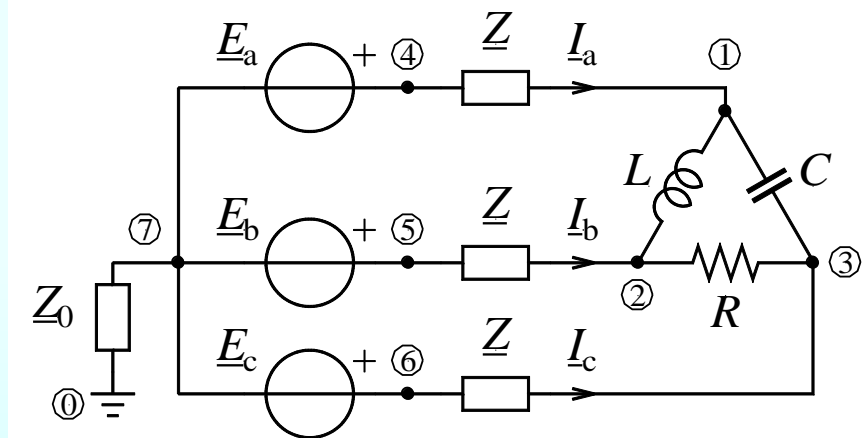
$$E_c = \text{simplify}(E_a / a_{num}^2)$$

$$E_c = \frac{E_a (-1 + \sqrt{3}i)}{2}$$

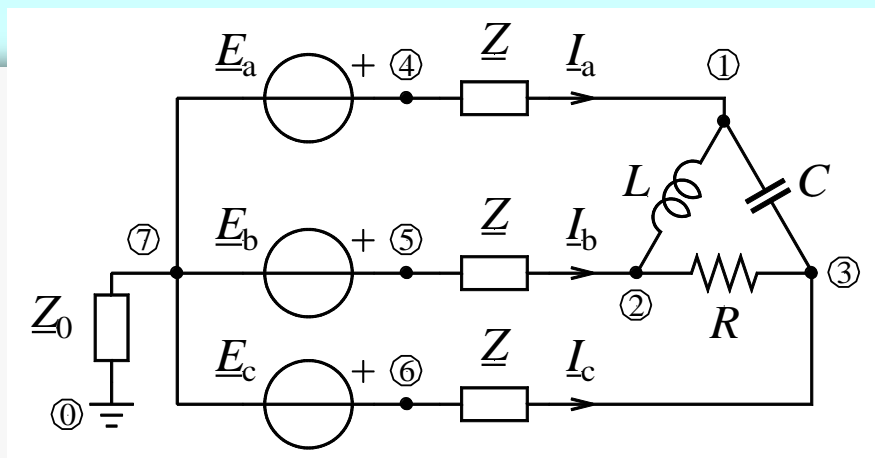
$$E_{abc} = [E_a; E_b; E_c]$$

$$E_{abc} = \begin{pmatrix} E_a \\ -E_a \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) \\ \frac{E_a (-1 + \sqrt{3}i)}{2} \end{pmatrix}$$

# Симетричне компоненте потрошача



# Вектор напона генератора



$$L = \sqrt{3} * R / \omega;$$

$$C = 1 / (\sqrt{3} * \omega * R);$$

% Једначине трофазног система 6x6

syms I<sub>a</sub> I<sub>b</sub> I<sub>c</sub> V<sub>1</sub> V<sub>2</sub> V<sub>3</sub>

$$\text{jednacine} = [-I_a + (E_a - V_1)/Z == 0, \dots$$

$$-I_b + (E_b - V_2)/Z == 0, \dots$$

$$-I_c + (E_c - V_3)/Z == 0, \dots$$

$$-I_a + (V_1 - V_2) / (1i * \omega * L) + 1i * \omega * C * (V_1 - V_3) == 0, \dots$$

$$-I_b + (V_2 - V_1) / (1i * \omega * L) + (V_2 - V_3) / R == 0, \dots$$

$$-I_c + (V_3 - V_2) / R + 1i * \omega * C * (V_3 - V_1) == 0]$$

promenljive = [I<sub>a</sub>, I<sub>b</sub>, I<sub>c</sub>, V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>]

