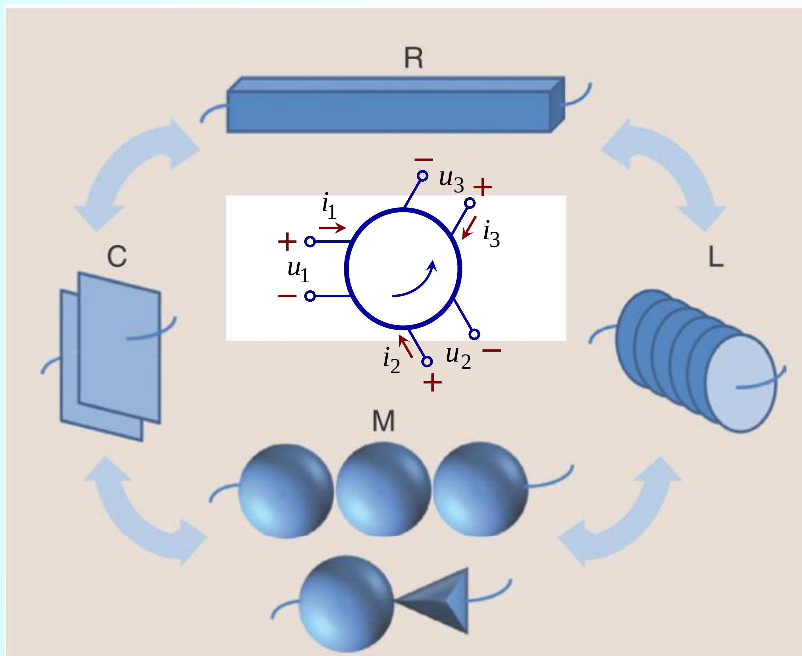
Рачунарска анализа електричних кола



Милка Потребић

Налажење одзива ел. кола коришћењем **Лапласове трансформације**

$$\underline{U}(\underline{s}) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-\underline{s}t}\,\mathrm{d}t$$

$$u(t) = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} \underline{U}(\underline{s})\,\mathrm{e}^{\underline{s}t}\,\mathrm{d}s$$

$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-a\,t}$	$\frac{1}{a+s}$
$\sin(b\,t)$	$\frac{b}{b^2+s^2}$
$\cos(b\,t)$	$\frac{s}{b^2+s^2}$

Одзив на побуду и сакупљену енергију

Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

Побуда (екситација, стимулус, инпут) је

$u_g(t) = U_m \sin(\omega t)\,\vartheta(t)$.

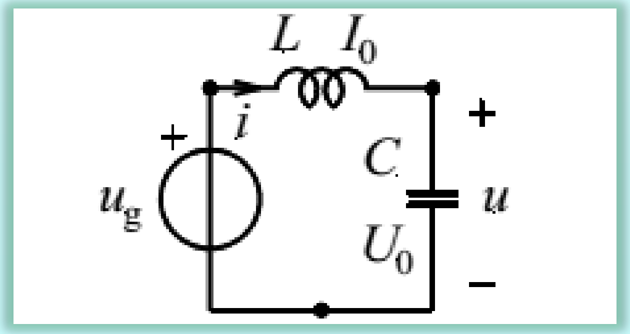
$\vartheta(t)$ је јединична одскочна функција (Хевисајдова функција) која се обележава и са $h(t)$.

Почетна струја калема и почетни напон кондензатора су

$i(t_0^-) = I_0,\ u(t_0^-) = U_0,\ t_0 = 0$.

Постоји веза параметара

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} .$$



Одредити напон кондензатора u и нацртати његов график у функцији времена за $t > t_0$.

Једначине, одзив,... у комплексном домену

```
w:=`&omega;`
```

$$\omega$$

```
C:=1/(L*w^2)
```

$$\frac{1}{\omega^2\, L}$$

```
Ug:=laplace(Um*sin(w*t), t, s)
```

$$\frac{\omega\, \mathrm{Um}}{\omega^2 + s^2}$$

```
jednacine:={Ug=L*(s*IL-I0)+UC, IL=C*(-U0+s*UC)}
```

$$\left\{\mathrm{IL} = -\frac{\mathrm{U0} - \mathrm{UC}\, s}{\omega^2\, L}, \frac{\omega\, \mathrm{Um}}{\omega^2 + s^2} = \mathrm{UC} - L\, (\mathrm{I0} - \mathrm{IL}\, s)\right\}$$

```
odziv:=solve(jednacine, [UC, IL])
```

$$\left\{\left[\mathrm{UC} = \frac{\mathrm{I0}\, L\, \omega^4 + \mathrm{Um}\, \omega^3 + \mathrm{I0}\, L\, \omega^2\, s^2 + \mathrm{U0}\, \omega^2\, s + \mathrm{U0}\, s^3}{\sigma_1}, \mathrm{IL} = \frac{\mathrm{I0}\, L\, \omega^2\, s - \mathrm{U0}\, \omega^2 + \mathrm{Um}\, \omega\, s + \mathrm{I0}\, L\, s^3 - \mathrm{U0}\, s^2}{L\, \sigma_1}\right]\right\}$$

where

$$\sigma_1 = (\omega^2 + s^2)^2$$

laplace, solve…

MATLAB: MuPAD

Одзив у временском домену

UC | odziv

$$\frac{I0\,L\,\omega^4 + Um\,\omega^3 + I0\,L\,\omega^2\,s^2 + U0\,\omega^2\,s + U0\,s^3}{(\omega^2 + s^2)^2}$$

uC(t):=ilaplace(UC | odziv, s, t)

$$U0\cos(\omega\,t) + \frac{Um\,(\sin(\omega\,t) - \omega\,t\cos(\omega\,t))}{2} + \omega\,I0\,L\sin(\omega\,t)$$

vrednosti:={I0=0.2, L=0.1, U0=2, Um=1, w=2*PI*50}

$$\{I0 = 0.2,\ L = 0.1,\ \omega = 100\,\pi,\ U0 = 2,\ Um = 1\}$$

uC(t) | vrednosti

$$2\cos(100\,\pi\,t) + \frac{\sin(100\,\pi\,t)}{2} + 2.0\,\pi\sin(100\,\pi\,t) - 50\,\pi\,t\cos(100\,\pi\,t)$$

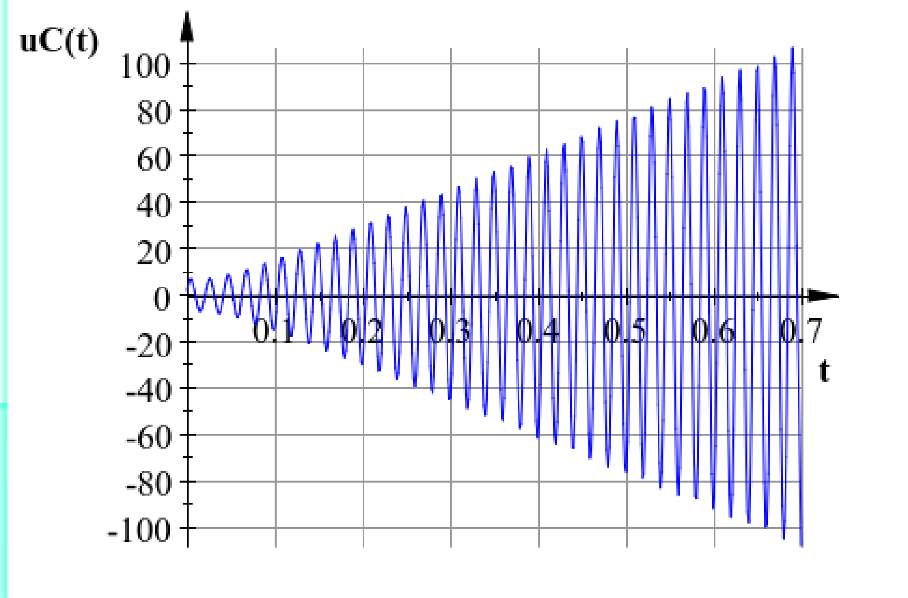
```
plotfunc2d(uC(t) | vrednosti, t=0..0.7,
    Scaling=Automatic,

    AxesTitles =["t", "uC(t)"],
    AxesTitleFont =["Times New Roman", 14, Bold],

    GridVisible = TRUE,

    TicksLabelFont = ["Times New Roman", 14])
```