promenljive = (I<sub>a</sub> I<sub>b</sub> I<sub>c</sub> V<sub>1</sub> V<sub>2</sub> V<sub>3</sub>)

resenje = solve(jednacine, promenljive)

resenje = struct with fields:

$$I_a: E_a / (R + Z)$$

$$I_b: -(E_a * (6 * R * Z + 3^{1/2} * R^2 * 3i + 3^{1/2} * Z^2 * 1i + 3 * R^2 + Z^2 + 3^{1/2} * R * Z * 2i)) / (2 * (R + Z) * (3 * R * Z + 3 * R^2 + Z^2 - 3^{1/2} * R * Z * 1i))$$

$$I_c: (E_a * (-1 + 3^{1/2} * 1i) * 1i) / (2 * (R * 1i + Z * 1i))$$

$$V_1: (E_a * R * 1i) / (R * 1i + Z * 1i)$$

$$V_2: -(E_a * R * (6 * R * Z + 3^{1/2} * R^2 * 3i + 3^{1/2} * Z^2 * 1i + 3 * R^2 + Z^2 + 3^{1/2} * R * Z * 2i)) / (2 * (R + Z) * (3 * R * Z + 3 * R^2 + Z^2 - 3^{1/2} * R * Z * 1i))$$

$$V_3: -(E_a * (R - 3^{1/2} * R * 1i) * 1i) / (2 * (R * 1i + Z * 1i))$$

Решавање система  
једначина

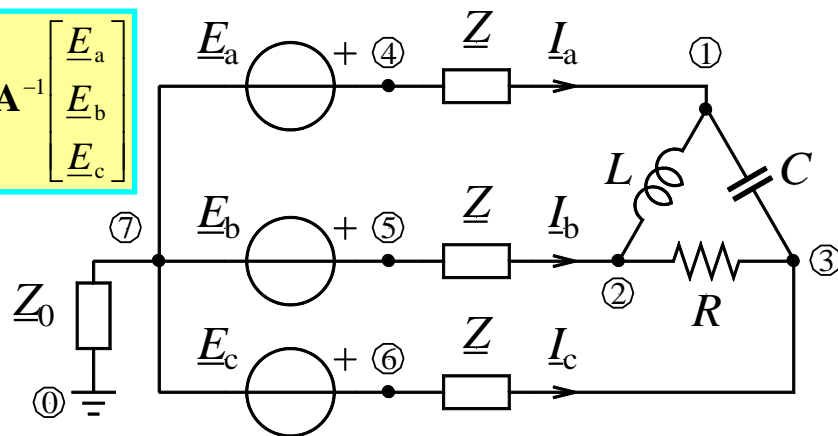
## Симетричне компоненте

```
% Симетричне компоненте напона генератора
E012 = simplify((1/3)*conj(Anum) * Eabc)
```

$$\mathbf{E}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{E}_a \\ \underline{E}_b \\ \underline{E}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{012} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Симетричне компоненте  
генератора



```
V1_simp = simplifyFraction( resenje.V1);
V2_simp = simplifyFraction( resenje.V2);
V3_simp = simplifyFraction( resenje.V3);
```

```
V123 = [V1_simp; V2_simp; V2_simp] % вектор potencijala potrošača
```

$$\mathbf{V}_{123} = \begin{pmatrix} \frac{E_a R}{R + Z} \\ \sigma_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = -\frac{E_a R (6 R Z + 3 \sqrt{3} R^2 i + \sqrt{3} Z^2 i + 3 R^2 + Z^2 + 2 \sqrt{3} R Z i)}{2 (R + Z) (3 R Z + 3 R^2 + Z^2 - \sqrt{3} R Z i)}$$

```
U12 = simplify(resenje.V1-resenje.V2);
U23 = simplify(resenje.V2-resenje.V3);
U31 = simplify(resenje.V3-resenje.V1);
```

```
Upp012 = simplify( (1/3)*conj(Anum)*[U12; U23; U31] )
```

$$\mathbf{U}_{pp012} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_a R (3 + \sqrt{3} i)}{2 (R + Z)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Симетричне компоненте  
линијских напона



# Симетричне компоненте трофазног система линијских струја

```
Iabc = simplifyFraction([resenje.Ia; resenje.Ib; resenje.Ic])
```

Iabc =

$$\begin{pmatrix} \frac{E_a}{R + Z} \\ -\frac{E_a (6 R Z + 3 \sqrt{3} R^2 i + \sqrt{3} Z^2 i + 3 R^2 + Z^2 + 2 \sqrt{3} R Z i)}{2 (R + Z) (3 R Z + 3 R^2 + Z^2 - \sqrt{3} R Z i)} \\ \frac{E_a (-1 + \sqrt{3} i) i}{2 (R i + Z i)} \end{pmatrix}$$

```
% Simetricne komponente struja
```

```
I012 = simplify( (1/3)*conj(Anum)*Iabc )
```

$$\mathbf{I}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{abc}$$

I012 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_a}{R + Z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Активна и реактивна снага потрошача

## Aktivna i reaktivna snaga

```
syms R_l X_l E
assume(R_l>0 & E>0)
assume(X_l, 'real')
S = simplify( subs( sum(abs([U12 U23 U31]).^2 ./ conj([1i*w*L R 1/(1i*w*C)])), [Z, Ea], [R_l+1i*X_l, E]) )
```

$$S = \frac{3E^2 R}{(R + R_l)^2 + X_l^2}$$

```
P = simplify( real(S))
```

$$P = \frac{3E^2 R}{(R + R_l)^2 + X_l^2}$$

```
Q = simplify( imag(S) )
```

$$Q = 0$$

$$\underline{S} = \frac{|V_1 - V_2|^2}{(j\omega L)^*} + \frac{|V_2 - V_3|^2}{(R)^*} + \frac{|V_3 - V_1|^2}{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)^*} = \frac{3E_a^2 R}{|R + R_{lin} + jX_{lin}|^2}$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$P = \frac{3E_a^2 R}{(R + R_{lin})^2 + X_{lin}^2}$$

$$Q = 0$$

## Задатак (4)

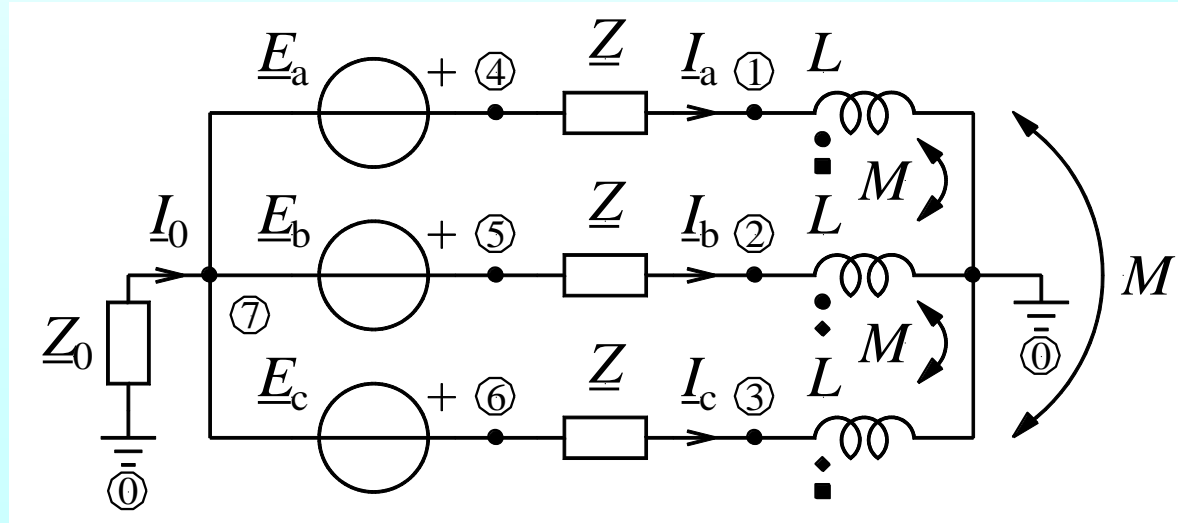
Вредности елемената трофазног електричног кола са слике су познате.

Трофазни потрошач је повезан у звезду, а чине га три спрегнута калема сопствених индуктивности  $L$  и међусобних индуктивности  $M$ .

Симетричан трофазни генератор је повезан у звезду, а његови напони чине инверзан симетричан трофазни систем напона  $\{e_a, e_b, e_c\}$  и  $e_a = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \theta)$ .