ilaplace, plotfunc2d



MATLAB: MuPAD

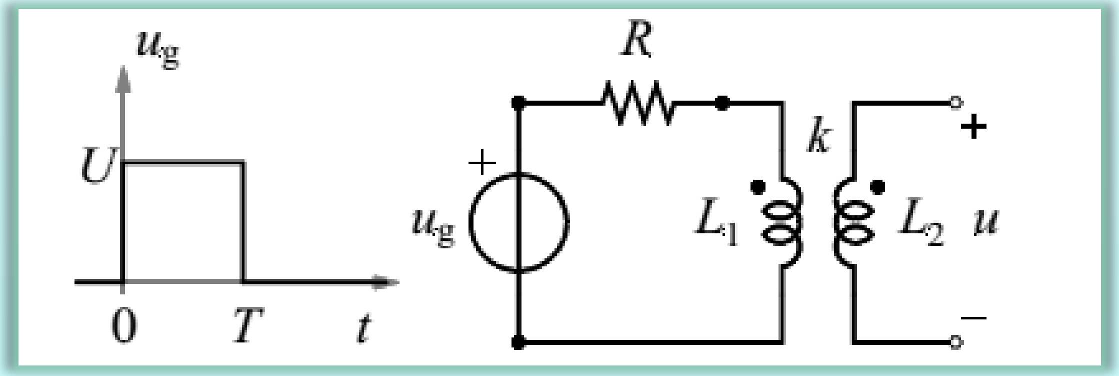
Одзив на побуду у облику правоугаоног импулса

Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

(а) Одредити једначину одзива за напон $u(t)$.

(б) Одредити напон $u(t)$ ако је $L_1 = L$, $L_2 = 4L$, $k = \dfrac{1}{2}$, ако је побуда описана графиком са слике и ако постоји веза $L = RT$.

(в) Нацртати график одређеног напона у функцији времена.



Једначине, одзив,... у комплексном домену

```
assume(R>0 and L1>0 and L12>0 and L2>0 and Ug<>0 and T>0)
```

```
jednacine:={Ug=R*I1 +U1, U1=L1*s*I1+L12*s*I2, U2=L12*s*I1+L2*s*I2, I2=0}|L12=k*sqrt(L1*L2)
```

$$\{U1 = I1\ L1\ s + I2\ \sqrt{L1}\ \sqrt{L2}\ k\ s,\ U2 = I2\ L2\ s + I1\ \sqrt{L1}\ \sqrt{L2}\ k\ s,\ Ug = U1 + I1\ R,\ I2 = 0\}$$

```
zamena:={L1=L, L2=4*L, k=1/2,
Ug=laplace(U*(heaviside(t)-heaviside(t-T)), t, s)}|{L=R*T}
```

$$\left\{L1 = R\ T,\ L2 = 4\ R\ T,\ Ug = -U\left(\frac{e^{-T\,s}}{s} - \frac{1}{s}\right),\ k = \frac{1}{2}\right\}$$

```
odziv:=solve(jednacine, [I1, I2, U1, U2])
```

$$\begin{cases} \emptyset & \text{if } R + L1\ s = 0 \\ \left\{\left[I1 = \frac{Ug}{R + L1\ s},\ I2 = 0,\ U1 = \frac{L1\ Ug\ s}{R + L1\ s},\ U2 = \frac{\sqrt{L1}\ \sqrt{L2}\ Ug\ k\ s}{R + L1\ s}\right]\right\} & \text{if } R + L1\ s \neq 0 \end{cases}$$

```
U2|odziv[2]
```

$$\frac{\sqrt{L1}\ \sqrt{L2}\ Ug\ k\ s}{R + L1\ s}$$

```
U2_zamena:=simplify((U2|odziv[2]) | zamena)
```

$$-\frac{T\ U\left(e^{-T\,s} - 1\right)}{T\ s + 1}$$

MATLAB: MuPAD

Одзив у временском домену

```
U2_zamena:=simplify((U2|odziv[2]) | zamena)
```

$$-\frac{T\,U\,\left(e^{-T\,s}-1\right)}{T\,s+1}$$

```
u2(t):=ilaplace(U2_zamena, s, t)
```

$$U\,e^{-\frac{t}{T}} - U\,e^{\frac{T-t}{T}}\,\mathrm{heaviside}(t-T)$$

```
vrednosti:={U=1, T=1}
```

$$\{T=1,\ U=1\}$$

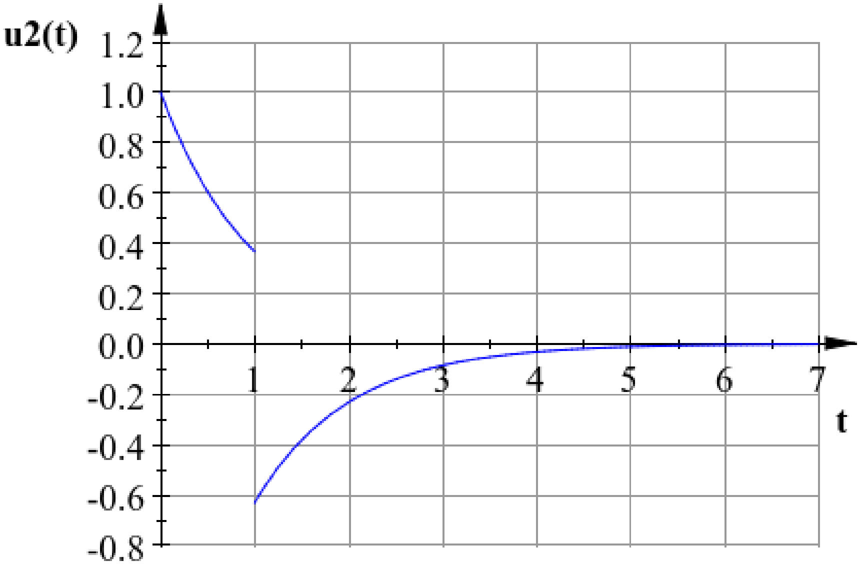
```
u2(t) | vrednosti
```

$$e^{-t} - \mathrm{heaviside}(t-1)\,e^{1-t}$$

```
plotfunc2d(u2(t) | vrednosti, t=0..7,
   YRange = -0.8 .. 1.2,
   GridVisible = TRUE,

   AxesTitles =["t", "u2(t)"],
   AxesTitleFont =["Times New Roman", 14, Bold],

   TicksLabelFont = ["Times New Roman", 14])
```