Одредити

- (5) симетричне компоненте трофазног система напона генератора,
- (5) симетричне компоненте трофазног система линијских струја, и
- (5) симетричне компоненте импеданси потрошача.



# Симетричне компоненте трофазног система напона генератора

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = e^{\frac{2\pi}{3}j}$$

$$\underline{E}_a$$

$$\underline{E}_b = \underline{E}_a e^{\frac{2\pi}{3}j}$$

$$\underline{E}_c = \underline{E}_a e^{\frac{4\pi}{3}j}$$

$$\mathbf{E}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{E}_a \\ \underline{E}_b \\ \underline{E}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{E}_a \\ \underline{E}_b \\ \underline{E}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{012} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E}_a \end{pmatrix}$$

# Једначине... Линијске струје...

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c$$

$$\underline{E}_a = \underline{Z}\underline{I}_a + \underline{U}_1 + \underline{Z}_0\underline{I}_0$$

$$\underline{E}_b = \underline{Z}\underline{I}_b + \underline{U}_2 + \underline{Z}_0\underline{I}_0$$

$$\underline{E}_c = \underline{Z}\underline{I}_c + \underline{U}_3 + \underline{Z}_0\underline{I}_0$$

$$\underline{U}_1 = j\omega L\underline{I}_a + j\omega M\underline{I}_b + j\omega M\underline{I}_c$$

$$\underline{U}_2 = j\omega M\underline{I}_a + j\omega L\underline{I}_b + j\omega M\underline{I}_c$$

$$\underline{U}_3 = j\omega M\underline{I}_a + j\omega M\underline{I}_b + j\omega L\underline{I}_c$$



$$\underline{I}_0 = 0$$

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{E}_a}{\underline{Z} + j(L - M)\omega}$$

$$\underline{I}_b = \frac{j(j + \sqrt{3})\underline{E}_a}{2(\underline{Z} + j(L - M)\omega)}$$

$$\underline{I}_c = -\frac{(-1)^{1/3}\underline{E}_a}{\underline{Z} + j(L - M)\omega}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{E}_a(L - M)\omega}{-j\underline{Z} + (L - M)\omega}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{j(j + \sqrt{3})\underline{E}_a(L - M)\omega}{-2j\underline{Z} + 2(L - M)\omega}$$

$$\underline{U}_3 = -\frac{(-1)^{1/3}\underline{E}_a(L - M)\omega}{-j\underline{Z} + (L - M)\omega}$$

# Симетричне компоненте трофазног система линијских струја

$$\mathbf{I}_{abc} = \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{E}_a}{\underline{Z} + j(L-M)\omega} \\ \frac{j(j + \sqrt{3})\underline{E}_a}{2(\underline{Z} + j(L-M)\omega)} \\ -\frac{(-1)^{1/3}\underline{E}_a}{\underline{Z} + j(L-M)\omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{012} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}_{abc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^{-1} & \underline{a}^{-2} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{012} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\underline{E}_a}{i(L-M)\omega + \underline{Z}} \end{pmatrix}$$

# Симетричне компоненте импеданси потрошача

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} j\omega L & j\omega M & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L & j\omega M \\ j\omega M & j\omega M & j\omega L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{Z}_s = \begin{pmatrix} i(L + 2M)\omega & 0 & 0 \\ 0 & i(L - M)\omega & 0 \\ 0 & 0 & i(L - M)\omega \end{pmatrix}$$

```
syms Ea Z omega a L Z M
assume(Z~=0 & L>0 & omega>0 & Ea~=0)
w = omega
```

$w = \omega$

### Matrica [A]

```
A = [ [1, 1, 1]; [1, a^-1, a^-2]; [1, a, a^2] ];
anum = exp(1i*2*pi/3);
Anum = simplify(subs(A, a, anum));
```

### Simetricne komponente generatora

```
% Inverzni sistem
Eb = simplify(anum * Ea);
Ec = simplify(Ea*anum^2);
Eabc = [Ea; Eb; Ec];
E012 = simplify((1/3)*conj(Anum) * Eabc)
```

$E_{012} =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Ea \end{pmatrix}$$