MATLAB: MuPAD

Одзив на сакупљену енергију

Задатак 1

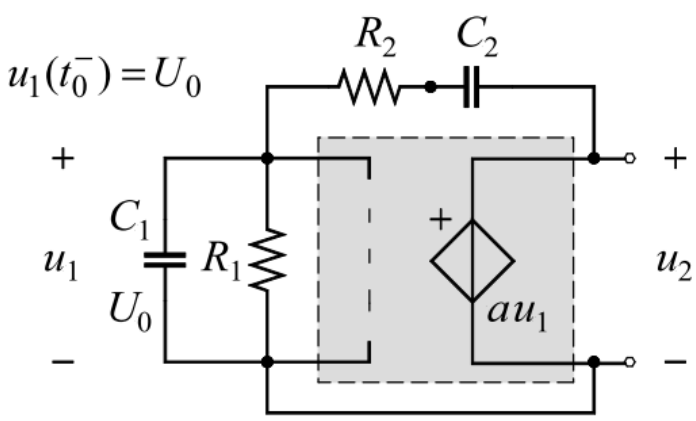
Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

$R_1 = R_2 = R$, $a = 3$, $C_1 = C_2 = C$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику.

(5) Одредити напон u_2 за $t > t_0$.

(5) Нацртати график u_2 у функцији времена за $t > t_0$.



Једначине стања у матричном облику су

Напон u_2 за $t > t_0$ је

График u_2 у функцији времена за $t > t_0$ је

Једначине у комплексном домену

```
assume(R1>0 and R2>0 and C1>0 and C2>0 and U0>0 and a>0)
zamene:={R1=R, R2=R, C1=C, C2=C, a=3}
```

$$\{R1 = R, R2 = R, a = 3, C1 = C, C2 = C\}$$

```
vrednosti:={R=1, C=1, U0=10}
```

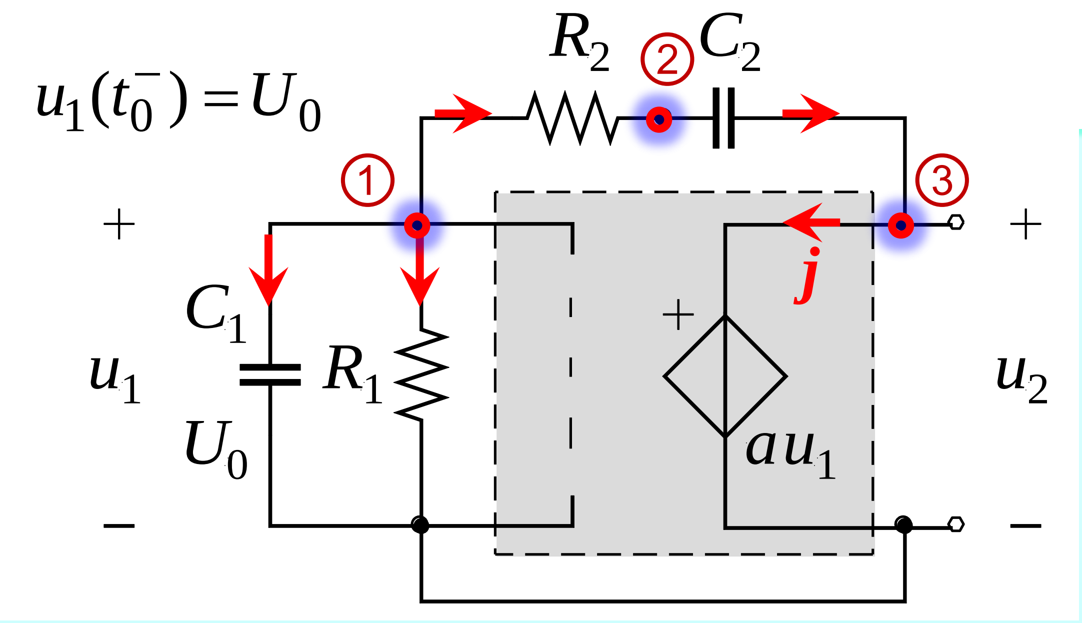
$$\{C = 1, R = 1, U0 = 10\}$$

```
jednacine:={C1*(s*U1-U0)+U1/R1+(U1-V2)/R2=0,
-(U1-V2)/R2+C2*s*(V2-U2)=0,
J-C2*s*(V2-U2)=0,
U2=a*U1}| zamene
```

$$\left\{\frac{U1}{R} + \frac{U1 - V2}{R} - C\,(U0 - U1\,s) = 0,\ U2 = 3\,U1,\ J + C\,s\,(U2 - V2) = 0,\ -\frac{U1 - V2}{R} - C\,s\,(U2 - V2) = 0\right\}$$

```
promenljive:={U1, V2, U2, J}
```

$$\{J, U1, U2, V2\}$$



MATLAB: MuPAD

Одзив у временском домену

```
odziv:=solve(jednacine, promenljive)
```

$$\begin{cases} \left\{\left[J = \frac{3\,C\,U0}{5},\ U1 = \frac{3\,C\,R\,U0}{5},\ U2 = \frac{9\,C\,R\,U0}{5},\ V2 = 0\right]\right\} & \text{if } C\,R\,s = -\frac{1}{3} \\ \emptyset & \text{if } \sigma_1 = -1 \\ \left\{\left[J = -\frac{2\,C^2\,R\,U0\,s}{\sigma_1+1},\ U1 = \frac{C\,R\,U0\,\sigma_2}{\sigma_1+1},\ U2 = \frac{3\,C\,R\,U0\,\sigma_2}{\sigma_1+1},\ V2 = \frac{C\,R\,U0\,(3\,C\,R\,s+1)}{\sigma_1+1}\right]\right\} & \text{if } C\,R\,s \neq -\frac{1}{3} \wedge \sigma_1 \neq -1 \end{cases}$$

where

$$\sigma_1 = C^2\,R^2\,s^2$$

$$\sigma_2 = C\,R\,s + 1$$

```
U2 | odziv[3]
```

$$\frac{3\,C\,R\,U0\,(C\,R\,s+1)}{C^2\,R^2\,s^2+1}$$

```
u2(t):=ilaplace(U2 | odziv[3], s, t)
```

$$3\,U0\cos\left(\frac{t}{C\,R}\right) + 3\,U0\sin\left(\frac{t}{C\,R}\right)$$

```
Simplify(u2(t))
```

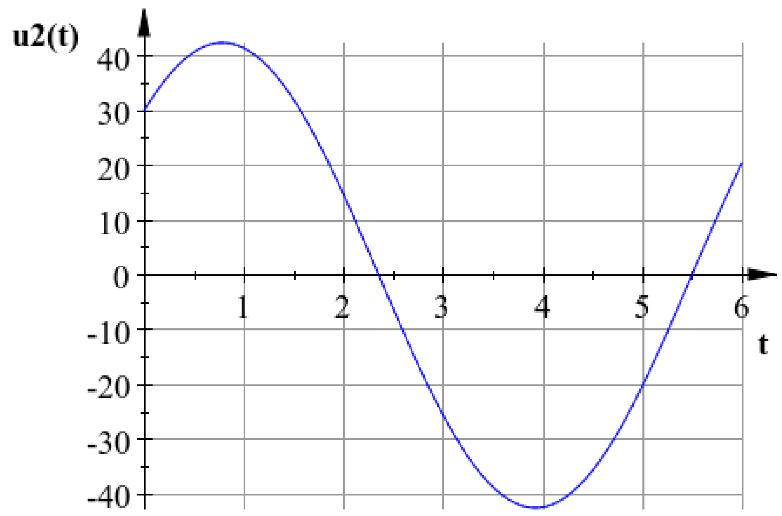
$$3\sqrt{2}\,U0\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{C\,R}\right)$$

```
plotfunc2d(u2(t) | vrednosti, t=0..6,
      Scaling=Automatic,

      AxesTitles =["t", "u2(t)"],
      AxesTitleFont =["Times New Roman", 14, Bold],

      GridVisible = TRUE,

      TicksLabelFont = ["Times New Roman", 14])
```



MATLAB: MuPAD

Одзив на троугаони импулс

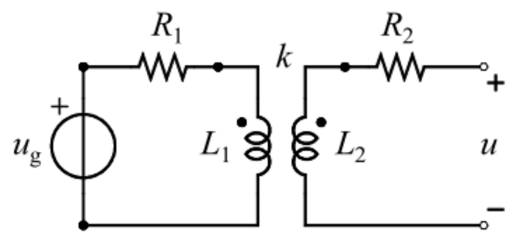
Задатак 2

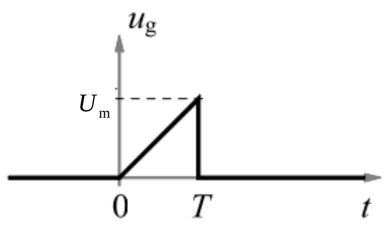
Параметри електричног кола са слике су познати. Побуда је дата на слици, $T = L/R$, $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $L_1 = L$, $L_2 = 4L$, $k = 1/2$.

(5) Одредити индициону функцију за напон отвореног секундара (одскочни одзив).

(5) Одредити напон отвореног секундара и

(5) нацртати његов график. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.





Индициона функција (одскочни одзив) је

Напон отвореног секундара је

График напона отвореног секундара је

Једначине, одзив,... у комплексном домену

```
assume(R1>0 and R2>0 and R>0 and L1>0 and L2>0 and L12>0 and L>0 and T>0 and Ug<>0)
zamene:={R1=R, R2=2*R, L1=L, L2=4*L, k=1/2, T=L/R}
```

$$\left\{\mathrm{R1} = R,\ T = \frac{L}{R},\ \mathrm{L2} = 4\,L,\ \mathrm{R2} = 2\,R,\ k = \frac{1}{2},\ \mathrm{L1} = L\right\}$$

```
vrednosti:={R=1, L=1, T=1, U_m=1}
```

$$\{L = 1,\ R = 1,\ T = 1,\ U_m = 1\}$$

```
jednacine:={Ug=R1*I1+L1*s*I1+L12*s*I2, U=R2*I2+L12*s*I1+L2*s*I2, I2=0}|
{L12=k*sqrt(L1*L2)} | zamene
```

$$\left\{U = 2\,\mathrm{I2}\,R + 4\,\mathrm{I2}\,L\,s + \frac{\mathrm{I1}\,\sqrt{L}\,s\,\sqrt{4\,L}}{2},\ \mathrm{Ug} = \mathrm{I1}\,R + \mathrm{I1}\,L\,s + \frac{\mathrm{I2}\,\sqrt{L}\,s\,\sqrt{4\,L}}{2},\ \mathrm{I2} = 0\right\}$$

```
promenljive:={I1, I2, U}
```

$$\{\mathrm{I1},\ \mathrm{I2},\ U\}$$

```
odziv:=solve(jednacine, promenljive)
```

$$\begin{cases} \emptyset & \text{if } R + L\,s = 0 \\ \left\{\left[\mathrm{I1} = \frac{\mathrm{Ug}}{R + L\,s},\ \mathrm{I2} = 0,\ U = \frac{\sqrt{L}\,\mathrm{Ug}\,s\,\sqrt{4\,L}}{2\,(R + L\,s)}\right]\right\} & \text{if } R + L\,s \neq 0 \end{cases}$$

MATLAB: MuPAD

```
H(s):=simplify(U | odziv[2])/Ug
```

$$\frac{L\,s}{R+L\,s}$$

Индициона ф-ја

```
f(t):=ilaplace(H(s)/s, s, t)
```

$$e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

```
r:= t -> t*heaviside(t)
```

$$t \to t\ \mathrm{heaviside}(t)$$

```
ug(t):=(U_m/T)*r(t)-(U_m/T)*r(t-T)-U_m*heaviside(t-T)
```

$$\frac{U_m\,t\ \mathrm{heaviside}(t)}{T} - U_m\,\mathrm{heaviside}(t-T) + \frac{U_m\,\mathrm{heaviside}(t-T)\,(T-t)}{T}$$

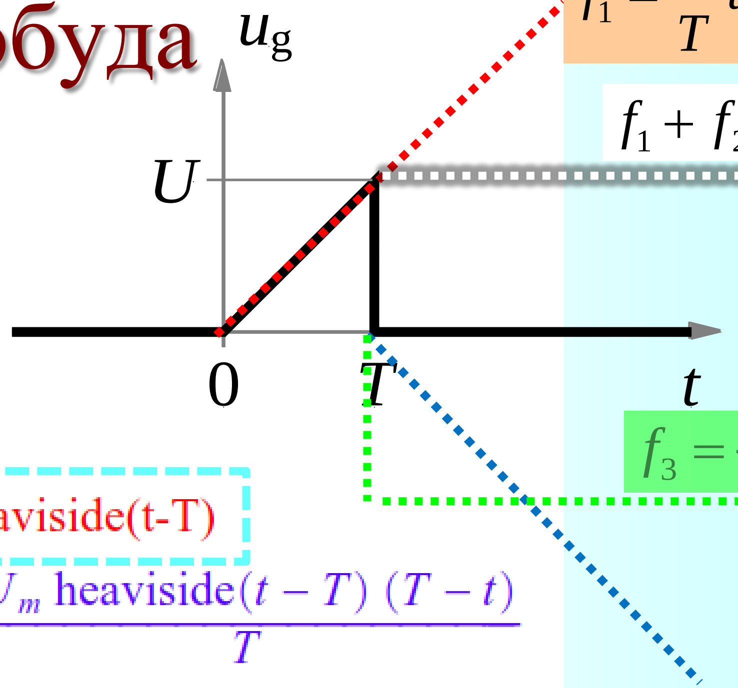
```
pobudaLT:={Ug = laplace(ug(t), t, s)}
```

$$\left\{ \mathrm{Ug} = \frac{U_m}{T\,s^2} - \frac{U_m\,e^{-T\,s}}{s} - \frac{U_m\,e^{-T\,s}}{T\,s^2} \right\}$$

```
U(s):=simplify(U | odziv[2] | pobudaLT)
```

$$-\frac{L\,U_m\,e^{-T\,s}\left(T\,s - e^{T\,s} + 1\right)}{T\,s\,(R+L\,s)}$$

Побуда



$$f_1 = \frac{U}{T}\overbrace{th(t)}^{r(t)}$$

$$f_1 + f_2$$

$$f_3 = -Uh(t-T)$$

$$f_2 = -\frac{U}{T}r(t-T)$$

$$u_g(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) =$$

$$= \frac{U}{T}\overbrace{th(t)}^{r(t)} - \frac{U}{T}\overbrace{r(t-T)}^{(t-T)h(t-T)} - Uh(t-T)$$