# Симетричне компоненте трофазног система напона генератора



# Симетричне компоненте трофазног потрошача

## Simetricne komponente potrosaca

$$Z_{pM} = 1i*w*[L \ M \ M; \ M \ L \ M; \ M \ M \ L]$$

$Z_{pM} =$

$$\begin{pmatrix} L\omega i & M\omega i & M\omega i \\ M\omega i & L\omega i & M\omega i \\ M\omega i & M\omega i & L\omega i \end{pmatrix}$$

$$Z_{psM} = \text{simplify}((1/3)*\text{conj}(A_{num})*Z_{pM} *A_{num})$$

$Z_{psM} =$

$$\begin{pmatrix} \omega(Li + 2Mi) & 0 & 0 \\ 0 & \omega(Li - Mi) & 0 \\ 0 & 0 & \omega(Li - Mi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}$$

## Rešavanje kola

```
% Jednacine trofaznog sistema 6x6
syms Ia Ib Ic V1 V2 V3 I0 Z0
```

```
jednacine = [I0 == Ia + Ib + Ic, ...
             Ea == Z*Ia + V1 + Z0*I0, ...
             Eb == Z*Ib + V2 + Z0*I0, ...
             Ec == Z*Ic + V3 + Z0*I0, ...
             V1 == 1i*w*L*Ia + 1i*w*M*Ib + 1i*w*M*Ic, ...
             V2 == 1i*w*M*Ia + 1i*w*L*Ib + 1i*w*M*Ic, ...
             V3 == 1i*w*M*Ia + 1i*w*M*Ib + 1i*w*L*Ic];
promenljive = [I0 Ia, Ib, Ic, V1, V2, V3]
```

promenljive = ( $I_0$  Ia Ib Ic  $V_1$   $V_2$   $V_3$ )

```
resenje = solve(jednacine, promenljive)
```

resenje = *struct with fields:*

I0: 0

Ia:  $Ea / (Z + L \cdot \omega \cdot 1i - M \cdot \omega \cdot 1i)$

Ib:  $-(3^{1/2} \cdot Ea + Ea \cdot 1i) / (2 \cdot (M \cdot \omega - L \cdot \omega + Z \cdot 1i))$

Ic:  $-(-3^{1/2} \cdot Ea + Ea \cdot 1i) / (2 \cdot (M \cdot \omega - L \cdot \omega + Z \cdot 1i))$

V1:  $-(Ea \cdot \omega \cdot (2 \cdot L - 2 \cdot M)) / (2 \cdot (M \cdot \omega - L \cdot \omega + Z \cdot 1i))$

V2:  $(Ea \cdot \omega \cdot (L - M - 3^{1/2} \cdot L \cdot 1i + 3^{1/2} \cdot M \cdot 1i)) / (2 \cdot (M \cdot \omega - L \cdot \omega + Z \cdot 1i))$

V3:  $-(Ea \cdot \omega \cdot (L - M + 3^{1/2} \cdot L \cdot 1i - 3^{1/2} \cdot M \cdot 1i) \cdot 1i) / (2 \cdot (Z + L \cdot \omega \cdot 1i - M \cdot \omega \cdot 1i))$

# Једначине

$$\underline{I}_0 = 0$$

```
Iabc = [resenje.Ia; resenje.Ib; resenje.Ic]
```

Iabc =

$$\begin{pmatrix} \frac{E_a}{Z + L\omega i - M\omega i} \\ -\frac{\sqrt{3} E_a + E_a i}{2 (M\omega - L\omega + Z i)} \\ -\frac{-\sqrt{3} E_a + E_a i}{2 (M\omega - L\omega + Z i)} \end{pmatrix}$$

# Трофазни систем линијских струја

## Simetrične komponente struja

```
I012 = simplify( (1/3)*conj(Anum)*Iabc )
```

I012 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_a}{Z + L\omega i - M\omega i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}_{abc}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_a &= \frac{\underline{E}_a}{\underline{Z} + j(L - M)\omega} \\ \underline{I}_b &= \frac{j(j + \sqrt{3})\underline{E}_a}{2(\underline{Z} + j(L - M)\omega)} \\ \underline{I}_c &= -\frac{(-1)^{1/3}\underline{E}_a}{\underline{Z} + j(L - M)\omega} \end{aligned}$$