MATLAB: MuPAD

Одзив у временском домену

```
U(s):=simplify(U | odziv[2] | pobudaLT)
```

$$-\frac{L\,U_m\,e^{-T\,s}\left(T\,s-e^{T\,s}+1\right)}{T\,s\,(R+L\,s)}$$

```
u(t):=ilaplace(U(s), s, t)
```

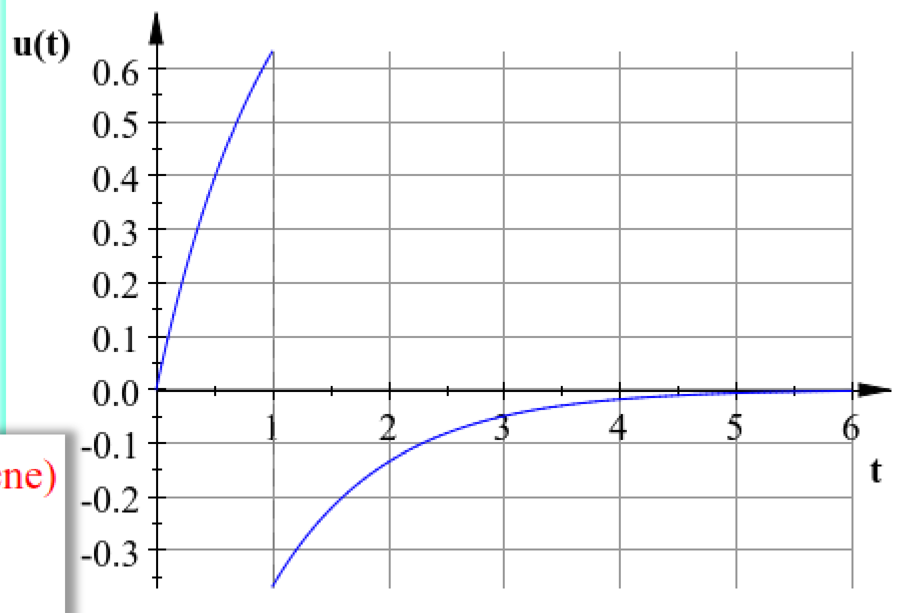
$$\frac{L\,U_m}{R\,T}-U_m\,e^{\frac{R\,(T-t)}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t-T)+\frac{L\,U_m\,\mathrm{heaviside}(t-T)\left(\frac{e^{\frac{R\,(T-t)}{L}}}{R}-\frac{1}{R}\right)}{T}-\frac{L\,U_m\,e^{-\frac{R\,t}{L}}}{R\,T}$$

```
plotfunc2d(simplify(u(t) | zamene)| vrednosti, t = 0..6,
     Scaling=Automatic,

     AxesTitles =["t", "u(t)"],
     AxesTitleFont =["Times New Roman", 14, Bold],

     GridVisible = TRUE,

     TicksLabelFont = ["Times New Roman", 14])
```




```
assume(0<t<L/R and L>0 and R>0): simplify(u(t) | zamene)
```

$$U_m-U_m\,e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

```
assume(t>L/R and L>0 and R>0): simplify(u(t) | zamene)
```

$$-U_m\,e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

MATLAB: MuPAD

Одзив на природне почетне услове

Задатак 1

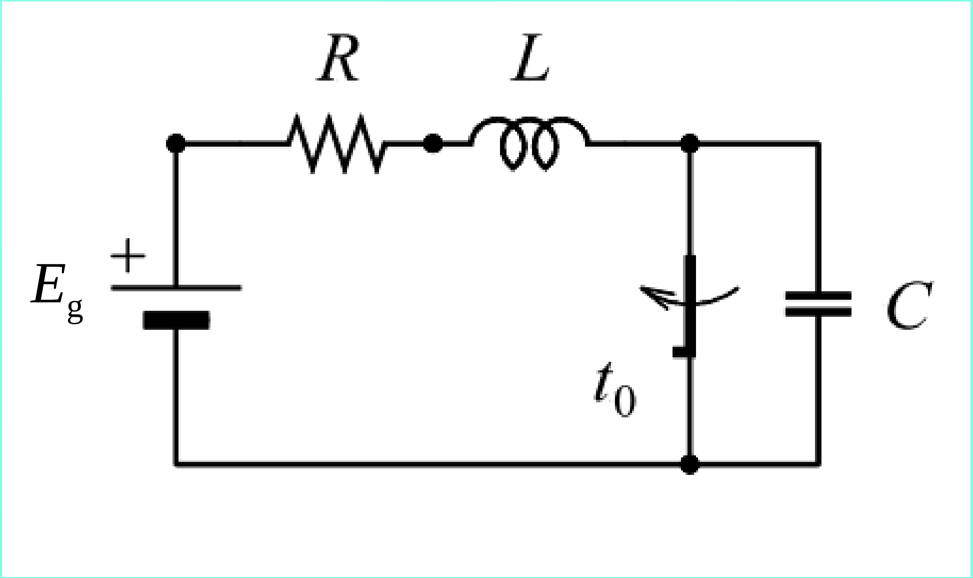
Вредности елемената електричног кола су познате. Прекидач је затворен и одзив је устаљен. У тренутку t_0 прекидач се отвара.

(5) Одредити природне почетне услове у тренутку t_0^-.

(5) Одредити тренутну вредност напона кондензатора, за $t \geq t_0$, ако је $L = CR^2$.

(5) Колика је сакупљена (акумулисана) енергија калема када $t \to +\infty$?

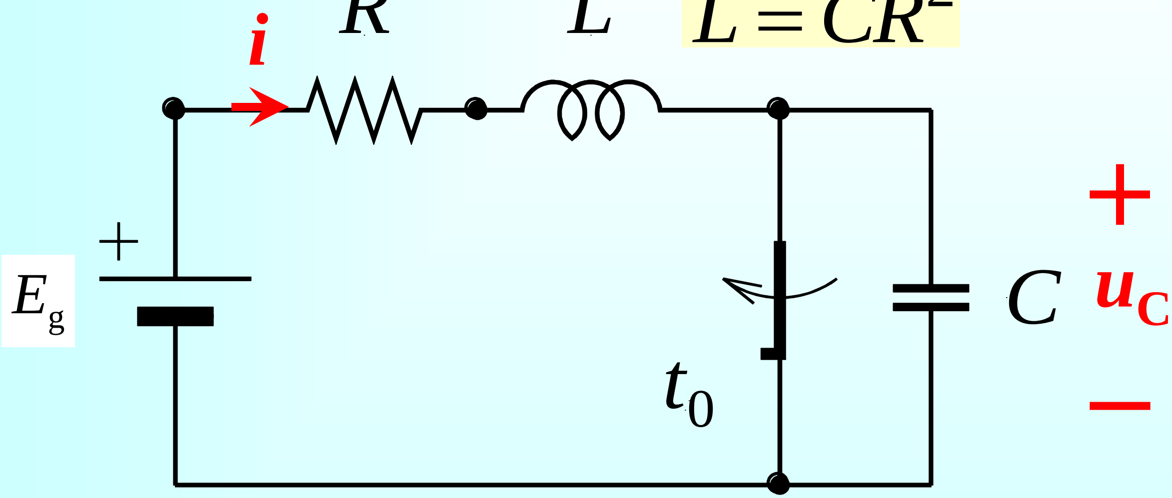
Разматрати општи случај $t_0 \neq 0$.



Природни почетни услови

$t < t_0$

$L = CR^2$



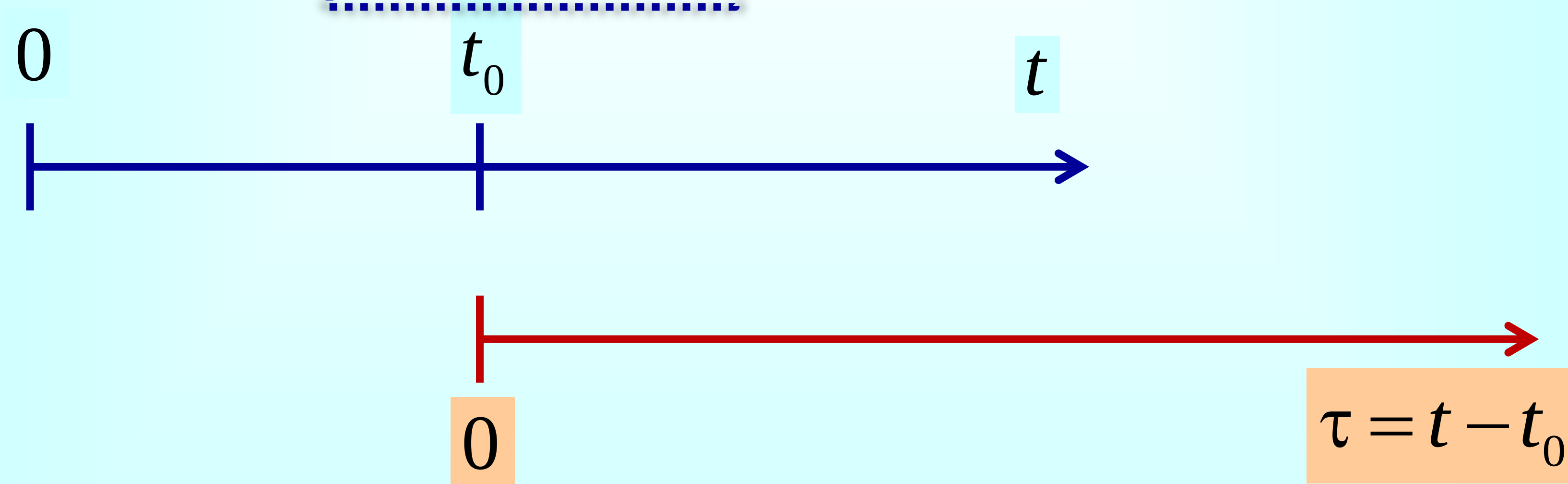
$$u_C\left(t_0^-\right) = 0$$

$$i_L\left(t_0^-\right) = E_g / R$$

τ - нова променљива за време

$$u_C\left(t_0^-\right)=0$$
$$i_L\left(t_0^-\right)=E/R$$

Природни почетни услови по променљивој t



$$u_C\left(0^-\right)=0$$
$$i_L\left(0^-\right)=E/R$$

Природни почетни услови по променљивој τ

Једначине, одзив,... у комплексном домену

```
assume(E>0 and R>0 and L>0 and C>0)
zamene:={L=R^2*C, U0=0, I0=E_g/R}
```

$$\left\{U0 = 0,\ I0 = \frac{E_g}{R},\ L = C\,R^2\right\}$$

```
jednacine:={E_g/s=R*IL+L*(s*IL-I0)+UC,
IC=IL,
IC=C*(s*UC-U0)}
```

$$\left\{IC = -C\,(U0 - UC\,s),\ IC = IL,\ \frac{E_g}{s} = UC - L\,(I0 - IL\,s) + IL\,R\right\}$$

```
promenljive:={IL, IC, UC}
```

$$\{IC, IL, UC\}$$

```
odziv:=solve(jednacine, promenljive)
```

$$\begin{cases} \left\{\left[IC = \sigma_3,\ IL = \sigma_3,\ UC = \dfrac{E_g + I0\,L\,s + C\,L\,U0\,s^2 + C\,R\,U0\,s}{s\,\sigma_5}\right]\right\} & \text{if } \sigma_4 \neq -1 \\ \{[IC = \sigma_1,\ IL = \sigma_1,\ UC = z]\} & \text{if } \sigma_2 = U0 \wedge \sigma_4 = -1 \\ \emptyset & \text{if } \sigma_2 \neq U0 \wedge \sigma_4 = -1 \end{cases}$$

where

$$\sigma_1 = C\,s\,z - C\,U0$$

$$\sigma_2 = E_g + I0\,L\,s$$

$$\sigma_3 = \frac{C\,(E_g - U0 + I0\,L\,s)}{\sigma_5}$$

$$\sigma_4 = \sigma_6 + C\,R\,s$$

$$\sigma_5 = \sigma_6 + C\,R\,s + 1$$

$$\sigma_6 = C\,L\,s^2$$

MATLAB: MuPAD

Одзив у временском домену

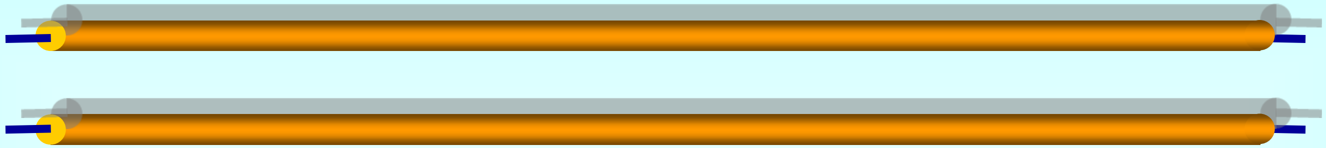
```
uc:=Tau--> Simplify(ilaplace(UC| odziv[1]|zamene, s, Tau))
```

$$\mathrm{Tau} \rightarrow E_g - E_g\, e^{-\frac{\mathrm{Tau}}{2\,C\,R}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{Tau}}{2\,C\,R} \right) - \frac{\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{Tau}}{2\,C\,R} \right)}{3} \right)$$

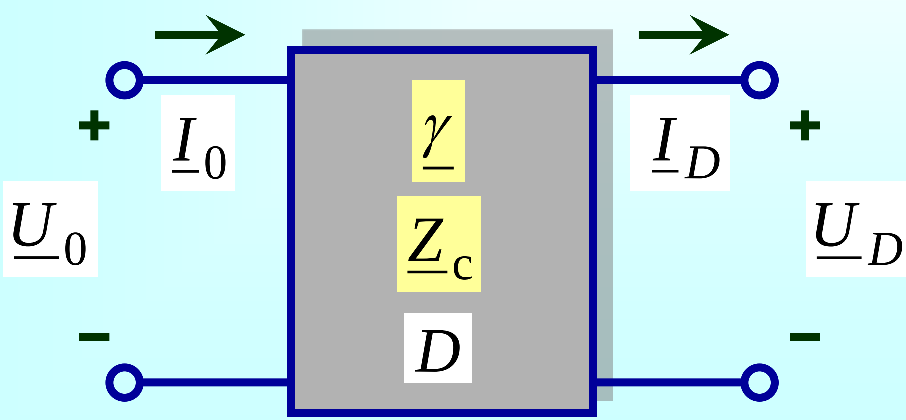
```
Simplify(uc(t-t_0))
```

$$E_g - E_g\, e^{-\frac{t-t_0}{2\,C\,R}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,(t-t_0)}{2\,C\,R} \right) - \frac{\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,(t-t_0)}{2\,C\,R} \right)}{3} \right)$$

MATLAB: MuPAD



Налажење **устаљеног простопериодичног одзива** у ел. колима са **водовима**



$$\underline{U}_0 = \cos(\Theta)\,\underline{U}_D + \mathrm{j}Z_\mathrm{c}\sin(\Theta)\,\underline{I}_D$$

$$\underline{I}_0 = \mathrm{j}Y_\mathrm{c}\sin(\Theta)\,\underline{U}_D + \cos(\Theta)\,\underline{I}_D$$

Решавање ел. кола са водовима

Вредности елемената електричног кола су познате.

Подужна капацитивност водова је $C' = c$ а подужна индуктивност је $L' = l$.

$R_1 = 0.2\,R$, $R_2 = R$, $R_3 = R$,

$l = 4\,R^2\,c$, $d_1 = 2\,d_2$, $d_1\,\omega\,\sqrt{c\,l} = \pi$,

$u_g = \sqrt{2}\;U\sin(\omega\,t)$.

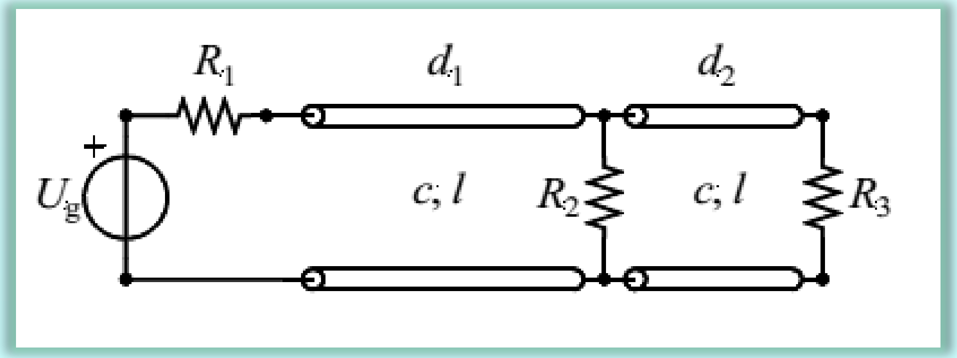
Водови су без губитака.

Одзив је устаљен.

(а) Одредити тренутну вредност струје напонског извора.

(б) Одредити средњу снагу коју напонски извор (напонски генератор) предаје остатку електричног кола.

(в) Колики је коефицијент рефлексије на улазу првог вода?



Једначине, одзив,... у комплексном домену

```
w:=`&omega;`
```
ω

```
T:=`&Theta;`
```
Θ

```
Ro_u1:=`&rho;`[u1]
```
ρ_{u1}

MATLAB: MuPAD

```
assume(R>0 and Ug<>0 and U>0)
pobuda:={ug=sqrt(2)*U*sin(w*t)}
```
$$\{ug = \sqrt{2}\, U \sin(\omega\, t)\}$$

```
vrednosti:={R1=2*R/10, R2=R, R3=R, ZC1=2*R, ZC2=2*R,
T[1]=PI, T[2]=PI/2, Ug=U*exp(-I*PI/2)}
```
$$\left\{R2 = R,\ R3 = R,\ \Theta_1 = \pi,\ R1 = \frac{R}{5},\ Ug = -U\, i,\ ZC1 = 2\,R,\ ZC2 = 2\,R,\ \Theta_2 = \frac{\pi}{2}\right\}$$

```
jednacine:={U01=Ud1*cos(T[1])+I*ZC1*Id1*sin(T[1]),
I01=I*(1/ZC1)*Ud1*sin(T[1])+Id1*cos(T[1]),

U02=Ud2*cos(T[2])+I*ZC2*Id2*sin(T[2]),
I02=I*(1/ZC2)*Ud2*sin(T[2])+Id2*cos(T[2]),

Ug=R1*I01+U01, Id1=I02+Ud1/R2, Ud1=U02, Id2=Ud2/R3}
```
$$\left\{I01 = Id1\cos(\Theta_1) + \frac{Ud1\sin(\Theta_1)\, i}{ZC1},\ I02 = Id2\cos(\Theta_2) + \frac{Ud2\sin(\Theta_2)\, i}{ZC2},\ Ud1 = U02,\ Id2 = \frac{Ud2}{R3},\ Ug = U01 + I01\, R1,\right.$$
$$\left. U01 = Ud1\cos(\Theta_1) + Id1\, ZC1\sin(\Theta_1)\, i,\ U02 = Ud2\cos(\Theta_2) + Id2\, ZC2\sin(\Theta_2)\, i,\ Id1 = I02 + \frac{Ud1}{R2}\right\}$$

```
promenljive:={U01, I01, Ud1, Id1, U02, I02, Ud2, Id2}
```
$$\{I01, I02, Id1, Id2, U01, U02, Ud1, Ud2\}$$

```
odziv:=solve(jednacine, promenljive)|vrednosti
```
$$\left\{\left[I01 = -\frac{U\, i}{R},\ I02 = \frac{U\, i}{5\,R},\ Id1 = \frac{U\, i}{R},\ Id2 = \frac{2\,U}{5\,R},\ U01 = -\frac{4\,U\, i}{5},\ U02 = \frac{4\,U\, i}{5},\ Ud1 = \frac{4\,U\, i}{5},\ Ud2 = \frac{2\,U}{5}\right]\right\}$$

Одзив у временском домену, средња снага, коефицијент рефлексије

```
odziv:=solve(jednacine, promenljive)|vrednosti
```

$$\left\{\left[\mathrm{I01} = -\frac{U\,\mathrm{i}}{R}, \mathrm{I02} = \frac{U\,\mathrm{i}}{5\,R}, \mathrm{Id1} = \frac{U\,\mathrm{i}}{R}, \mathrm{Id2} = \frac{2\,U}{5\,R}, \mathrm{U01} = -\frac{4\,U\,\mathrm{i}}{5}, \mathrm{U02} = \frac{4\,U\,\mathrm{i}}{5}, \mathrm{Ud1} = \frac{4\,U\,\mathrm{i}}{5}, \mathrm{Ud2} = \frac{2\,U}{5}\right]\right\}$$

```
Ig:=I01|odziv
```

$$-\frac{U\,\mathrm{i}}{R}$$

```
ig(t)=Simplify(sqrt(2)*abs(Ig)*cos(w*t+arg(Ig))|vrednosti)
```

$$\mathrm{ig}(t) = \frac{\sqrt{2}\,U\,\sin(\omega\,t)}{R}$$

```
P:=Re(Ug*conjugate(Ig)) | vrednosti
```

$$\frac{U^2}{R}$$

```
Zu1:=U01/I01|odziv[1]
```

$$\frac{4\,R}{5}$$

```
Ro_u1=(Zu1-ZC1)/(Zu1+ZC1)|vrednosti
```

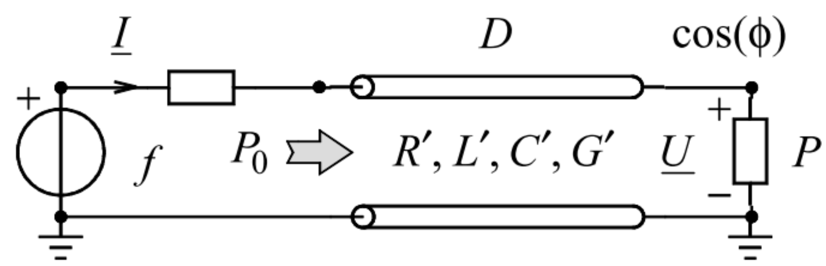
$$\rho_{u1} = -\frac{3}{7}$$

MATLAB: MuPAD

Електроенергетски вод са губицима

Задатак 1

Електроенергетски далековод, са губицима услед короне и несавршености изолатора, се може описати водом чији су примарни параметри $R' = 0.08\ \Omega/\mathrm{km}$, $L' = 1.34\ \mathrm{mH/km}$, $C' = 8.6\ \mathrm{nF/km}$, $G' = 37.5\ \mathrm{nS/km}$. Дужина вода је $D = 900\ \mathrm{km}$. Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је $f = 50\ \mathrm{Hz}$. Вод је затворен потрошачем чија је средња (активна) снага $P = 100\ \mathrm{MW}$, сачинитељ (фактор) снаге $\cos(\phi) = 1$ и комплексан напон $\underline{U} = 220\ \mathrm{kV}$. Одредити



(5) комплексну струју генератора

(5) средњу (активну) снагу на улазу вода

(5) заменску П-шему вода и вредности њених елемената.

```
Gama:=`&gamma;`
  γ
```

```
km:=1000
  1000
```

```
n:=1e-9
  0.000000001
```

```
m:=1e-3
  0.001
```

```
k:=1e3
  1000.0
```

```
M:=1e6
  1000000.0
```

```
zamene:={r=0.08/km, l=1.34*m/km, c=8.6*n/km, g=37.5*n/km,
D=900*km, f=50, P=100*M, cosPhi=1, U=220*k}
```

$\{c = 8.6\ 10^{-12},\ g = 3.75\ 10^{-11},\ U = 220000.0,\ r = 0.00008,\ l = 0.00000134,\ D = 900000,\ P = 100\ M,\ \mathrm{cosPhi} = 1,\ f = 50\}$

```
Zc:=Simplify(sqrt((r+I*2*PI*f*l)/(g+I*2*PI*f*c))|zamene)
  396.7253915 – 34.58597641 i
```

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

```
Gama:=Simplify(sqrt((r+I*2*PI*f*l)*(g+I*2*PI*f*c))|zamene)
  0.0000001083205447 + 0.000001070563661 i
```

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

```
a11:=Simplify(cosh(Gama*D)|zamene)
  0.5733571653 + 0.08018422723 i
```

$$\underline{a}_{11} = \underline{A} = \cosh(\underline{\gamma}D)$$

```
a12:=Simplify(Zc*sinh(Gama*D)|zamene)
  50.64227662 + 325.4123847 i
```

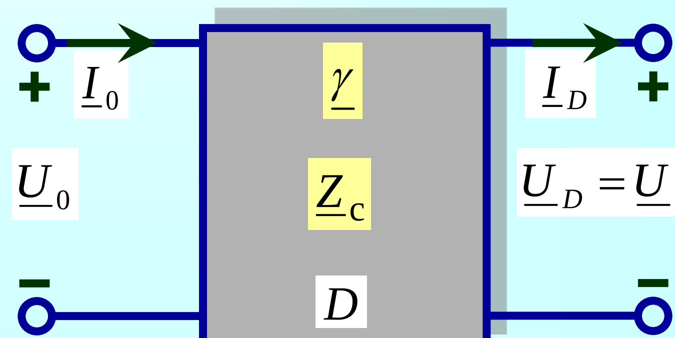
$$\underline{a}_{12} = \underline{B} = \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}D)$$

```
a21:=Simplify((1/Zc)*sinh(Gama*D)|zamene)
  –0.00004055648676 + 0.002076249185 i
```

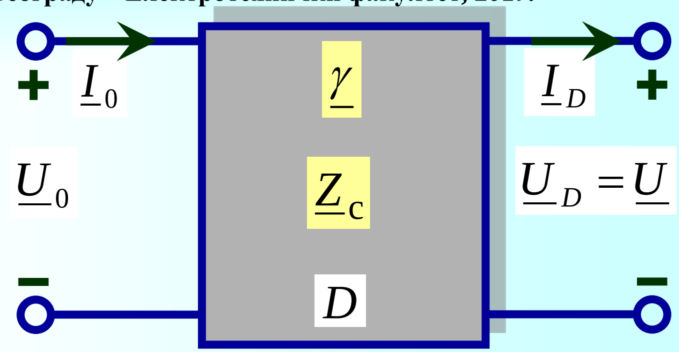
$$\underline{a}_{21} = \underline{C} = \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}D)$$

```
a22:=Simplify(cosh(Gama*D)|zamene)
  0.5733571653 + 0.08018422723 i
```

$$\underline{a}_{22} = \underline{D} = \cosh(\underline{\gamma}D)$$



MATLAB: MuPAD




```
Id:=P/(U*cosPhi)|zamene
  454.5454545
I0:=a21*U+a22*Id | zamene
  251.6944663 + 493.2221966 i
U0:=a11*U+a12*Id | zamene
  149157.793 + 165555.2503 i
S0:=U0*conjugate(I0) | zamene
  119197715.3 – 31898593.96 i
P:=Re(S0)
  119197715.3
Z1:=Zc*coth(Gama*D/2) | zamene
  23.80838417 – 758.2532778 i
Z2:=Zc*sinh(Gama*D)  | zamene
  50.64227662 + 325.4123847 i
```

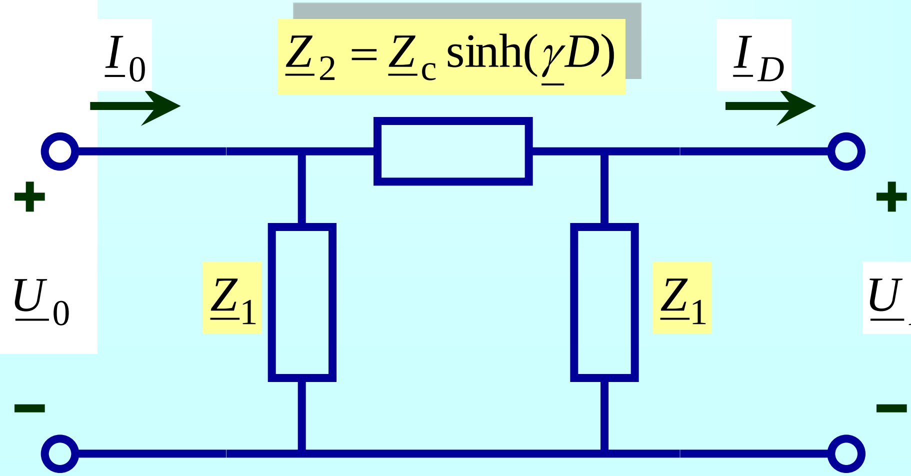
$$\underline{I}_0 = \underline{C}\,\underline{U}_D + \underline{D}\,\underline{I}_D$$

$$\underline{U}_0 = \underline{A}\,\underline{U}_D + \underline{B}\,\underline{I}_D$$

$$\underline{S}_0 = \underline{U}_0 \left(\underline{I}_0\right)^* = \boxed{P_0} + \mathrm{j}Q_0$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_\mathrm{c} \coth\left(\tfrac{1}{2}\underline{\gamma} D\right)$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_\mathrm{c} \sinh(\underline{\gamma} D)$$



MATLAB: MuPAD